
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01215267 4





COURS

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
20337 Quai des Grands-Augustins, 55.

COURS

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A L'USAGE

des Élèves de la Classe de Mathématiques spéciales
et des Candidats aux Écoles du Gouvernement;

PAR

Boleslas Alexandre
B^o NIEWENGLOWSKI,
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand,
Membre du Conseil supérieur de l'Instruction publique.

TOME I.

SECTIONS CONIQUES.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1894

AVANT-PROPOS.

Ce *Cours* comprend tout ce qui est exigé des candidats à l'École Polytechnique ou à l'École Normale relativement à la Géométrie analytique; il contient davantage. Les élèves qui se préparent à subir les épreuves d'un concours difficile sont obligés d'apprendre plus que *le programme,* en vertu de cet adage : *Qui peut le plus, peut le moins.* Aussi ne me suis-je pas limité aux seules théories qui figurent explicitement dans les programmes officiels. Ni les coordonnées trilinéaires, ni les coordonnées tangentielles n'y sont mentionnées; leur connaissance est pourtant précieuse : c'est pourquoi je leur ai fait une place importante. Néanmoins, j'ai réservé la prédominance aux coordonnées cartésiennes, qui constituent l'instrument fondamental.

L'emploi des coordonnées tangentielles exige quelque expérience, on ne peut le nier. On ne doit donc, à mon avis, les introduire dans l'enseignement qu'avec beaucoup de prudence et de ménagement. J'ai cru possible et avantageux d'exposer la théorie des coordonnées homogènes et des coordonnées trilinéaires aussitôt après la *ligne droite;* mais c'est surtout la transformation par polaires réciproques qui permet de comprendre l'usage des coordonnées tangentielles, en éclairant d'un jour plus vif les raisonnements directs qui semblent parfois quelque peu détournés. Pour cette raison, j'ai placé les principales applications des coordonnées tangentielles après les polaires réciproques.

A la suite de chaque Chapitre, j'ai indiqué quelques exercices, dont j'aurais pu facilement étendre le nombre en faisant des em-

prunts aux journaux ou aux recueils de problèmes. J'ai préféré n'indiquer que des applications immédiates ou des compléments utiles.

Le premier Volume contient la ligne droite, le cercle et une partie de la théorie des coniques ainsi que la théorie des tangentes. Le deuxième renfermera les théories générales relatives aux courbes planes et des compléments concernant les coniques. Un troisième Volume sera consacré à la Géométrie dite *à trois dimensions*.

J'ai toujours donné la préférence aux méthodes symétriques; pour passer de la Géométrie plane à la Géométrie dans l'espace, il suffira souvent de reprendre exactement des calculs déjà faits, en introduisant une variable de plus.

L'ordre que j'ai suivi a été déterminé par le choix des matières qu'il m'a paru utile de grouper pour constituer mon enseignement; cet ordre n'est pas indispensable, et il sera très facile de le modifier. Les élèves de seconde année pourront, par exemple, étudier les théories générales relatives aux courbes planes aussitôt après la théorie des tangentes et terminer par les coniques. J'ai pensé qu'il y aurait plus de profit pour les élèves de première année à commencer par les théories les plus faciles.

J'ai adopté, suivant en cela un usage de plus en plus répandu, deux sortes de caractères pour le texte, les plus petits étant réservés aux questions les plus difficiles et ne faisant pas partie des programmes, et parfois aussi à de simples applications.

Le dernier Volume renfermera une Note importante relative à la transformation des figures, que M. E. Borel a bien voulu rédiger.

En terminant, qu'il me soit permis d'offrir à MM. Gauthier-Villars mes bien sincères remercîments pour les soins qu'ils ont apportés à l'impression de cet Ouvrage.

Paris, 8 juillet 1894.

B. Niewenglowski.

COURS

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

CHAPITRE I.

PRÉLIMINAIRES.

Remarques sur l'homogénéité des formules de la Géométrie.

1. Les propriétés métriques des figures se traduisent par des relations entre des longueurs. Deux cas peuvent se présenter : 1° l'unité de longueur est indéterminée, 2° l'une des lignes de la figure étudiée a été prise pour unité.

2. Théorème. — *Toute relation homogène entre les mesures des longueurs des lignes d'une figure est indépendante de l'unité de longueur.*

Soit

$$f(a, b, c, \ldots, l) = 0$$

une équation dont le premier membre est une fonction homogène et de degré m des lettres $a, b, \ldots, l$. Nous supposons que ces lettres désignent respectivement les mesures des longueurs A, B, ..., L au moyen d'une unité U. Prenons une nouvelle unité U′ et supposons $U = U' \times t$; les nouvelles mesures des longueurs considérées seront

$$a' = a \times t, \quad b' = b \times t, \quad \ldots, \quad l' = l \times t.$$

La fonction $f(a, b, \ldots, l)$ étant homogène et de degré m, on a, en vertu même de la définition d'une fonction homogène,

$$f(a', b', \ldots, l') = f(ta, tb, \ldots, tl) = t^m f(a, b, \ldots, l),$$

donc

$$f(a', b', \ldots, l') = 0,$$

ce qui prouve que les nouvelles mesures vérifient la même relation que les anciennes.

3. Réciproquement. — *Toute relation indépendante de l'unité de longueur est homogène.*

Supposons d'abord la relation donnée algébrique et mise sous la forme

$$f(a, b, c, \ldots, l) = 0,$$

le premier membre étant un polynome rationnel et entier de degré m.

Si ce polynome n'était pas homogène, il pourrait être décomposé en une somme de polynomes homogènes et, par suite, l'équation donnée serait de la forme

$$(1) \quad \varphi_m(a, b, \ldots, l) + \varphi_{m-1}(a, b, \ldots, l) + \ldots \varphi_1(a, b, \ldots, l) + \varphi_0 = 0,$$

$\varphi_m, \varphi_{m-1}, \ldots, \varphi_1$ désignant des polynomes homogènes dont les degrés sont égaux aux indices correspondants et φ_0 étant une constante. Par hypothèse l'équation (1) est indépendante de l'unité, ce qui revient à dire qu'elle ne change pas quand on multiplie toutes les mesures par un nombre arbitraire t; ce qui donne

$$t^m \varphi_m(a, b, \ldots, l) + t^{m-1} \varphi_{m-1}(a, b, \ldots, l) + \ldots + t \varphi_1(a, b, \ldots, l) + \varphi_0 = 0.$$

Cette équation algébrique en t devant être vérifiée pour toutes les valeurs de t, on en conclut que

$$(2) \quad \varphi_m(a, b, \ldots, l) = 0.$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{r} \varphi_{m-1}(a, b, \ldots, l) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_1(a, b, \ldots, l) = 0, \\ \varphi_0 = 0. \end{array} \right.$$

La relation proposée est *par hypothèse* de degré m; donc les relations (3) sont des identités et, par suite, le polynome $f(a, b, \ldots, l)$ se réduisant à $\varphi_m(a, b, \ldots, l)$ est homogène.

4. *Remarque.* — Il est incontestable que si l'on donne plusieurs relations homogènes entières et de degrés différents

$$\varphi_m = 0, \qquad \varphi_p = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_q = 0,$$

on a le droit d'en déduire

$$\varphi_m + \varphi_p + \ldots + \varphi_q = 0.$$

Mais une pareille équation ne saurait être d'aucune utilité, car lorsqu'on ajoute des équations membre à membre c'est pour obtenir des réductions de termes semblables; or des polynomes homogènes de degrés différents n'ont pas de termes respectivement semblables.

5. D'une manière générale, on peut démontrer que toute équation indépendante de l'unité est équivalente à une équation homogène.

En effet, soit

$$f(a, b, \ldots, k, l) = 0$$

une équation entre les mesures des lignes A, B, ..., K, L; si cette relation est indépendante de l'unité U, elle subsistera si l'on prend pour unité l'une quelconque des lignes de la figure, L par exemple. Les autres lignes auront alors pour mesures

$$a' = \frac{a}{l}, \quad b' = \frac{b}{l}, \quad \ldots, \quad k' = \frac{k}{l},$$

puisque $L = U \times l$. L'équation donnée peut donc se mettre sous la forme

$$f(a', b', \ldots, k', 1) = 0,$$

c'est-à-dire

$$f\left(\frac{a}{l}, \frac{b}{l}, \ldots, \frac{k}{l}, 1\right) = 0.$$

Le premier membre est homogène et de degré 0; en le multipliant par une puissance quelconque de l, on le mettra sous la forme d'une fonction homogène de degré arbitraire.

6. *Rétablir l'homogénéité, quand on a pris pour unité une ligne de la figure.* — Supposons qu'en prenant pour unité une longueur L on ait obtenu l'équation

$$(1) \qquad f(a', b', \ldots, k') = 0.$$

Cette relation devient homogène et de degré 0, si l'on remplace a', b', ..., k' respectivement par

$$\frac{a}{l}, \quad \frac{b}{l}, \quad \ldots, \quad \frac{k}{l},$$

$a, b, \ldots, l$ étant les mesures des lignes A, B, ..., L rapportées à

une unité arbitraire, et l'on obtient ainsi

$$f\left(\frac{a}{l}, \frac{b}{l}, \ldots, \frac{k}{l}\right) = 0. \tag{2}$$

Si la relation (1) est algébrique et entière, on réduira tous les termes de l'équation (2) au même dénominateur qui sera une puissance de l, soit l^m; en multipliant le premier membre de l'équation (2) par l^m, on obtiendra une équation algébrique, entière et homogène de degré m,

$$l^m f\left(\frac{a}{l}, \frac{b}{l}, \ldots, \frac{k}{l}\right) = 0.$$

7. *Exemple.* — En désignant par b', c' les mesures des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est prise pour unité de longueur, on a

$$b'^2 + c'^2 = 1.$$

Donc, en désignant par a, b, c les mesures des trois côtés rapportés à une unité arbitraire,

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1$$

ou, en multipliant par a^2,

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

8. *Cas où la relation contient des aires, des volumes, etc.* — On considère encore des relations dans lesquelles interviennent des aires ou des volumes. L'aire s d'une surface peut être remplacée par celle du carré équivalent, de même le volume v d'un solide peut être remplacé par le volume du cube équivalent. En appelant a et b les côtés du carré ou du cube équivalents à la surface ou au solide considéré, on peut remplacer s par a^2 et v par b^3; d'après cela, si les lettres s, v, ... désignent, dans une formule fournie par un théorème de Géométrie, une aire ou un volume, il faudra, pour vérifier l'homogénéité, compter s comme étant du second degré et v du troisième. Ainsi les formules $s = a.b$, $v = a.b.c$, qui donnent, la première : l'aire d'un rectangle ayant pour côtés a, b, et la seconde : le volume du parallélépipède ayant pour arêtes a, b, c, sont homogènes.

On vérifiera de même que les formules de la Mécanique sont homogènes, pourvu que l'on regarde le *temps* comme un nombre,

une vitesse ou une accélération comme une longueur. Ainsi les formules $v = gt$, $e = \frac{1}{2} gt^2$ sont homogènes, en regardant v, e, g comme étant du premier degré et t du degré zéro.

9. *Utilité de l'homogénéité.* — Les relations fournies par la Géométrie devant être homogènes, si dans le courant d'un calcul on arrive à une équation *non homogène,* on peut être assuré qu'on a commis une faute de calcul, à moins toutefois qu'on n'ait choisi pour unité une ligne de la figure. Mais, dans ce dernier cas, on peut rétablir l'homogénéité. S'il n'en est pas ainsi, il faut recommencer les calculs jusqu'à ce que l'on ait découvert les erreurs; on peut ainsi exercer sur les calculs un précieux contrôle qu'il ne faut jamais négliger.

Constructions géométriques.

10. *Conditions de possibilité.* — Soient a, b, ..., l des longueurs données et x une longueur que l'on se propose de construire, sachant que

$$x = f(a, b, \dots, l)$$

l'unité de longueur étant arbitraire.

Pour que le problème soit possible, il est nécessaire que la fonction f soit homogène et du premier degré, car, si l'on change d'unité, les mesures des lignes considérées seront toutes multipliées par un même nombre t; de sorte que

$$ix = f(ta, tb, \dots, tl),$$

ce qui exige que

$$f(ta, tb, \dots, tl) = tf(a, b, \dots, l).$$

Cette identité exprime que la fonction f doit être une fonction homogène de degré 1.

En second lieu, si l'on n'admet que les constructions qui peuvent être réalisées à l'aide de la règle et du compas, il faut encore que la fonction f satisfasse à certaines conditions que nous ne ferons qu'indiquer, en renvoyant le lecteur au livre remarquable de M. J. Petersen, *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques* (1). L'auteur

(1) Paris, Gauthier-Villars et fils, traduit par M. O. Chemin.

démontre que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un problème puisse se résoudre avec la règle et le compas, c'est que les quantités cherchées puissent s'exprimer rationnellement au moyen de quantités données et de racines carrées* (p. 106).

11. *Construction d'expressions rationnelles.* — Dans ce qui va suivre, a, b, ..., l, a', ..., l' désigneront des longueurs données, x sera la ligne à construire.

1° On a appris, dans le cours de Géométrie élémentaire, à construire une *quatrième* ou une *troisième proportionnelle*, c'est-à-dire une ligne x définie par l'une des équations

$$x = \frac{ab}{c} \quad \text{ou} \quad x = \frac{a^2}{c}.$$

Nous supposons ces constructions connues.

2° Il en résulte que l'on peut construire la ligne x définie par l'équation

$$x = \frac{abcd\ldots l}{b'c'd'\ldots l'},$$

le numérateur contenant *une* longueur de plus que le dénominateur. Si l'on construit la ligne α quatrième proportionnelle à b', a, b, on peut poser

$$x = \frac{\alpha cd\ldots l}{c'd'\ldots l'}.$$

Le problème est simplifié puisque chacun des deux termes de cette seconde fraction contient une *longueur* de moins que dans la première; de même, en construisant

$$\beta = \frac{\alpha c}{c'},$$

il reste à construire

$$x = \frac{\beta d\ldots l}{d'\ldots l'},$$

et ainsi de suite; finalement on aura à construire une quatrième proportionnelle

$$x = \frac{\lambda l}{l'}.$$

3° Si A, B, ..., L désignent des monomes rationnels de degré m et A′, B′, ..., L′ des monomes rationnels de degré $m - 1$, formés avec des lettres a, b, ... désignant des longueurs, on peut construire

la longueur

$$x = \frac{\Sigma A}{\Sigma A'},$$

ΣA et $\Sigma A'$ désignant respectivement des sommes algébriques de monomes de la première et de la seconde espèce.

Soit en effet λ une longueur arbitraire, qui peut d'ailleurs être l'une des lignes données; on peut poser

$$x = \lambda \frac{\sum \frac{A}{\lambda^{m-1}}}{\sum \frac{A'}{\lambda^{m-2}}}.$$

Chacune des expressions du premier degré telles que $\frac{A}{\lambda^{m-1}}$ représente une longueur dont la construction se ramène à une suite de quatrièmes proportionnelles; on devra donc, pour obtenir $\Sigma \frac{A}{\lambda^{m-2}}$, construire la somme algébrique de plusieurs longueurs connues et il en sera de même pour $\Sigma \frac{A'}{\lambda^{m-2}}$. On est ainsi ramené à construire

$$x = \frac{\lambda\mu}{\nu},$$

μ et ν étant des longueurs connues.

4° Plus généralement, on pourra construire une somme algébrique d'expressions rationnelles analogues à la précédente.

Il résulte de ce qui précède que l'on peut construire toute expression rationnelle et homogène du premier degré.

12. *Expressions irrationnelles.* — 1° On sait construire la moyenne géométrique de deux longueurs données

$$x = \sqrt{a.b}.$$

2° On en déduit la construction de la longueur x définie par l'équation

$$x^2 = \frac{abcd\ldots l}{c'd'\ldots l'},$$

le nombre des longueurs qui figurent au numérateur surpassant de deux unités celui des longueurs qui se trouvent au dénominateur.

Il suffit en effet de construire successivement

$$\alpha = \frac{bcd\ldots l}{c'd'\ldots l'}$$

et

$$x = \sqrt{a\alpha}.$$

3° Soit

$$x^2 = \frac{\Sigma A}{\Sigma A'},$$

ΣA désignant une somme de monomes rationnels de degré m et $\Sigma A'$ une somme de monomes rationnels de degré $m-2$. Soit λ une longueur arbitraire, on a

$$x^2 = \lambda^2 \frac{\sum \frac{A}{\lambda^{m-1}}}{\sum \frac{A'}{\lambda^{m-3}}}.$$

On peut construire

$$\alpha = \Sigma \frac{A}{\lambda^{m-1}}, \qquad \beta = \Sigma \frac{A'}{\lambda^{m-3}},$$

ce qui donne

$$\frac{x^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

On peut construire la troisième proportionnelle $\mu = \frac{\lambda^2}{\beta}$, et il reste à construire

$$x = \sqrt{\alpha\mu}.$$

Mais on peut aussi construire d'abord un triangle rectangle ABC tel que les côtés AB, AC de l'angle droit aient pour projections sur l'hypoténuse les longueurs α et β; on aura ainsi

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\alpha}{\beta},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{AB}{AC},$$

et l'on est ramené à construire une quatrième proportionnelle.

4° *Construire x définie par l'équation*

$$x^2 = \frac{\Sigma A}{\Sigma A'} \pm \frac{\Sigma B}{\Sigma B'} \pm \ldots \pm \frac{\Sigma L}{\Sigma L'},$$

chacune des fractions précédentes étant rationnelle, homogène et du second degré.

On construit d'abord les lignes y, z, ..., u telles que

$$y^2 = \frac{\Sigma A}{\Sigma A'}, \qquad z^2 = \frac{\Sigma B}{\Sigma B'}, \qquad \ldots, \qquad u^2 = \frac{\Sigma L}{\Sigma L'}.$$

A l'aide d'une suite de triangles rectangles on obtiendra x, car

$$x^2 = y^2 \pm z^2 \pm \ldots \pm u^2.$$

5° *Construire* $x = \sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

On suppose A et B rationnels, homogènes, et respectivement du second et du quatrième degré.

Écrivons

$$x = \sqrt{A \pm \lambda\sqrt{\frac{B}{\lambda^2}}}.$$

Si l'on construit d'abord

$$\alpha = \sqrt{\frac{B}{\lambda^2}},$$

on aura

$$x = \sqrt{A \pm \lambda\alpha}.$$

Enfin on peut construire β et γ tels que $\beta^2 = A$, $\gamma^2 = \lambda\alpha$, de sorte que

$$x^2 = \beta^2 \pm \gamma^2.$$

6°

$$x = \sqrt[4]{a^4 \pm b^4}.$$

En écrivant

$$x = \sqrt{a\sqrt{a^2 \pm \frac{b^4}{a^2}}},$$

on construit successivement

$$\alpha = \frac{b^2}{a}, \qquad \beta = \sqrt{a^2 \pm \alpha^2}$$

et enfin

$$x = \sqrt{a\beta}.$$

7°

$$x = \sqrt[4]{\frac{a^6 - a^3b^3 - b^6}{a^2 - b^2}}.$$

On a successivement

$$x = \sqrt[4]{\frac{a^5\left(a - \frac{b^3}{a^2} - \frac{b^6}{a^5}\right)}{a\left(a - \frac{b^2}{a}\right)}} = \sqrt[4]{a^4 \frac{\alpha}{\beta}},$$

en posant

$$\alpha = a - \frac{b^3}{a^2} - \frac{b^6}{a^5}, \qquad \beta = a - \frac{b^2}{a}.$$

Enfin, en écrivant

$$x = \sqrt{a\sqrt{\frac{a^2\alpha}{\beta}}},$$

on construit γ tel que

$$\frac{\gamma^2}{a^2} = \frac{\alpha}{\beta}$$

et enfin

$$x = \sqrt{a\gamma}.$$

13. *Applications.* — Descartes fait remarquer, dans sa *Géométrie,* que la multiplication, la division, l'extraction de la racine carrée peuvent se ramener à des constructions graphiques. En effet, soit à effectuer le produit de deux nombres a, b. En prenant une longueur pour unité, cherchons une ligne dont la mesure x soit égale au produit des deux nombres a, b. Nous écrirons

$$x = \frac{a.b}{1}.$$

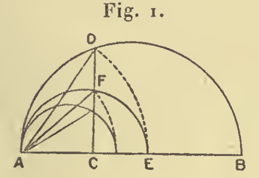
Il suffira donc de construire une quatrième proportionnelle à la longueur prise pour unité et aux deux longueurs mesurées par les nombres a et b; enfin la *mesure* de la ligne ainsi construite sera précisément égale au produit demandé.

De même si l'on doit calculer $x = \frac{a}{b}$; en écrivant $\frac{x}{1} = \frac{a}{b}$, il suffira de construire une quatrième proportionnelle aux longueurs mesurées par b, a, 1.

Pareillement si $x = \sqrt{a}$, en écrivant $x = \sqrt{a \times 1}$, on est ramené à construire une moyenne géométrique.

Supposons d'abord $a > 1$; nous prendrons (*fig.* 1) une ligne AC pour unité et nous construirons la ligne AB mesurée par le nombre donné a, puis nous décrirons sur AB comme diamètre une demi-circonférence et nous élèverons CD perpendiculaire à AB. La longueur AD représentera la racine carrée de a. En prenant AE = AD et décrivant sur AE comme diamètre une demi-circonférence, la mesure de AF sera $\sqrt[4]{a}$, et ainsi de suite.

Fig. 1.



Si $a < 1$, en supposant (*fig.* 2) que AC soit la ligne prise pour unité et

que AB soit mesurée par a, on décrira une demi-circonférence sur AC comme diamètre et on élèvera la perpendiculaire BD; AD représente $\sqrt{a}$. En prenant $AE = AD$ et élevant la perpendiculaire EF, la mesure de AF sera $\sqrt[4]{a}$, ..., et ainsi de suite.

Fig. 2.

Nous ferons encore la remarque suivante; en prenant (*fig.* 3) $AB = a$, $BC = b$, O étant le milieu de AC, OA est la moyenne arithmétique des lignes a, b. En menant BD perpendiculaire à AC

$$BD = \sqrt{ab}.$$

Enfin, si BE est la perpendiculaire à OD menée par B, on a

$$DE.DO = \overline{BD}^2 = ab$$

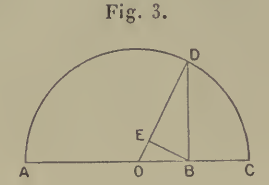
ou

$$DE\,\frac{a+b}{2} = ab$$

ou enfin

$$DE = \frac{2ab}{a+b}.$$

Fig. 3.

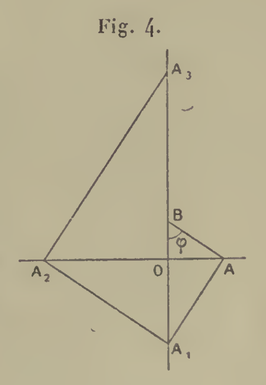


La longueur DE est la *moyenne* harmonique de a et b. Les trois moyennes arithmétique, géométrique et harmonique sont respectivement les longueurs OD, BD, DE, qui sont ainsi rangées par ordre décroissant; enfin la moyenne géométrique de a et b est la moyenne géométrique des deux autres moyennes.

14. *Quelques exemples de constructions particulières.*

1°
$$x = \frac{a^{m+1}}{b^m}.$$

Fig. 4.



On peut construire un angle φ tel que $\tan\varphi = \frac{a}{b}$, de sorte que

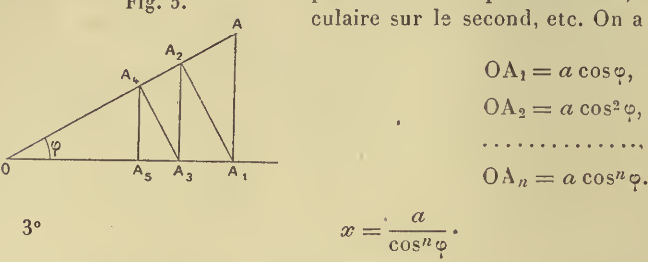
$$x = a \operatorname{tang}^m \varphi.$$

Traçons deux droites rectangulaires (*fig.* 4), et à partir de leur point de rencontre prenons sur l'une d'elles $OA = a$ et sur la seconde $OB = b$. L'angle $OBA = \varphi$. Si nous menons la perpendiculaire AA_1 à AB, on a $OA_1 = a \operatorname{tang}\varphi$; puis, si A_1A_2 est perpendiculaire à AA_1, $OA_2 = a \operatorname{tang}^2\varphi$. En traçant A_2A_3 perpendiculaire à A_1A_2, on a $OA_3 = a \operatorname{tang}^3\varphi$, ...

2°
$$x = a \cos^n \varphi.$$

Ayant construit un angle égal à φ (*fig.* 5), je porte $OA = a$ sur l'un de ses côtés et de A j'abaisse AA_1 perpendiculaire à l'autre côté, puis A_1A_2 perpendiculaire au premier côté, A_2A_3 perpendiculaire sur le second, etc. On a

Fig. 5.

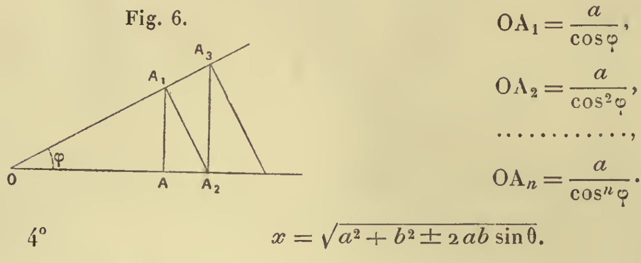


$$OA_1 = a\cos\varphi,$$
$$OA_2 = a\cos^2\varphi,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$OA_n = a\cos^n\varphi.$$

3° $$x = \frac{a}{\cos^n\varphi}.$$

Sur l'un des côtés d'un angle égal à φ (*fig.* 6), prenons $OA = a$ et élevons AA_1 perpendiculaire au premier côté jusqu'à sa rencontre en A_1 avec le second; puis menons A_1A_2 perpendiculaire au second côté, etc. On a successivement

Fig. 6.



$$OA_1 = \frac{a}{\cos\varphi},$$
$$OA_2 = \frac{a}{\cos^2\varphi},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$OA_n = \frac{a}{\cos^n\varphi}.$$

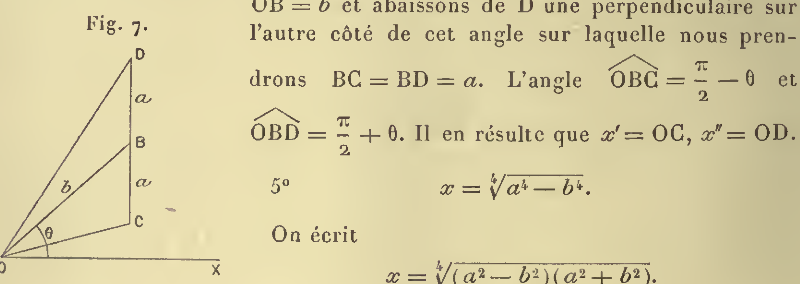
4° $$x = \sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ab\sin\theta}.$$

On peut écrire

$$x' = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\sin\theta} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)},$$
$$x'' = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\sin\theta} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}.$$

Pour construire ces lignes, prenons sur l'un des côtés de l'angle θ (*fig.* 7) $OB = b$ et abaissons de D une perpendiculaire sur l'autre côté de cet angle sur laquelle nous prendrons $BC = BD = a$. L'angle $\widehat{OBC} = \frac{\pi}{2} - \theta$ et $\widehat{OBD} = \frac{\pi}{2} + \theta$. Il en résulte que $x' = OC$, $x'' = OD$.

Fig. 7.



5° $$x = \sqrt[4]{a^4 - b^4}.$$

On écrit

$$x = \sqrt[4]{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}.$$

On peut construire à l'aide de triangles rectangles les lignes α et β telles

que

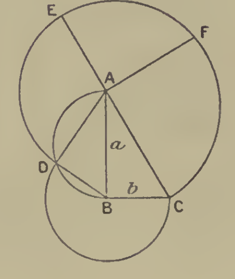
$$\alpha^2 = a^2 - b^2, \qquad \beta^2 = a^2 + b^2,$$

et alors

$$x = \sqrt{\alpha\beta}.$$

Soient $AB = a$, $BC = b$ (*fig.* 8); on a $AC = \beta$. En décrivant une demi-circonférence sur AB comme diamètre et construisant la corde $BD = BC$, AD sera égal à α. Rabattons AD sur le prolongement de AC en AE et décrivons une demi-circonférence sur CE comme diamètre et enfin traçons la droite AF perpendiculaire à CE : $x = AF$.

Fig. 8.



6° $x = a\sqrt[4]{n}$, n étant un nombre positif.

En écrivant

$$x = \sqrt{a\sqrt{na^2}},$$

on construira d'abord $\alpha = \sqrt{na^2}$, en remarquant que

$$\frac{\alpha^2}{a^2} = \frac{n}{1},$$

et ensuite

$$x = \sqrt{a\alpha}.$$

15. *Construire les racines d'une équation du second degré.* — Si l'on désigne par x une ligne inconnue et par a, b des longueurs données, une équation du second degré en x est de l'une des quatre formes

(1) $$x^2 - ax + b^2 = 0,$$

(2) $$x^2 + ax - b^2 = 0,$$

(3) $$x^2 + ax + b^2 = 0,$$

(4) $$x^2 - ax - b^2 = 0.$$

Il suffit de considérer les deux premières équations, puisque les deux autres sont leurs transformées en $-x$.

Considérons d'abord l'équation (1); si ses racines sont réelles, elles sont positives, et si l'une d'elles est x, l'autre est $a - x$; en outre

$$x(a - x) = b^2;$$

on est ramené à construire deux lignes connaissant leur somme et leur moyenne géométrique.

Les racines de l'équation (2) ont des signes contraires; en désignant par x la racine positive, la racine négative est égale à $-(a+x)$; nous construirons x et $a + x$ en remarquant que leur différence est

égale à a et leur moyenne géométrique à b, car l'équation (2) donne

$$x(a+x)=b^2.$$

Nous sommes ainsi ramené à deux problèmes connus.

On peut procéder autrement. La formule de résolution de l'équation (1) étant

$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2},$$

on construira d'abord, à l'aide d'un triangle rectangle,

$$\alpha=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2},$$

et l'on a ensuite

$$x=\frac{a}{2}\pm\alpha.$$

Pour l'équation (2)

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2},$$

on construit successivement

$$\beta=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2},\qquad x=-\frac{a}{2}\pm\beta.$$

En suivant la première marche, on retrouve aisément les formules de résolution.

On ramène au second degré l'équation bicarrée

$$x^4\pm a^2x^2\pm b^4=0.$$

En posant $x^2=ay$, on peut construire y, qui est donné par l'équation

$$y^2\pm ay\pm\frac{b^4}{a^2}=0;$$

on en déduit x en construisant une moyenne proportionnelle.

16. *Problème de Pappus.* — Nous donnerons encore, pour terminer, un exemple de construction élégante due à Pappus. Il s'agit de résoudre le problème suivant :

Mener par un point A *pris sur la bissectrice de l'angle* xOy *une sécante* BC *de longueur donnée* l.

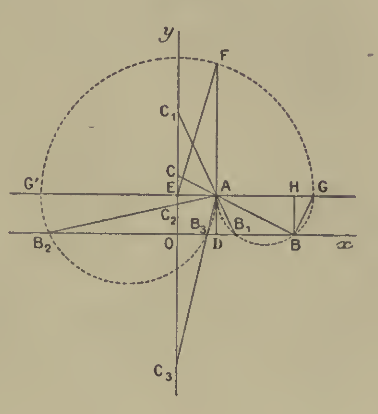
Nous prendrons comme inconnues (*fig.* 9) $DB = x$, $EC = y$ et nous poserons $AD = AE = a$, a désignant la distance du point A aux côtés de l'angle droit. Les deux triangles semblables AEC, ADB donnent

$$(1) \qquad xy = a^2.$$

On a, en outre,

$$(2) \qquad (x+a)^2 + (y+a)^2 = l^2.$$

Fig. 9.



En remplaçant y par $\frac{a^2}{x}$, nous sommes conduit à résoudre l'équation

$$(x+a)^2 + \left(\frac{a^2}{x} + a\right)^2 = l^2,$$

que l'on peut écrire

$$\left(\frac{x}{a} + 1\right)^2 + \left(\frac{a}{x} + 1\right)^2 = \frac{l^2}{a^2};$$

en développant, on trouve

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) - \frac{l^2}{a^2} = 0$$

ou, en prenant comme inconnue auxiliaire la longueur u définie par l'équation

$$\frac{u}{a} = \frac{x}{a} + \frac{a}{x};$$

on a enfin

$$u^2 + 2au - l^2 = 0.$$

En résolvant cette équation, nous obtenons

$$u = -a \pm \sqrt{a^2 + l^2}.$$

Pour construire, prenons $AF = l$, de sorte que $EF = \sqrt{a^2 + l^2}$ et par suite, si la circonférence de centre E et de rayon EF coupe la parallèle à Ox menée par A en G et G′, $AG = \sqrt{a^2 + l^2} - a$ et $AG' = \sqrt{a^2 + l^2} + a$. Cela posé,

$$u = x + \frac{a^2}{x}.$$

Donc, si l'on abaisse BH perpendiculaire sur AG, comme $AH = x$, on a $HG = \frac{a^2}{x}$; il en résulte immédiatement que l'angle ABG est droit. D'après cela, on décrit une demi-circonférence sur AG comme diamètre. Si cette circonférence coupe Ox en B et B_1, les sécantes BC et B_1C_1 répondent à la question. On obtient de même deux autres solutions B_2C_2 et B_3C_3.

EXERCICES.

1. Diviser une droite donnée dans le rapport $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

2. Construire un angle x donné par la formule $\tang x = \frac{ab+cd}{ac-bd}$.

3. Étant donnée la longueur qui représente l'unité linéaire, construire $\sqrt{\frac{3}{7}}$ et $\sqrt[4]{\frac{3}{7}}$.

4. Construire $x = \sqrt{a^2 + b^2 \pm \sqrt{m^4 - n^4}}$.

5. Construire $x = \sqrt[16]{a^{16} + b^{16}}$.

6. Construire la ligne x définie par l'équation $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

7. Étant donné l'angle a, construire l'angle x donné par la relation

$$\cos x \tang\frac{x}{2} = \cos a \tang\frac{a}{2}.$$

(GILBERT.)

8. Construire $x = \sqrt{\frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2}}$.

9. Construire $x = a\sqrt{3 - \sqrt{5}}$.

10. Construire $x = \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}{ab^2 + a^2b + bc^2 + cb^2 + ca^2 + ac^2 + 2abc}$.

11. Résoudre le problème de Pappus en prenant pour inconnue la distance du sommet de l'angle droit à la sécante.

(GERGONNE.)

12. Résoudre le problème de Pappus en prenant pour inconnue la distance du milieu de la sécante au sommet de l'angle droit.

(NEWTON.)

13. Résoudre le problème de Pappus pour un angle quelconque, le point donné étant toujours sur la bissectrice de cet angle.

14. Mener par un point pris dans le plan d'un angle une sécante qui détermine avec les côtés de cet angle un triangle d'aire donnée.

Segments.

17. Considérons une droite indéfinie $x'x$ (*fig.* 10) sur laquelle sont marqués des points A, B, C, ... Nous représenterons par $\overline{\mathrm{AB}}$

le segment de droite décrit par un point se mouvant sur la droite $x'x$ et allant de A vers B; $\overline{BA}$ représente ce segment décrit en sens contraire. Nous conviendrons de regarder comme *positifs* tous les segments décrits dans un sens déterminé, choisi arbitrairement; et comme *négatifs* ceux qui sont décrits en sens contraire.

Fig. 10.

D'après cela,

$$\overline{AB} = -\overline{BA}$$

ou

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

18. Théorème. — *Étant donnés un nombre quelconque de points* A, B, ..., L *situés en ligne droite, on a*

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots + \overline{LA} = 0.$$

La relation est vraie, par définition, pour deux points. Considérons trois points en ligne droite A, B, C. Si B est entre A et C (*fig.* 10), il est évident que

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC};$$

donc, en tenant compte de l'équation

$$\overline{AC} + \overline{CA} = 0,$$

on a

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

De même, si le point A est entre B et C, on a

$$\overline{BA} + \overline{AC} + \overline{CB} = 0,$$

et, en changeant les signes de chaque segment, on retrouve la même relation que dans le premier cas. Même raisonnement quand le point C est entre A et B. La proposition est donc vraie pour trois points. Cela étant, si elle est vraie pour $n-1$ points A, B, ..., K, elle sera encore vraie avec un point de plus, car des relations

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots + \overline{KA} = 0,$$

$$\overline{AK} + \overline{KL} + \overline{LA} = 0,$$

on tire

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots + \overline{KL} + \overline{LA} = 0.$$

La relation précédente est donc vraie quel que soit le nombre des points.

19. *Corollaire.*

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots + \overline{KL} = \overline{AL}.$$

20. *Détermination d'un point sur un axe.* — Soit $x'x$ une droite indéfinie sur laquelle nous marquons un point O. Un point se déplaçant sur cette droite et partant de O peut se diriger dans deux sens opposés : de O vers x ou de O vers x' (*fig.* 11).

Fig. 11.

x' A O M B x

Pour connaître la position d'un point M de la droite $x'x$, il suffit de connaître le segment $\overline{OM}$ en grandeur et sens. Nous regarderons comme positifs les segments dirigés dans le sens de O vers x et comme négatifs ceux qui sont dirigés de O vers x' et nous nommerons *abscisse* du point M la valeur algébrique du segment $\overline{OM}$. On emploie généralement la lettre x pour désigner une abscisse et l'on pose $x = \overline{OM}$. Si l'on suppose que x varie de o à $+\infty$, le point M décrit la *demi-droite positive* Ox; si x varie de o à $-\infty$, le point M décrit la *demi-droite négative* Ox'; le point O se nomme *l'origine des abscisses.* On peut prendre pour origine un point quelconque de la droite donnée.

21. *Calcul d'un segment, connaissant les abscisses de ses deux extrémités.* — Soient A et B deux points quelconques situés sur $x'x$ (*fig.* 11) et dont les abscisses sont respectivement x_1, x_2. On a

$$\overline{AB} + \overline{BO} + \overline{OA} = 0$$

ou

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

Donc

$$\overline{AB} = x_2 - x_1.$$

Le point A se nomme *l'origine* et le point B *l'extrémité* du segment $\overline{AB}$; donc : *un segment a pour mesure l'abscisse de son extrémité moins l'abscisse de son origine* ou encore : *l'abscisse finale moins l'abscisse initiale.*

22. Théorème. — *Étant donnés quatre points* A, B, C, D *en ligne droite, on a*

$$\overline{AC} \times \overline{BD} = \overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{AD} \times \overline{BC}.$$

En effet, prenons le point A pour origine des abscisses et soient x_1, x_2, x_3 les abscisses des points B, C, D; l'identité à démontrer revient à celle-ci, qui est évidente

$$x_2(x_3 - x_1) = x_1(x_3 - x_2) + x_3(x_2 - x_1).$$

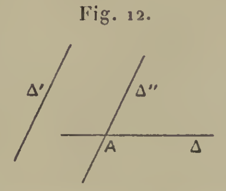
Angles.

23. *Orientation d'un plan.* — Considérons un plan et une droite Δ située dans ce plan. On peut faire tourner Δ autour d'un de ses points dans deux sens différents. Nous choisirons l'un de ces deux sens que nous nommerons *sens direct,* le sens contraire étant appelé *sens inverse.* On dit qu'un plan est *orienté* quand on connaît le sens direct relatif à ce plan. Dans ce qui va suivre nous supposerons toujours le plan orienté.

Tout angle décrit dans le *sens direct* sera regardé comme *positif* et tout angle décrit dans le sens inverse comme *négatif.*

24. *Angle de deux droites.* — Considérons deux droites Δ, Δ′ situées dans un même plan. Par un point quelconque A de Δ (*fig.* 12), menons une droite Δ″ parallèle à Δ′ et faisons tourner Δ autour de A, dans le sens direct, jusqu'à ce que Δ vienne coïncider avec Δ″; soit α l'angle compris entre 0° et 180° décrit par Δ dans ce mouvement de rotation. Il est clair que si Δ continue à tourner dans le même sens, elle ne coïncidera de nouveau avec Δ″ qu'après une nouvelle rotation égale à un multiple de π, de sorte que l'angle total décrit par Δ, dans le sens direct, quand elle sera venue coïncider avec Δ″ successivement 1, 2, ..., k fois, sera égal à $\alpha + k\pi$; et réciproquement si Δ décrit, en tournant dans le sens direct autour de A, un angle égal à $\alpha + k\pi$, k étant un entier quelconque, la position finale de Δ sera Δ″. Faisons maintenant tourner Δ dans le sens inverse d'un angle ayant pour valeur absolue $\pi - \alpha$; on voit, comme dans le premier cas, que ce n'est qu'après une rotation ayant une valeur absolue de la forme $k\pi - \alpha$, k étant entier, que Δ coïncidera avec Δ″; mais la rotation s'effectuant dans le sens inverse est regar-

Fig. 12.



dée comme négative; sa valeur algébrique est donc $\alpha - k\pi$; donc en résumé, quel que soit le sens de la rotation, Δ devient parallèle à Δ' après une rotation dont la valeur algébrique est de la forme $\alpha + k\pi$, k étant un entier positif ou négatif.

On nomme angle de Δ' avec Δ et l'on représente par la notation (Δ, Δ') l'un quelconque des angles, positifs ou négatifs, dont il faut faire tourner Δ autour d'un quelconque de ses points, dans le plan donné, pour l'amener à être parallèle à Δ'. Cet angle n'est défini qu'à un multiple près de π, de sorte que

$$(\Delta, \Delta') = \alpha + k\pi.$$

Il est clair que l'on peut remplacer α par tout autre angle qui en diffère d'un multiple de π.

Enfin, au lieu de faire tourner Δ elle-même, on peut évidemment faire tourner une parallèle à Δ, soit Δ_1, jusqu'à ce que Δ_1 devienne parallèle à Δ'.

25. Théorème. — *Un nombre quelconque de droites* A, B, ..., L *étant situées dans un plan, on a*

$$(A, B) + (B, C) + \ldots + (L, A) = k\pi,$$

k étant un entier positif ou négatif.

En effet, faisons tourner *dans le sens direct* une droite Δ du plan autour d'un de ses points, cette droite étant, dans sa position initiale, parallèle à A. Lorsque cette droite sera devenue parallèle à B, elle aura décrit un angle égal à (A, B), à un multiple près de π; la rotation continuant dans le même sens, quand Δ sera devenue parallèle à C, elle aura décrit, dans cette seconde phase, un angle égal à (B, C) à un multiple près de π et l'angle total décrit depuis sa position initiale sera, toujours à un multiple près de π, égal à (A, B) + (B, C), et ainsi de suite. Quand Δ aura repris sa position initiale après être devenue successivement parallèle aux droites B, C, ..., L, l'angle total décrit par Δ sera égal à la somme des angles qu'elle aura décrits successivement en passant d'une position à la suivante, puisque toutes les rotations sont effectuées dans le même sens; la droite Δ aura donc tourné, à un multiple près de π, d'un angle égal à

$$(A, B) + (B, C) + \ldots + (L, A).$$

Or, la droite Δ, ayant repris sa position initiale, a décrit un angle égal à un multiple de π; donc on peut poser

$$(A, B)+(B, C)+\ldots+(L, A)=k\pi,$$

k étant un entier, positif ou négatif, d'ailleurs complètement arbitraire.

26. *Corollaire.* — Soient A, B, C trois droites situées dans un plan; on a

$$(A, B)+(B, C)+(C, A)=k\pi,$$

donc

$$(A, B)=(C, B)-(C, A)+k\pi.$$

Si l'on nomme α et β les angles que deux droites A et B font respectivement avec une droite $x'x$ et V l'angle (A, B), on a

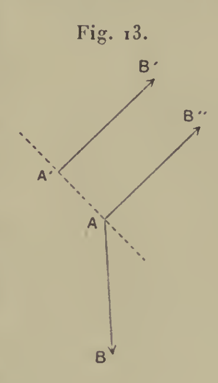
$$V=\beta-\alpha+k\pi$$

et, par suite, tang V est déterminée sans ambiguïté par la formule

$$\operatorname{tang} V=\operatorname{tang}(\beta-\alpha).$$

27. *Angle de deux demi-droites.* — Soient (*fig.* 13) $\overline{AB}$ et $\overline{A'B'}$ deux demi-droites situées dans un même plan; menons par le point A une demi-droite $\overline{AB''}$ parallèle à $\overline{AB'}$ et de même sens (c'est-à-dire telle que les droites A'B' et AB'' soient parallèles et que les points B' et B'' soient situés d'un même côté par rapport à la droite AA'). Si, en faisant tourner $\overline{AB}$ autour de A dans un sens quelconque, cette demi-droite vient coïncider avec $\overline{AB''}$, ce n'est qu'en décrivant, à partir de cette seconde position, un angle égal à un multiple de 2π dans un sens quelconque, que $\overline{AB}$ reprendra la position $\overline{AB''}$. On en conclut, en raisonnant comme plus haut (24) que, si α est l'un quelconque des angles positifs ou négatifs dont il faut faire tourner $\overline{AB}$ pour lui faire prendre la position $\overline{AB''}$, on obtiendra le même résultat en faisant tourner $\overline{AB}$ d'un angle égal à $\alpha+2k\pi$. On nomme angle de $\overline{A'B'}$ avec $\overline{AB}$ l'un quelconque de ces angles, et l'on pose

Fig. 13.



$$(\overline{AB}, \overline{A'B'})=\alpha+2k\pi.$$

On peut remplacer l'une de ces demi-droites par une demi-droite parallèle et de même sens.

28. *Si* $\overline{A}, \overline{B}, \ldots, \overline{L}$ *désignent des demi-droites situées dans un même plan,*

$$(\overline{A}, \overline{B}) + (\overline{B}, \overline{C}) + \ldots + (\overline{L}, \overline{A}) = 2k\pi.$$

Même démonstration que pour des droites.

29. En particulier, soient $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ deux demi-droites et α, β les angles qu'elles font avec la demi-droite $\overline{OX}$; on a

$$(\overline{OA}, \overline{OB}) = (\overline{OX}, \overline{OB}) - (\overline{OX}, \overline{OA}) + 2k\pi,$$

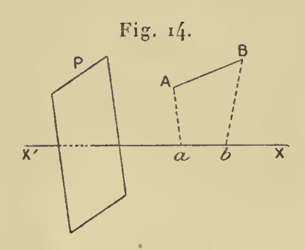
donc

$$\cos(\overline{OA}, \overline{OB}) = \cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha - \beta).$$

Théorie des projections sur un axe.

30. *Définitions.* — Étant donnés une droite X′X et un plan P (*fig.* 14), on appelle *projection* d'un point A sur l'axe X′X le point de rencontre a de cet axe et du plan mené par A parallèlement au plan P. La droite Aa est celle des parallèles au plan P qui rencontre l'axe; on la nomme la *projetante* du point A. Lorsque le plan P est perpendiculaire à l'axe, la projetante Aa est la perpendiculaire abaissée de A sur X′X. On dit alors que la projection est *orthogonale*.

Fig. 14.



On nomme *projection* d'un segment $\overline{AB}$ le segment $\overline{ab}$ qui joint les projections a, b des extrémités de $\overline{AB}$. On choisit sur X′X le sens des segments positifs, soit $\overline{X'X}$ pour fixer les idées. Nous représenterons la projection d'un segment $\overline{AB}$ sur un axe X′X par la notation $(\overline{AB})_x$ ou $\overline{AB}_x$.

Les segments $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$ ont des projections ab, ba égales et de signes contraires.

On appelle *projection* d'une ligne brisée $A_1 A_2 \ldots A_n$ la *somme*

algébrique des projections des segments consécutifs $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$.

31. Théorème. — *La projection d'un contour polygonal fermé, sur un axe quelconque, est égale à zéro.*

Soit en effet un polygone quelconque, plan ou gauche, $A_1A_2\ldots A_n$; désignons par a_1, a_2, ..., a_n les projections des sommets consécutifs A_1, A_2, ..., A_n sur un axe $X'X$; par définition, la projection du contour $A_1A_2\ldots A_nA_1$ sur l'axe $X'X$ est égale à la somme

$$\overline{a_1a_2}+\overline{a_2a_3}+\ldots+\overline{a_{n-1}a_n}+\overline{a_na_1},$$

c'est-à-dire égale à zéro.

32. Corollaire. — *Quand deux contours polygonaux ont mêmes extrémités, leurs projections sur un même axe sont égales.*

En effet, considérons deux contours $AA_1A_2\ldots A_nB$ et $AB_1B_2\ldots B_pB$ dont les projections sur $X'X$ sont respectivement

$$\overline{aa_1}+\overline{a_1a_2}+\ldots+\overline{a_nb} \quad \text{et} \quad \overline{ab_1}+\overline{b_1b_2}+\ldots+\overline{b_pb}.$$

Le contour polygonal $AA_1\ldots A_nBB_pB_{p-1}\ldots B_1A$ étant fermé, sa projection sur $X'X$ est nulle : donc

$$\overline{aa_1}+\overline{a_1a_2}+\ldots+\overline{a_nb}+\overline{bb_p}+\overline{b_pb_{p-1}}+\ldots+\overline{b_1a}=0.$$

Mais cette égalité peut être remplacée par celle-ci

$$\overline{aa_1}+\overline{a_1a_2}+\ldots+\overline{a_nb}=\overline{ab_1}+\overline{b_1b_2}+\ldots+\overline{b_{p-1}b_p}+\overline{b_pb},$$

ce qui démontre la proposition.

En particulier, la projection d'une brisée polygonale $A_1A_2\ldots A_n$ est égale à la projection du segment A_1A_n qui joint ses extrémités.

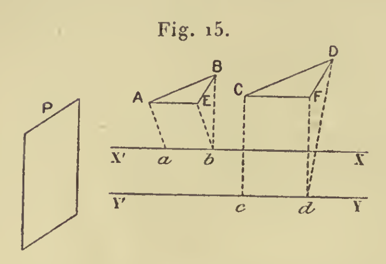
$\overline{A_1A_n}$ se nomme la *résultante* du contour polygonal $A_1A_2\ldots A_n$. On peut donc énoncer encore cette proposition : *La projection d'un contour polygonal sur un axe est égale à celle de sa résultante, sur le même axe.*

33. Théorème. — *Le rapport de deux segments parallèles est*

égal au rapport de leurs projections faites parallèlement à un même plan P, *sur un même axe ou sur deux axes parallèles.*

Soient X′X et Y′Y deux axes parallèles et $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ deux segments parallèles (*fig.* 15). Construisons la projection $\overline{ab}$ de $\overline{AB}$ sur X′X et la projection $\overline{cd}$ de $\overline{CD}$ sur Y′Y. Menons par A et par C des parallèles à X′X et soient E et F les points où ces droites rencontrent les plans parallèles au plan P menés par B et D et enfin traçons BE, Eb; DF, Fd. Les figures AEab et CFcd sont des parallélogrammes et en outre BE et DF sont des droites parallèles. On en conclut que les triangles ABE, CDF sont semblables, de sorte que

Fig. 15.



$$\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CF} = \frac{ab}{cd}.$$

De plus, si les segments $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont de même sens ou de sens contraires, leurs projections $\overline{ab}$ et $\overline{cd}$ sont évidemment aussi de même sens ou de sens contraires, respectivement.

En particulier, si $\overline{AB} = \overline{CD}$, on aura aussi $\overline{ab} = \overline{cd}$.

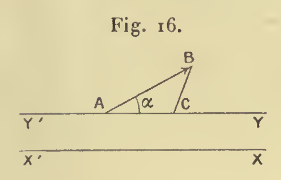
La démonstration subsiste si les projections se font sur un même axe et si les segments sont portés sur une même droite.

34. *Corollaire.* — Les projections de deux contours polygonaux ayant mêmes extrémités, faites sur deux axes parallèles, sont égales.

35. *Mesure de la projection orthogonale d'un segment.*

1° Soit AB un segment qu'il s'agit de projeter sur X′X (*fig.* 16). Menons par A la parallèle Y′Y à X′X et abaissons du point B la perpendiculaire BC à cette parallèle. La projection orthogonale de AB sur X′X est égale à AC.

Fig. 16.



Nommons l la longueur absolue de AB et soit α l'angle que la demi-droite AB fait avec la demi-droite AY, cet angle étant décrit dans le plan BAY, le sens positif de rotation étant d'ailleurs quelconque.

La définition du cosinus donne

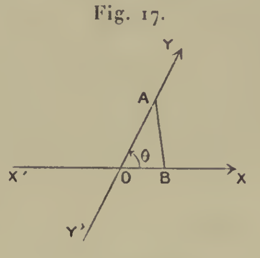
$$\cos\alpha = \frac{x}{l},$$

x étant l'abscisse du point C, l'origine étant au point A et la direction des x positifs étant celle de la demi-droite $\overline{\text{AY}}$, c'est-à-dire du segment $\overline{\text{X}'\text{X}}$. On a donc

$$\overline{\text{AB}_x} = l\cos(\overline{\text{AB}}, \overline{\text{X}'\text{X}}).$$

2° Supposons en second lieu que l'on ait à considérer des segments parallèles à une même droite Y′Y que nous pourrons toujours supposer menée par un point O de X′X (*fig.* 17). Nous pouvons remplacer ces segments par des segments de mêmes longueurs et de mêmes sens respectivement et portés sur Y′Y à partir du point O. Soit $\overline{\text{OA}}$ l'un de ces segments et soit $\overline{\text{OB}}$ sa projection sur X′X. Enfin supposons que le sens positif des segments comptés sur Y′Y soit celui de $\overline{\text{OY}}$ et que le sens positif des projections soit celui de $\overline{\text{OX}}$. Désignons par θ l'angle XOY, compris entre o et π. Je dis que, si l'on pose $\overline{\text{OA}} = y$, $\overline{\text{OB}} = x$, on a

Fig. 17.



$$x = y\cos\theta.$$

En effet, soit l la valeur absolue du segment $\overline{\text{OA}}$ et supposons d'abord $y > 0$. Alors

$$x = l\cos\theta,$$

puisque $\overline{\text{OA}}$ fait avec $\overline{\text{OX}}$ un angle égal à θ; et, comme $y = l$, on peut écrire

$$x = y\cos\theta.$$

Si, au contraire, on suppose $y < 0$, $\overline{\text{OA}}$ fait avec $\overline{\text{OX}}$ un angle égal à $\theta + \pi$ et $y = -l$; on a donc

$$x = l\cos(\theta+\pi) = (-y)\times(-\cos\theta) = y\cos\theta :$$

donc, dans tous les cas,

$$\overline{\text{OA}_x} = \overline{\text{OA}}\cos(\overline{\text{OX}}, \overline{\text{OY}}).$$

36. *Mesure de la projection oblique d'un segment.* — Soient A, M, B trois points en ligne droite (*fig.* 18), dont les projections, faites parallèlement à un même plan P sur l'axe X'X, sont a, m, b; on a (33)

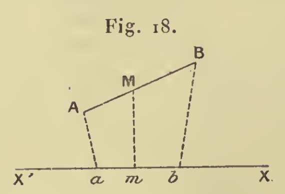
$$\frac{\overline{am}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{\mathrm{AM}}}{\overline{\mathrm{AB}}},$$

d'où

$$\overline{am} = \frac{\overline{\mathrm{AM}}}{\overline{\mathrm{AB}}} \times \overline{ab}.$$

Supposons que le segment $\overline{\mathrm{AB}}$ soit pris pour unité; on voit que le rapport $\frac{\overline{\mathrm{AM}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ est, en grandeur et signe, la mesure du segment $\overline{\mathrm{AM}}$. On peut donc dire que *la projection d'un segment est égale au produit de la projection du segment de même direction pris pour unité, multipliée par le nombre positif ou négatif qui mesure le segment que l'on projette.*

Fig. 18.

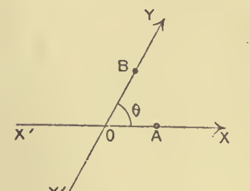


37. *Définitions.* — Étant donnés deux segments $\overline{\mathrm{OA}}$ et $\overline{\mathrm{OB}}$ de longueurs absolues a, b et faisant entre eux un angle égal à α, nous appellerons *produit géométrique* de ces deux segments, et nous représenterons par la notation $\bar{a}\,\bar{b}$, le produit $ab\cos\alpha$.

Cela posé, si l'on considère deux axes X'X, Y'Y passant par O et faisant un angle θ, de sorte que $\widehat{\mathrm{XOY}} = \theta$ (*fig.* 19); si l'on prend sur X'X un point A ayant pour abscisse x et sur Y'Y un point B ayant pour ordonnée y, je dis que, si l'on pose $\mathrm{OA} = a$, $\mathrm{OB} = b$, $\widehat{\mathrm{AOB}} = \alpha$, on a, dans tous les cas,

$$xy\cos\theta = ab\cos\alpha.$$

Fig. 19.



Cela est évident si $x = +a$, $y = +b$ et aussi quand $x = -a$ et $y = -b$, car dans ces deux cas $\alpha = \theta$. Or, quand $x = -a$ et $y = +b$ ou quand $x = +a$ et $y = -b$, on a $\alpha = \pi - \theta$; donc la proposition est établie.

Nous étendrons encore la définition précédente à deux segments quelconques $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ et nous représenterons par la notation $\overline{AB}\,\overline{CD}$ le produit

$$AB\,CD\cos(\overline{AB}, \overline{CD}).$$

Fig. 20.



On dit alors que $\overline{AB}\,\overline{CD}$ est le produit des deux *vecteurs* $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.

Lorsqu'un segment $\overline{A_1A_n}$ (*fig.* 20) est la résultante d'une ligne polygonale $A_1A_2\ldots A_n$, nous écrirons, pour abréger,

$$\overline{A_1A_n} = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n}.$$

38. Théorème. — *Soient $\overline{a}$ et $\overline{b}$ deux segments qui sont respectivement les résultantes des segments $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, ..., $\overline{a_n}$ et $\overline{b_1}$, $\overline{b_2}$, ..., $\overline{b_p}$, de sorte que*

$$\overline{a} = \overline{a_1} + \overline{a_2} + \ldots + \overline{a_n}, \qquad \overline{b} = \overline{b_1} + \overline{b_2} + \ldots + \overline{b_p},$$

on a

$$\overline{a}\,\overline{b} = \Sigma\,\overline{a_h}\,\overline{b_k},$$

la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs de h depuis 1 jusqu'à n et de k depuis 1 jusqu'à p.

En effet, projetons orthogonalement sur $\overline{b}$ le segment $\overline{a}$; la projection de $\overline{a}$ est égale à la somme des projections de ses composantes $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, ..., $\overline{a_n}$; on a donc

$$a\cos(\overline{a}, \overline{b}) = a_1\cos(\overline{a_1}, \overline{b}) + a_2\cos(\overline{a_2}, \overline{b}) + \ldots + a_n\cos(\overline{a_n}, \overline{b})$$

ou, en multipliant les deux membres par b,

$$ab\cos(\overline{a}, \overline{b}) = a_1 b\cos(\overline{a_1}, \overline{b}) + a_2 b\cos(\overline{a_2}, \overline{b}) + \ldots + a_n b\cos(\overline{a_n}, \overline{b});$$

on aura de même, puisque b est la résultante de $\overline{b_1}$, $\overline{b_2}$, ..., $\overline{b_p}$,

$$a_1 b\cos(\overline{a_1}, \overline{b}) = a_1 b_1\cos(\overline{a_1}, \overline{b_1}) + a_1 b_2\cos(\overline{a_1}, \overline{b_2}) + \ldots + a_1 b_p\cos(\overline{a_1}, \overline{b_p}),$$

$$a_2 b\cos(\overline{a_2}, \overline{b}) = a_2 b_1\cos(\overline{a_2}, \overline{b_1}) + a_2 b_2\cos(\overline{a_2}, \overline{b_2}) + \ldots + a_2 b_p\cos(\overline{a_2}, \overline{b_p}).$$

....,

$$a_n b\cos(\overline{a_n}, \overline{b}) = a_n b_1\cos(\overline{a_n}, \overline{b_1}) + a_n b_2\cos(\overline{a_n}, \overline{b_2}) + \ldots + a_n b_p\cos(\overline{a_n}, \overline{b_p}).$$

En ajoutant membre à membre ces $n+1$ égalités et réduisant, on a

$$ab\cos(\overline{a}, \overline{b}) = \Sigma a_h b_k \cos(\overline{a_h}, \overline{b_k})$$

ou

$$\overline{ab} = \Sigma \overline{a_h}.\overline{b_k}.$$

39. *Corollaire.* — Si $\overline{a} = \overline{b}$, en posant dans la formule précédente $\overline{a_h} = \overline{b_h}$, on aura

$$\overline{aa} = \Sigma \overline{a_h}.\overline{a_k}$$

ou

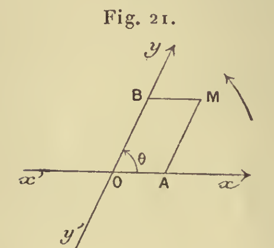
$$a^2 = \Sigma a_h^2 + 2\Sigma a_h a_k \cos(\overline{a_h}, \overline{a_k}).$$

Systèmes de coordonnées.

Coordonnées rectilignes.

40. Soient (*fig.* 21) $x'x$, $y'y$ deux droites qui se coupent au point O. Par un point M pris dans le plan de ces deux droites, menons une parallèle à $y'y$ qui rencontre $x'x$ en A, et une parallèle à $x'x$ qui rencontre $y'y$ en B. Le point M est déterminé dès que l'on connaît les deux segments $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$.

Fig. 21.



Nous conviendrons une fois pour toutes que le sens positif des segments comptés sur $x'x$ sera celui de x' vers x, et sur $y'y$, de y' vers y. En outre, si θ est l'angle xOy, nous supposerons le plan orienté de façon que la demi-droite Ox vienne coïncider avec Oy quand on la fait tourner d'un angle égal à θ dans le sens direct; sur la figure précédente, le sens direct est indiqué par la flèche. Cela étant, nous appellerons *abscisse* de M la valeur algébrique du segment $\overline{OA}$ et *ordonnée* de M celle de $\overline{OB}$; nous poserons

$$x = \overline{OA}, \qquad y = \overline{OB}.$$

x et y sont les *coordonnées* de M, dans le système rectiligne Ox, Oy. Si a et b sont deux nombres positifs ou négatifs, le système d'équations $x = a$, $y = b$ détermine un point, et un seul, que l'on obtient en prenant sur $x'x$ le point A tel que $\overline{OA} = a$, et sur $y'y$ le

point B tel que $\overline{OB} = b$, puis menant par A et B des parallèles aux axes $x'x$, $y'y$.

On doit remarquer que $\overline{AM} = y$ et $\overline{BM} = x$; le contour $\overline{OAM}$ se nomme le *contour des coordonnées* de M. Nous représenterons un point M ayant pour coordonnées a, b par la notation $M(a, b)$, la première lettre entre parenthèses désignant toujours l'abscisse.

Quand $\theta = 90°$, on dit que les coordonnées sont *rectangulaires;* dans le cas contraire, elles sont *obliques*.

On donne aux coordonnées rectilignes le nom de coordonnées *cartésiennes,* du nom de Descartes qui s'en est servi, le premier, dans sa *Géométrie*.

L'axe $x'x$ se nomme *l'axe des* x et $y'y$ *l'axe des* y.

Pour définir un système d'axes il suffit de donner les demi-axes positifs Ox, Oy.

41. Tous les points situés sur une parallèle à l'axe des y ont évidemment des abscisses égales, et réciproquement tous les points dont l'abscisse a une valeur déterminée a sont sur une parallèle à l'axe des y. On dit, pour cette raison, que l'équation $x = a$ représente une parallèle à l'axe des y. En particulier, l'axe des y a pour équation $x = 0$.

Pareillement $y = b$ est l'équation d'une parallèle à l'axe des x, et $y = 0$ est l'équation de l'axe des x. Remarquons enfin que les coordonnées du point O sont $x = 0$, $y = 0$; ce point se nomme l'*origine* des coordonnées.

Coordonnées polaires.

42. Soit OX (*fig.* 22) une demi-droite tracée dans un plan orienté. Pour fixer la position d'un point M de ce plan, il suffit de donner la distance OM et l'angle que la demi-droite OM fait avec OX. Posons

$$\rho = OM, \qquad \omega = \widehat{XOM}.$$

Fig. 22.

On peut supposer $\rho > 0$ et ω compris entre 0 et 2π; mais il est préférable de supprimer ces restrictions. Considérons la droite indéfinie R'R qui passe par les deux points O et M et fixons sur cette droite le *sens positif;*

supposons que ce sens soit celui de la demi-droite OR. Le point M sera déterminé si l'on connaît sa position sur l'axe R'R et la position de OR. Soit α l'un quelconque des angles que OR fait avec OX, et soit a la valeur algébrique du segment $\overline{OM}$ compté sur l'axe R'R; les coordonnées polaires du point M sont

$$\rho = a, \qquad \omega = \alpha + 2k\pi. \tag{1}$$

Si, au lieu de OR, on choisit OR' pour demi-axe positif, le point qui a pour coordonnées

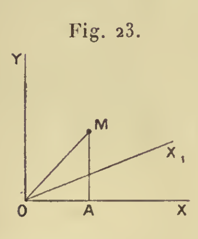
$$\rho = -a, \qquad \omega = \alpha + 2k'\pi + \pi \tag{2}$$

coïncide avec M. Ce point a donc deux infinités de coordonnées polaires définies par les formules (1) et (2), dans lesquelles k et k' sont des entiers arbitraires.

Le point O se nomme *le pôle* et OX *l'axe polaire*.

43. *Relations entre les coordonnées rectangulaires et les coordonnées polaires de même origine.* — Soient OX, OY deux axes rectangulaires et OX_1 un axe polaire faisant avec OX un angle donné α (*fig.* 23) et supposons que le sens dans lequel les angles ω sont comptés positivement soit le sens direct défini par le système OX, OY. Soient ρ, ω les coordonnées polaires de M et x, y ses coordonnées rectangulaires. Le segment $\overline{OM}$ est compté positivement dans la direction qui fait avec OX un angle égal à $\omega + \alpha$, et avec OY un angle égal à $\frac{\pi}{2} - (\omega + \alpha)$, à un multiple près de 2π. Donc, en projetant sur OX, puis sur OY, le contour OAM et sa résultante OM, on a

Fig. 23.



$$x = \rho \cos(\omega + \alpha), \qquad y = \rho \sin(\omega + \alpha),$$

d'où

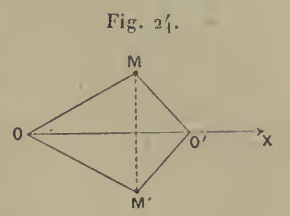
$$x^2 + y^2 = \rho^2, \qquad \operatorname{tang}(\omega + \alpha) = \frac{y}{x}.$$

Autres systèmes de coordonnées.

44. *Système bivectoriel.* — On peut déterminer la position d'un point M en donnant ses distances u, v à deux points fixes O, O' (*fig.* 24).

A chaque système de valeurs positives de u, v telles que, a désignant la distance OO′, on puisse construire un triangle ayant pour côtés u, v, a, correspondent deux points M, M′ symétriques par rapport à OO′; par conséquent, ce système de coordonnées ne peut convenir qu'à une figure qui admet la droite OO′ comme axe de symétrie.

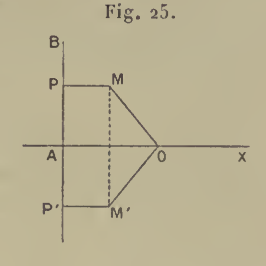
Fig. 24.



45. *Système biangulaire.* — Le point M est encore déterminé si l'on se donne les angles ω, ω′ que les rayons OM, O′M font respectivement avec deux axes polaires ayant pour origines O et O′. On peut prendre, par exemple, comme axes polaires les demi-droites OX, O′X dirigées de O vers O′ (*fig.* 24). Il n'est pas nécessaire d'ailleurs que les angles ω et ω′ soient comptés positivement dans le même sens.

46. *Système pôle-directrice.* — Étant donnés (*fig.* 25) un point O appelé *pôle* et une droite AB, appelée *directrice,* un point quelconque M est déterminé si l'on connaît ses distances au pôle et à la directrice. Il convient de donner un signe au segment $\overline{PM}$. Déterminons sur la perpendiculaire abaissée de O sur AB une demi-droite OX; $\overline{PM}$ sera regardé comme positif s'il est dirigé dans le même sens que $\overline{OX}$ et comme négatif s'il est dirigé en sens contraire; posons $OM = u$, $\overline{PM} = v$, u étant positif. S'il existe un point M tel que $u = a$, $v = b$, le point symétrique M′ aura les mêmes coordonnées u et v que M : ce système ne peut donc convenir qu'à une figure ayant OX pour axe de symétrie.

Fig. 25.

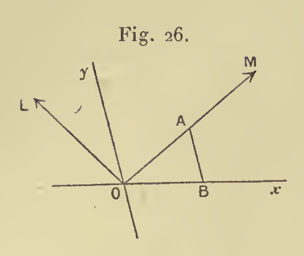


Relations entre la longueur d'un segment issu de l'origine, les angles qu'il fait avec deux axes de coordonnées rectilignes, les coordonnées de son extrémité, etc.

47. Soient Ox, Oy deux axes et OM une demi-droite issue de l'origine. Cette demi-droite est déterminée en direction et sens,

si l'on connaît les coordonnées a, b d'un quelconque de ses points, A par exemple. Ces coordonnées se nomment coefficients ou paramètres directeurs de OM; on dit aussi que le point A est un *point directeur*. Quand on suppose que la longueur du segment OA est prise pour unité, les coordonnées du point A sont appelées les *paramètres principaux* et le point A, *point directeur principal*.

Fig. 26.



Nous appellerons α l'un quelconque des angles de $\overline{OM}$ avec $\overline{Ox}$ et β l'un quelconque des angles de $\overline{Oy}$ avec $\overline{OM}$.

48. *Relations entre les angles* α, β, θ. — La formule

$$(Ox, OM)+(OM, Oy)+(Oy, Ox)=2k\pi$$

donne $\alpha+\beta=\theta+2k\pi$.

On peut choisir pour α et β des déterminations telles que $\alpha+\beta=\theta$.

On déduit de là une relation importante. Menons une demi-droite OL, et appelons λ l'angle (Ox, OL). Projetons sur OL le contour OBA des coordonnées du point A, et sa résultante OA. On obtient ainsi

$$a\cos\lambda+b\cos(\lambda-\theta)=l\cos(\lambda-\alpha). \tag{1}$$

En donnant à λ successivement les valeurs o, θ, α, on trouve

$$a+b\cos\theta=l\cos\alpha, \tag{2}$$

$$a\cos\theta+b=l\cos\beta, \tag{3}$$

$$a\cos\alpha+b\cos\beta=l. \tag{4}$$

Par hypothèse a, b, l ne sont pas nuls tous les trois, car le point A ne coïncide pas avec l'origine; il en résulte que le déterminant des coefficients de a, b, l dans les équations précédentes est nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \cos\alpha \\ \cos\theta & 1 & \cos\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

ou, en développant,

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\theta=\sin^2\theta. \tag{6}$$

Lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, cette relation se réduit à $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$. Mais, dans ce cas, $\cos\beta = \sin\alpha$; on retrouve donc une relation connue.

49. *Réciproquement,* si deux nombres p, q et l'angle des axes θ, vérifient la relation

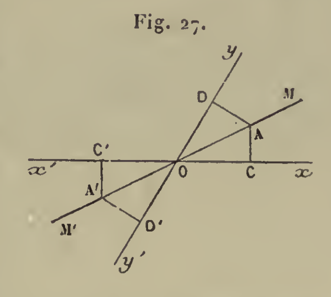
$$p^2 + q^2 - 2pq\cos\theta = \sin^2\theta, \tag{7}$$

il y a une demi-droite OM telle que

$$\cos(Ox, OM) = p, \qquad \cos(OM, Oy) = q.$$

En effet, prenons sur Ox un point C tel que $\overline{OC} = p$ et sur Oy un point D tel que $\overline{OD} = q$ (*fig.* 27) et menons CA et DA respectivement perpendiculaires à Ox et Oy; ces droites se coupent en un point A; je dis que la demi-droite OM obtenue en joignant le point O au point A satisfait à la condition demandée. En effet, si l'on nomme α et β les angles (Ox, OM) et (OM, Oy), on a, en remarquant que $\overline{OC}$ est la projection orthogonale de $\overline{OA}$ sur Ox et $\overline{OD}$ la projection orthogonale du même segment $\overline{OA}$ sur Oy : $p = l\cos\alpha$, $q = l\cos\beta$; en portant ces valeurs dans l'équation (7) et tenant compte de l'équation (6) on obtient $l^2 = 1$, c'est-à-dire $l = 1$, puisque l désigne une longueur absolue; donc $\cos\alpha = p$, $\cos\beta = q$, ce qui démontre la proposition.

Fig. 27.



50. *Définition.* — Les cosinus des angles α, β se nomment les *cosinus directeurs* de la demi-droite OM.

51. Problème. — *Trouver une demi-droite dont les cosinus directeurs soient proportionnels à deux nombres donnés u, v.*

Si nous posons $\cos\alpha = \lambda u$, $\cos\beta = \lambda v$, il s'agit de déterminer λ de façon que $\cos\alpha$ et $\cos\beta$ vérifient la relation fondamentale; ce qui donne

$$\lambda^2(u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta) = \sin^2\theta,$$

d'où

$$\lambda = \frac{\varepsilon \sin\theta}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Si l'on pose

$$R = +\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta},$$

on obtient deux solutions

$$(8)\qquad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{u\sin\theta}{R}, & \cos\beta = \dfrac{v\sin\theta}{R}, \\ \cos\alpha' = \dfrac{-u\sin\theta}{R}, & \cos\beta' = \dfrac{-v\sin\theta}{R}, \end{cases}$$

auxquelles correspondent deux demi-droites opposées, comme on le vérifie d'ailleurs au moyen de la construction indiquée au n° 49, puisque aux deux systèmes p, q et $-p$, $-q$ correspondent évidemment deux points A et A' symétriques par rapport à l'origine (*fig.* 27).

Il y a donc toujours une droite et une seule, ou deux demi-droites opposées, faisant avec les axes Ox, Oy des angles dont les cosinus sont proportionnels à deux nombres donnés.

Quand $\theta = \frac{\pi}{2}$, les formules se simplifient et deviennent

$$\cos\alpha = \frac{\varepsilon u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{\varepsilon v}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

52. *Connaissant a, b, déterminer α et β.*

En posant $\lambda = \frac{\pi}{2} + \alpha$, la formule (1) devient

$$-a\sin\alpha + b\sin(\theta - \alpha) = 0,$$

d'où

$$(9)\qquad \frac{b}{a} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)}.$$

On en tire

$$(10)\qquad \tan\alpha = \frac{b\sin\theta}{a + b\cos\theta}.$$

On a de même

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\beta}{\sin(\theta - \beta)}$$

et

$$\tan\beta = \frac{a\sin\theta}{b + a\cos\theta}.$$

Lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\tan\alpha = \frac{b}{a}.$$

Dans le cas général, la formule (9) peut être transformée de la manière suivante

$$\frac{\sin\alpha - \sin(\theta - \alpha)}{\sin\alpha + \sin(\theta - \alpha)} = \frac{b - a}{b + a},$$

ce qui donne

$$\operatorname{tang}\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{b - a}{b + a}\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}.$$

Cette formule permet de calculer $\alpha - \frac{\theta}{2}$ à l'aide des tables de logarithmes. On déduit encore de la formule (1), pour $\lambda = \frac{\pi}{2}$

(11) $$l\sin\alpha = b\sin\theta$$

et pour $\lambda = \frac{\pi}{2} + \theta$,

(12) $$l\sin\beta = a\sin\theta.$$

53. *Carré de la distance de l'origine à un point dont on connaît les coordonnées.* — En multipliant les deux membres des équations (2), (3), (4) respectivement par a, b, l et ajoutant, on obtient

$$l^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$$

et, si $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$l^2 = a^2 + b^2.$$

On obtient immédiatement ce résultat en remarquant que

$$\overline{l} = \overline{a} + \overline{b},$$

d'où

$$l^2 = (\overline{a} + \overline{b})^2.$$

Le polynome $a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$ ne s'annule pour aucun système de valeurs réelles de a et b autres que $a = 0$, $b = 0$.

54. *Angle de deux demi-droites dont on connaît les paramètres directeurs.* — Soient $\overline{\mathrm{OA}}$, $\overline{\mathrm{OA}'}$ deux demi-droites définies par les coordonnées (a, b) et (a', b') des deux points directeurs A, A'; en posant

$$V = (\mathrm{OA}, \mathrm{OA}'), \quad \alpha = (\mathrm{O}x, \mathrm{OA}), \quad \alpha' = (\mathrm{O}x, \mathrm{OA}'), \quad l = \mathrm{OA}, \quad l' = \mathrm{OA}',$$

on sait que

$$V = \alpha' - \alpha + 2k\pi$$

et que, par suite,

$$\cos V = \cos(\alpha' - \alpha), \qquad \sin V = \sin(\alpha' - \alpha).$$

Des formules précédentes et de

$$l\cos\alpha = a + b\cos\theta, \qquad l\sin\alpha = b\sin\theta,$$
$$l'\cos\alpha' = a' + b'\cos\theta, \qquad l'\sin\alpha' = b'\sin\theta,$$

on déduit

$$ll'\cos V = aa' + bb' + (ab' + ba')\cos\theta,$$
$$ll'\sin V = (ab' - ba')\sin\theta,$$

c'est-à-dire

(13) $$\cos V = \frac{aa' + bb' + (ab' + ba')\cos\theta}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}\sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'b'\cos\theta}},$$

(14) $$\sin V = \frac{(ab' - ba')\sin\theta}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}\sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'b'\cos\theta}},$$

d'où

(15) $$\tan V = \frac{(ab' - ba')\sin\theta}{aa' + bb' + (ab' + ba')\cos\theta}.$$

Si les axes sont rectangulaires,

(16) $$\cos V = \frac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2}},$$

(17) $$\sin V = \frac{ab' - ba'}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2}},$$

(18) $$\tan V = \frac{ab' - ba'}{aa' + bb'}.$$

Si l'on suppose $OA = OA' = 1$, et si les axes sont rectangulaires, on a

$$a = \cos\alpha, \qquad b = \sin\alpha; \qquad a' = \cos\alpha', \qquad b' = \sin\alpha'.$$

Le produit des vecteurs OA, OA' se réduit à $\cos V$; donc

$$\cos V = (\overline{a} + \overline{b})(\overline{a'} + \overline{b'});$$

mais

$$\overline{a}.\overline{a'} = \cos\alpha\cos\alpha', \qquad \overline{b}.\overline{b'} = \sin\alpha\sin\alpha', \qquad \overline{a}.\overline{b'} = 0, \qquad \overline{b}.\overline{a'} = 0;$$

donc

$$\cos(\alpha - \alpha') = \cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha\sin\alpha'.$$

C'est la formule fondamentale de la Trigonométrie.

55. *Condition d'orthogonalité des droites* OA, OA'. — Pour que OA et OA' soient orthogonales, il faut et il suffit que $\cos V = 0$,

ce qui donne la condition

(19) $$aa' + bb' + (ab' + ba')\cos\theta = 0,$$

et si $\theta = \frac{\pi}{2}$

(20) $$aa' + bb' = 0.$$

56. *Condition pour que les demi-droites* OA, OA′ *soient confondues ou opposées.* — Les deux demi-droites OA et OA′ sont confondues si $\cos V = +1$ et opposées si $\cos V = -1$. Dans les deux cas $\sin V = 0$; donc, quel que soit l'angle des axes, on doit avoir

(21) $$ab' - ba' = 0.$$

Réciproquement, si cette condition est remplie, $\cos V = \pm 1$. Pour distinguer les deux cas, remarquons d'abord que, en vertu de l'équation (21), on peut poser $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, λ étant arbitraire. Il en résulte que

$$\cos V = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2}}.$$

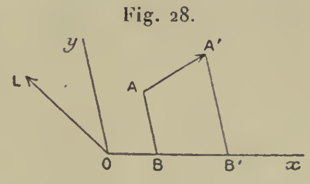
Le dénominateur est un radical arithmétique; on doit donc prendre $\sqrt{\lambda^2} = \lambda$ si $\lambda > 0$, et $\sqrt{\lambda^2} = -\lambda$ si $\lambda < 0$. Dans le premier cas $\cos V = +1$ et, dans le second, $\cos V = -1$. Les deux demi-droites seront donc confondues ou opposées suivant que le coefficient de proportionnalité λ sera positif ou négatif.

57. *Corollaire.* — Pour que le point M ayant pour coordonnées x, y se trouve sur la droite passant par l'origine et par le point A, il faut et il suffit que

$$ay - bx = 0.$$

58. *Extension des formules précédentes au cas où les segments ont une origine quelconque.* — Soient a, b et a', b' les coordonnées de deux points A, A′ (*fig.* 28), l la longueur du segment $\overline{AA'}$, α l'angle que ce segment fait avec Ox et $\beta = \theta - \alpha$; en projetant sur l'axe OL les contours OBAA′ et OB′A′ qui ont mêmes extrémités, λ désignant l'angle (Ox, OL), on a

Fig. 28.



$$a\cos\lambda + b\cos(\lambda - \theta) + l\cos(\lambda - \alpha) = a'\cos\lambda + b'\cos(\lambda - \theta),$$

ou

$$(a'-a)\cos\lambda+(b'-b)\cos(\lambda-\theta)=l\cos(\lambda-\alpha).$$

Cette formule se déduit de la formule (1) en changeant a et b en $a'-a$ et $b'-b$. Il est évident que toutes les conséquences de cette formule subsistent, pourvu qu'on fasse, s'il y a lieu, les mêmes changements. Ainsi, en particulier,

$$l^2=(a'-a)^2+(b'-b)^2+2(a'-a)(b'-b)\cos\theta.$$

De même, pour que le point M ayant pour coordonnées x, y soit sur la droite AA', il faut et il suffit que les segments AM et AA' aient même sens ou des sens opposés; la condition cherchée est donc

$$(a'-a)(y-b)-(b'-b)(x-a)=0$$

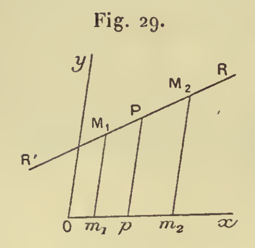
ou, en simplifiant,

$$(b-b')x-(a-a')y+ab'-ba'=0.$$

Coordonnées du point qui divise un segment dans un rapport donné.

59. Soient (*fig.* 29) x_1, y_1 et x_2, y_2 les coordonnées des points M_1, M_2 et x, y les coordonnées du point P tel que

Fig. 29.



$$\frac{\overline{PM_1}}{\overline{PM_2}}=-\lambda \quad \text{ou} \quad \overline{PM_1}+\lambda\overline{PM_2}=0.$$

Soient m_1, m_2, p les projections de M_1, M_2, P sur $x'x$, ces projections étant faites parallèlement à l'axe des y. On a, en grandeur et signe,

$$\frac{\overline{pm_1}}{\overline{pm_2}}=\frac{\overline{PM_1}}{\overline{PM_2}}=-\lambda;$$

or

$$\overline{pm_1}=x_1-x, \quad \overline{pm_2}=x_2-x,$$

donc

$$\frac{x_1-x}{x_2-x}=-\lambda,$$

d'où

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

De même,

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Pour plus de symétrie on peut poser $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, de sorte que

$$\lambda_1 \overline{PM_1} + \lambda_2 \overline{PM_2} = 0;$$

on aura alors

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \qquad y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

En particulier, si P est le milieu de M_1M_2, on a $\lambda = 1$ ou $\lambda_1 = \lambda_2$; donc les coordonnées du milieu de M_1M_2 sont

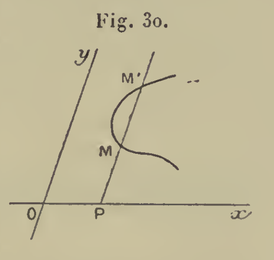
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Si λ varie d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, le point P décrit la droite M_1M_2 tout entière. De -1 à 0, le point P décrit le segment infini $R'M_1$; de 0 à $+\infty$ le segment M_1M_2 et de $-\infty$ à -1 le segment M_2R.

Équation d'une courbe plane. — Exemples.

60. Considérons une courbe plane et deux axes de coordonnées tracés dans son plan (*fig.* 30). Une parallèle à l'axe des y convenablement choisie rencontre cette courbe en des points M, M′, ... que sa définition permet de déterminer. Si l'on désigne par x, y les coordonnées de l'un quelconque de ces points, il y a entre ces deux variables une relation dépendant de la nature de la courbe considérée, puisque, x étant donné, on en déduit pour y des valeurs déterminées. Cette relation, que nous supposerons équivalente à la définition géométrique de la courbe, se nomme *l'équation* de cette courbe. Ce qui précède s'applique d'ailleurs à un système quelconque de coordonnées. Nous allons étudier quelques exemples simples.

Fig. 30.



61. *Équation du cercle.* — Si l'on prend pour pôle le centre d'un cercle de rayon R, l'équation de ce cercle, en coordonnées polaires, est évidemment

$$\rho = R \qquad \text{ou aussi} \qquad \rho = -R,$$

car les deux points ayant pour coordonnées

$$\omega = \alpha, \quad \rho = R \quad \text{et} \quad \omega = \alpha, \quad \rho = -R$$

sont symétriques par rapport au pôle.

Si l'on nomme x, y les coordonnées rectilignes d'un point quelconque M d'un cercle de rayon R et dont le centre C a pour coordonnées a, b, les axes faisant un angle θ, on a

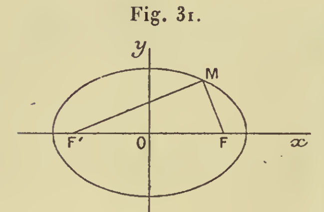
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\theta = R^2,$$

puisque cette équation exprime que $MC = R$. On a ainsi obtenu *l'équation du cercle* donné. Si les axes sont deux diamètres rectangulaires du cercle, on doit poser $\theta = \frac{\pi}{2}$, $a = b = 0$ et l'équation du cercle rapporté à ces deux diamètres est

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

62. *Équation de l'ellipse rapportée à ses axes de symétrie.* — L'ellipse est le lieu des points d'un plan dont la somme des distances à deux points fixes, situés dans ce plan, et appelés *foyers*, est constante.

Fig. 31.



Prenons pour axe des x la droite qui passe par les deux foyers F, F′ et pour axe des y la perpendiculaire au milieu de FF′ (*fig.* 31); il résulte immédiatement de la définition de l'ellipse que ces deux droites sont des axes de symétrie de cette courbe. Soit M un point quelconque de l'ellipse considérée; on a, par définition,

$$(1) \qquad MF + MF' = 2a,$$

$2a$ désignant une longueur donnée. Désignons par x, y les coordonnées de M, par c l'abscisse de F et par $-c$ celle de F′; en remplaçant MF et MF′ par leurs expressions en fonction de x, y et c, l'équation (1) devient

$$(2) \qquad \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Pour rendre cette équation rationnelle, élevons les deux membres au carré, après avoir fait passer le premier radical dans le second

membre ; après simplifications on obtient

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Élevant de nouveau les deux membres au carré et simplifiant

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Le côté FF′ devant être plus petit que la somme des deux autres côtés du triangle MFF′, on doit supposer $2c<2a$; nous poserons $a^2-c^2=b^2$, ce qui permet d'écrire l'équation trouvée sous la forme

$$(3)\qquad b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

ou encore

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

En réalité, on peut craindre que cette équation soit trop générale, car, en appliquant le calcul précédent à l'une quelconque des équations,

$$\pm\mathrm{MF}\pm\mathrm{MF}'=2a,$$

on serait parvenu au même résultat.

Je dis que, si les coordonnées d'un point M vérifient l'équation (3), la *somme* des distances de ce point aux deux points F, F′ est égale à $2a$. En effet, on ne peut supposer que

$$-\mathrm{MF}-\mathrm{MF}'=2a,$$

puisque les deux membres ont des signes contraires. Soit pour fixer les idées $\mathrm{MF}\leqq\mathrm{MF}'$; on ne peut, pour une raison analogue, supposer que

$$\mathrm{MF}-\mathrm{MF}'=2a.$$

Je dis que l'on n'a pas non plus

$$\mathrm{MF}'-\mathrm{MF}=2a,$$

car, si le point M est sur l'axe des x, extérieur au segment FF′, on a

$$\mathrm{MF}'-\mathrm{MF}=2c,$$

pour toute autre position

$$\mathrm{MF}'-\mathrm{MF}<2c.$$

Cela est évident si le point M est sur l'axe des x, entre F et F', et quand M n'est pas sur l'axe des x, le côté FF' du triangle MFF' est plus grand que la différence des deux autres côtés; or $2c < 2a$, donc dans tous les cas $MF' - MF < 2a$. Il ne reste donc plus de possible que l'équation (1). Il faut conclure de cette discussion que les équations au carré n'ont introduit aucune solution réelle étrangère.

63. *Remarque*. — On trouve immédiatement

$$MF'^2 - MF^2 = 4cx;$$

donc, en tenant compte de l'équation (1),

$$(4) \qquad MF' - MF = \frac{2c}{a}x.$$

En combinant par addition et soustraction les équations (1) et (4), on obtient

$$(5) \qquad MF' = a + \frac{cx}{a}, \qquad MF = a - \frac{cx}{a}.$$

Les rayons vecteurs MF, MF' sont donc des *fonctions linéaires* de l'abscisse du point M.

En partant de l'une quelconque des équations (5), on obtient très simplement l'équation (4).

64. Si l'on pose $MF = u$, $MF' = v$, l'équation de l'ellipse, en *coordonnées bivectorielles*, est

$$u + v = 2a.$$

Si l'on nomme ω et ω' les angles MFF' et MF'F, on trouve

$$\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\operatorname{tang}\frac{\omega'}{2} = \frac{a-c}{a+c}.$$

Enfin on a encore

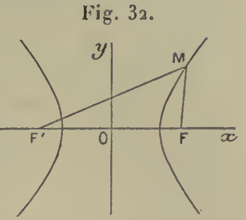
$$\cos\frac{M}{2} = \frac{b}{\sqrt{u.v}}.$$

65. *Équation de l'hyperbole rapportée à ses axes de symétrie*. — L'hyperbole est le lieu des points d'un plan dont la différence des distances à deux points fixes situés dans ce plan et appelés *foyers* est constante.

Nous prendrons encore pour axe des x la droite passant par les deux foyers F, F' et pour axe des y la perpendiculaire élevée au

milieu de FF′ (*fig.* 32). Ces droites sont évidemment des axes de symétrie. En désignant par $2a$ la différence constante des rayons vecteurs MF, MF′, c et $-c$ étant les abscisses des foyers, on obtiendra, en désignant par x et y les coordonnées d'un point M de l'hyperbole, l'équation

Fig. 32.



$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Mais, pour que le triangle MFF′ existe, il est nécessaire de supposer $a < c$; on est ainsi conduit à poser

$$a^2 - c^2 = -b^2,$$

ce qui donne

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On vérifie comme dans le cas de l'ellipse que les élévations au carré n'ont introduit aucune solution réelle étrangère.

66. En posant $\mathrm{MF} = u$, $\mathrm{MF'} = v$, il faut deux équations pour représenter toute la courbe. L'équation

$$v - u = 2a$$

représente la branche dont tous les points ont une abscisse positive; l'équation

$$u - v = 2a$$

représente l'autre branche.

En posant $\mathrm{MFF'} = \omega$, $\mathrm{MF'F} = \omega'$, on a de même pour chacune de ces deux branches les équations

$$\frac{\tang\frac{\omega}{2}}{\tang\frac{\omega'}{2}} = \frac{c+a}{c-a} \quad \text{ou} \quad \frac{\tang\frac{\omega}{2}}{\tang\frac{\omega'}{2}} = \frac{c-a}{c+a}.$$

Enfin, comme pour l'ellipse

$$\cos\frac{\mathrm{M}}{2} = \frac{b}{\sqrt{uv}}.$$

67. *Équation de la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet.* — La parabole est le lieu des points d'un plan

situés à égales distances d'un point fixe appelé *foyer* et d'une droite fixe appelée *directrice,* le foyer et la directrice étant dans le plan donné.

Prenons pour axe des x (*fig.* 33) la perpendiculaire abaissée du foyer sur la directrice, l'origine étant à égale distance du foyer et de la directrice, et l'axe des y étant parallèle à la directrice. Soient x, y les coordonnées d'un point M de la parabole considérée; si l'on pose $DF = p$, on a

Fig. 33.

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

$$PM = PQ + QM = \frac{p}{2} + x;$$

or, par définition,

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2};$$

donc

$$y^2 = 2px.$$

Telle est l'équation cherchée.

Si l'on prend pour coordonnées $MF = u$, $PM = v$, l'équation de la parabole est $u = v$.

68. Les trois courbes : ellipse, hyperbole et parabole sont nommées *sections coniques*. On les obtient, en effet, en coupant par un plan un cône de révolution. Si l'on considère deux sphères inscrites à un cône de révolution, un plan tangent commun à ces deux sphères coupe le cône suivant une ellipse ou une hyperbole ayant pour foyers les points de contact du plan sécant et des deux sphères. Un plan parallèle à un plan tangent au cône le coupe suivant une parabole [*voir,* pour la *méthode de Dandelin,* le *Cours de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse ([1])].

69. Les exemples que nous venons de traiter suffisent pour faire comprendre comment on peut déduire l'équation d'une courbe de sa définition géométrique. Réciproquement, une équation à deux variables $f(x, y) = 0$, définit en général une courbe. Supposons,

([1]) Paris, Gauthier-Villars.

pour fixer les idées, que x et y désignent des coordonnées cartésiennes, et supposons, pour plus de simplicité, que $f(x, y)$ soit un polynome entier. Soit x_0 une valeur réelle attribuée à x, l'équation $f(x_0, y) = 0$ admet un nombre déterminé de racines; soit y_0 l'une d'elles, que nous supposerons réelle. Au système x_0, y_0 correspond un point M. Or, si l'on fait varier x_0 d'une manière continue, y_0 varie aussi d'une manière continue, et par suite le point M décrit un arc de courbe.

Chacune des déterminations réelles de y correspondant à une valeur donnée à x fournit ainsi un arc de courbe; l'ensemble de tous ces arcs constitue une courbe, représentée par l'équation donnée.

En résumé, une courbe plane est le lieu géométrique de tous les points dont les coordonnées vérifient une équation donnée $f(x, y) = 0$.

Il convient d'ajouter que, si l'on donne deux équations distinctes $f(x, y) = 0$, $f_1(x, y) = 0$, il n'y a qu'un nombre déterminé de points dont les coordonnées vérifient le système de ces deux équations, puisque ce système n'a qu'un nombre déterminé de solutions.

On en conclut qu'une courbe donnée ne peut avoir deux équations distinctes, par rapport à un même système d'axes de coordonnées et que par suite, quel que soit le procédé employé pour trouver l'équation d'une courbe, on doit toujours trouver la même équation.

Le but principal de la Géométrie analytique plane est de ramener l'étude des courbes planes à celle des équations qui les représentent.

EXERCICES.

1. Former l'équation de la perpendiculaire au milieu d'un segment AB, connaissant les coordonnées de ses extrémités.

On considère cette droite comme le lieu des points à égales distances de A et de B.

2. Étant donnés trois points en ligne droite A, B, C et un point M quelconque, démontrer la relation suivante, due à Stewart

$$\overline{AM}^2\,\overline{BC} + \overline{BM}^2\,\overline{CA} + \overline{CM}^2\,\overline{AB} + \overline{AB}\;\overline{BC}\;\overline{CA} = 0.$$

En déduire une relation entre les puissances de trois points en ligne droite, par rapport à un cercle.

3. D'un point O, on mène une transversale variable sur laquelle on prend, à partir du point P où elle rencontre une droite fixe, des segments

$$PM = PM' = a,$$

a désignant une longueur constante. Former l'équation du lieu des points M, M' (conchoïde de Nicomède).

4. Une droite roule sans glisser sur une circonférence donnée; trouver le lieu décrit par un point de cette droite (développante de cercle). On prendra des coordonnées polaires.

5. En supposant que la quantité de lumière provenant d'une source lumineuse reçue par un point M soit donnée par la formule $I = \frac{a}{r^2}$, r étant la distance de M à la source, trouver l'équation du lieu des points également éclairés par deux sources différentes A, B; a, b étant les quantités de lumière reçues à l'unité de distance de chacune de ces sources.

6. Un fil ayant la longueur de la circonférence d'un cercle est enroulé sur ce cercle de manière que ses deux extrémités coïncident avec un point A. On le déroule en le tendant de manière que la partie déroulée ait la forme d'une droite perpendiculaire au diamètre passant par A; lieu de l'extrémité du fil.

Transformation des coordonnées rectilignes.

70. *La transformation des coordonnées* consiste dans le problème suivant :

Étant donnée l'équation d'une courbe rapportée à un système particulier de coordonnées, trouver l'équation de la même courbe rapportée à un autre système de coordonnées.

Le problème sera évidemment résolu si l'on parvient à exprimer les coordonnées x, y d'un point quelconque M du plan par rapport au premier système en fonction des coordonnées x', y' du même point par rapport au nouveau système. Effectivement, si l'équation de la courbe rapportée au premier système est

$$f(x, y) = 0,$$

et si l'on a trouvé

$$x = \varphi(x', y'), \qquad y = \psi(x', y'),$$

l'équation de la même courbe par rapport aux nouveaux axes sera

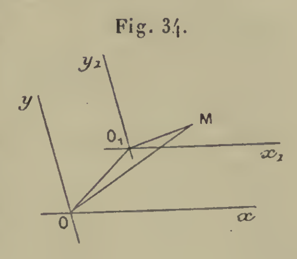
$$f[\varphi(x', y'), \psi(x', y')] = 0.$$

Nous supposerons qu'il s'agisse de coordonnées rectilignes. Il convient de distinguer plusieurs cas.

71. Premier cas. — *Changement d'origine, les axes conservant leurs directions primitives.*

Supposons que les axes primitifs Ox, Oy (*fig.* 34) subissent une *translation* qui leur fasse prendre la position O_1x_1, O_1y_1, ces deux demi-droites étant respectivement parallèles à Ox, Oy et de mêmes sens. Soient x_1, y_1 les coordonnées de la nouvelle origine O_1, par rapport aux anciens axes. Projetons sur Ox, parallèlement à Oy, la brisée OO_1M et sa résultante OM; on obtient

Fig. 34.



$$(\overline{OM})_x = (\overline{OO_1})_x + (\overline{O_1M})_x.$$

Or

$$(\overline{OM})_x = x, \qquad (\overline{OO_1})_x = x_1, \qquad (\overline{O_1M})_x = (\overline{O_1M})_{x_1} = x',$$

donc

(1) $$x = x_1 + x'.$$

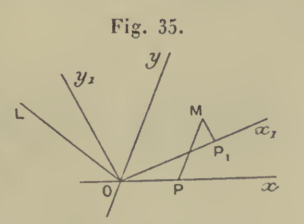
On trouve de même

(2) $$y = y_1 + y'.$$

72. Deuxième cas. — *Changement de directions des axes sans changement d'origine.*

Soient Ox, Oy les anciens axes; Ox_1, Oy_1 les nouveaux (*fig.* 35). Ces derniers sont déterminés si l'on donne les angles $(Ox, Ox_1) = \alpha$ et $(Ox, Oy_1) = \beta$. Projetons sur un axe OL faisant avec Ox un angle égal à λ, les contours OPM et OP_1M des coordonnées anciennes et des coordonnées nouvelles d'un même point M; ces contours ayant mêmes extrémités ont mêmes projections : donc

Fig. 35.



$$x \cos\lambda + y \cos(\lambda - \theta) = x' \cos(\lambda - \alpha) + y' \cos(\lambda - \beta).$$

En prenant successivement $\lambda = \theta - \frac{\pi}{2}$ et $\lambda = \frac{\pi}{2}$, on trouve

(3) $$x = \frac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \beta)}{\sin\theta}, \qquad y = \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\beta}{\sin\theta}.$$

Cas particulier. — Le système primitif est rectangulaire et on le fait tourner d'un angle α autour de l'origine; alors on doit poser

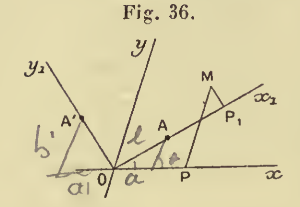
$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \beta = \alpha + \frac{\pi}{2};$$

on obtient ainsi

(4) $$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \qquad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

73. On peut définir les nouveaux axes en donnant les paramètres directeurs a, b de Ox_1 et les paramètres a', b' de Oy_1. Soient l et l' les distances à l'origine des points directeurs $A(a, b)$, $A'(a', b')$ (*fig.* 36). Projetons sur Ox, *parallèlement à* Oy, les contours OPM, OP_1M des coordonnées de M; ces contours ont mêmes extrémités, donc

Fig. 36.



$$(\overline{OP})_x + (\overline{PM})_x = (\overline{OP_1})_x + (\overline{P_1M})_x.$$

Or

$$(\overline{OP})_x = x \quad \text{et} \quad (\overline{PM})_x = 0.$$

D'autre part, $(\overline{OA})_x = a$, donc $(\overline{OP_1})_x = \frac{a}{l} x_1$. Pareillement $(\overline{P_1M})_x = \frac{a'}{l'} y_1$. Donc

$$x = \frac{a}{l} x' + \frac{a'}{l'} y',$$

de même

$$y = \frac{b}{l} x' + \frac{b'}{l'} y'.$$

Il est d'ailleurs aisé de déduire ces formules des formules (3) et (4). En effet, ces dernières sont linéaires et homogènes par rapport à x' et y'; on peut donc poser

$$x = px' + qy',$$
$$y = rx' + sy'.$$

Appliquons ces formules au point A; on obtient $a = pl$, $b = rl$ ou $p = \frac{a}{l}$, $r = \frac{b}{l}$. En les appliquant au point A', on a de même $q = \frac{a'}{l'}$, $s = \frac{b'}{l'}$.

Cas particulier : $l = l' = 1$; les formules deviennent

(5) $$x = ax' + a'y', \qquad y = bx' + b'y'$$

avec les conditions

(6) $\qquad a^2+b^2+2ab\cos\theta=1, \qquad a'^2+b'^2+2a'b'\cos\theta=1.$

En outre, si l'on pose $(Ox_1, Oy_1)=\theta'$, on a

$$\sin\theta'=(ab'-ba')\sin\theta$$

et, par suite,

(7) $$ab'-ba'\neq 0.$$

74. Troisième cas. — *Transformation générale : on change l'origine et les directions des axes.*

Soient Ox, Oy les anciens axes, O_1x_1, O_1y_1 les nouveaux (*fig.* 37); on donne les coordonnées x_1, y_1 de O_1 par rapport aux anciens axes et les angles α, β que O_1x_1 et O_1y_1 font avec Ox. Transportons les anciens axes parallèlement à eux-mêmes en O_1x_2, O_1y_2; en appelant x'', y'' les coordonnées d'un point M par rapport aux axes O_1x_2, O_1y_2 et x, y les coordonnées anciennes, on a (premier cas)

Fig. 37.

$$x=x_1+x'', \qquad y=y_1+y'',$$

puis, en remarquant que O_1x_1 et O_1y_1 font avec O_1x_2 les mêmes angles qu'avec Ox, on a (second cas)

$$x''=\frac{x'\sin(\theta-\alpha)+y'\sin(\theta-\beta)}{\sin\theta}, \qquad y''=\frac{x'\sin\alpha+y'\sin\beta}{\sin\theta};$$

donc, finalement, les formules générales sont

(8) $$x=x_1+\frac{x'\sin(\theta-\alpha)+y'\sin(\theta-\beta)}{\sin\theta}, \qquad y=y_1+\frac{x'\sin\alpha+y'\sin\beta}{\sin\theta}.$$

Les nouveaux axes peuvent être définis par des points directeurs $A(a, b)$, $A'(a', b')$ les demi-droites O_1x_1 et O_1y_1 étant respectivement parallèles aux demi-droites $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$ et de mêmes sens qu'elles. Si l'on prend sur O_1x_1 le point B tel que $\overline{O_1B}=\overline{OA}$ et sur O_1y_1 le point B' tel que $\overline{O_1B'}=\overline{OA'}$ les coordonnées de B par rapport aux axes O_1x_2, O_1y_2 seront égales à a et b et celles de B' à a' et b'. Donc, en sup-

posant $OA = OA' = 1$, on a

$$x'' = ax' + a'y', \qquad y'' = bx' + b'y',$$

et, par suite, les formules générales sont

$$(9) \qquad x = ax' + a'y' + a'', \qquad y = bx' + b'y' + b''$$

en écrivant, pour plus de symétrie, a'' au lieu de x_1 et b'' au lieu de y_1 et en conservant les conditions (6) et (7).

75. Théorème. — *Quand on conserve l'origine des coordonnées et qu'on change seulement les directions des axes, l'expression*

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2$$

reste invariable.

On peut d'abord remarquer, en effet, que cette expression représente le carré de la distance du point $M(x, y)$ à l'origine. On peut établir la proposition au moyen des formules de transformation; il s'agit de prouver, en effet, que

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 \equiv (ax' + a'y')^2 + 2(ax' + a'y')(bx' + b'y')\cos\theta' + (bx' + b'y')^2.$$

Or, dans le second membre, les coefficients de x'^2 et de y'^2 sont égaux à l'unité en vertu des équations (6); le coefficient de $2x'y'$ est égal à

$$aa' + bb' + (ab' + ba')\cos\theta,$$

c'est-à-dire $\cos\theta'$.

76. Théorème fondamental. — Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe. Si l'on effectue la transformation des coordonnées la plus générale, on obtient

$$f(x, y) \equiv f(ax' + a'y' + a'', bx' + b'y' + b'')$$

et l'équation de la courbe dans le nouveau système est

$$f(ax' + a'y' + a'', bx' + b'y' + b'') = 0.$$

Il s'agit d'établir que *la transformation des coordonnées rectilignes n'altère pas le degré d'une équation algébrique.*

En effet, soit m le degré d'un polynome entier en x et y, $f(x, y)$

et soit m' le degré du polynome obtenu

$$f(ax'+a'y'+a'',\ bx'+b'y'+b'').$$

Un terme quelconque du polynome donné, $Ax^\alpha y^\beta$, devient

$$A(ax'+a'y'+a'')^\alpha(bx'+b'y'+b'')^\beta;$$

le terme considéré est donc remplacé par une somme de termes dont les degrés ne peuvent pas surpasser $\alpha+\beta$ et à plus forte raison m, puisque $\alpha+\beta \leqq m$. Donc, quelles que soient les réductions, le degré m' du nouveau polynome ne peut surpasser m. Or on sait que $ab'-ba' \gtrless 0$; donc on peut exprimer x' et y' en fonctions linéaires de x et de y et si l'on effectue cette substitution inverse sur le polynome en x', y', on retrouvera identiquement $f(x, y)$, ce qui prouve que m ne peut surpasser m'; donc $m = m'$. La proposition est générale et s'applique à toute substitution linéaire de module différent de zéro.

Classification des courbes planes.

77. Nous avons obtenu les équations de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole rapportées à des axes particuliers; si, à l'aide d'une transformation de coordonnées, on rapporte ces courbes à des axes quelconques, on obtiendra pour chacune d'elles une équation dont le premier membre f sera un polynome entier du second degré. D'une manière générale, si l'équation d'une courbe plane rapportée à des axes particuliers est algébrique et de degré m, pour obtenir l'équation de la même courbe rapportée à d'autres axes, il suffit évidemment d'effectuer une transformation de coordonnées; la nouvelle équation sera encore algébrique et de même degré. D'après cela, on partage les courbes planes en deux classes. On appelle *courbe plane algébrique* toute courbe plane dont l'équation, rapportée à deux axes tracés dans son plan, peut se mettre sous la forme $f(x, y) = 0$, le premier membre étant un polynome entier en x et y. Si ce polynome est de degré m, on dit que la courbe est d'*ordre m* ou de *degré m*. Ainsi l'ellipse, l'hyperbole, la parabole sont des courbes algébriques du second degré. Pour abréger le langage, on dit souvent : courbe de degré m ou courbe d'ordre m, au lieu de courbe plane algébrique de degré ou d'ordre m.

Les courbes planes non algébriques sont appelées *transcendantes*.

78. Théorème. — *Une courbe de degré m est coupée par une droite quelconque en m points.*

En effet, rapportons la courbe à deux axes dont l'un, l'axe des x par exemple, soit la droite donnée. La courbe ayant alors pour équation $f(x, y) = 0$, les abscisses des points communs à l'axe des x, et à cette courbe sont les racines de l'équation $f(x, 0) = 0$; à chaque racine de cette équation, qui est au plus du degré m, correspond un point commun à la courbe et à l'axe des x. Donc le nombre de ces points est au plus égal à m.

Si l'on considère l'équation la plus générale de degré m,

$$f(x, y) = 0,$$

l'équation $f(x, 0) = 0$ sera une équation complète et de degré m. Si les m racines de cette équation sont réelles et distinctes, il y a m points d'intersection. Lorsque l'équation précédente a une racine x_0 de degré p de multiplicité, nous dirons que la courbe et l'axe des x ont p points communs confondus avec le point $(x_0, 0)$. Si x_0 est une racine imaginaire, nous dirons, *par convention,* que la courbe et l'axe des x ont *un point imaginaire commun,* et si l'ordre de multiplicité est p, *p points imaginaires communs confondus en un seul.* Les coefficients étant supposés réels, à la racine x_0 correspond sa conjuguée, et par suite p nouveaux points imaginaires communs. Enfin, si le degré de l'équation $f(x, 0) = 0$ s'abaisse de q unités, on dit que q racines de cette équation sont infinies et que la courbe et l'axe des x ont q points communs à l'infini. A l'aide de toutes ces conventions, on peut dire que toute droite située dans le plan d'une courbe d'ordre m coupe cette courbe en m points réels ou imaginaires, distincts ou non, à distance finie ou à l'infini.

79. Corollaire. — *Si une droite a plus de m points communs avec une courbe de degré m, celle-ci se décompose nécessairement en cette droite et une autre courbe de degré moindre.*

En effet, prenons la droite pour axe des x; si l'équation $f(x, 0) = 0$ admet plus de m racines, son premier membre est identiquement

nul; ce qui exige que $f(x, y)$ contienne y en facteur et soit de la forme $y^p f_1(x, y)$; l'équation donnée se décompose donc en $y^p = 0$ et $f_1(x, y) = 0$.

80. *Conditions pour que deux équations algébriques représentent la même courbe.* — Supposons que les équations algébriques

$$f(x, y) = 0, \qquad g(x, y) = 0$$

représentent la même courbe; alors une sécante quelconque, par exemple, une parallèle à l'axe des y, ayant pour équation $x = x_0$, coupe les deux courbes aux mêmes points; en d'autres termes, les équations

$$f(x_0, y) = 0, \qquad g(x_0, y) = 0$$

doivent avoir les mêmes solutions, avec les mêmes degrés de multiplicité. On sait (*Alg.*, II, 219) que la condition pour qu'il en soit ainsi est que

$$f(x_0, y) \equiv \lambda_0 g(x_0, y),$$

λ_0 étant indépendant de y; il doit en être ainsi quel que soit x_0 : donc

$$f(x, y) \equiv \lambda g(x, y),$$

λ étant indépendant de y. Or les équations

$$f(x, y_0) = 0, \qquad g(x, y_0) = 0$$

doivent aussi être équivalentes, et cela quel que soit y_0 : donc λ est indépendant de x et de y. Cela revient à dire que les polynomes $f(x, y)$ et $g(x, y)$ doivent être de même degré et avoir les coefficients des termes semblables proportionnels. La réciproque est évidente.

De là cette conséquence. Soient $f(x, y) = 0$ et $F(x', y') = 0$ les équations d'une même courbe rapportée à deux systèmes d'axes différents. Par la transformation des coordonnées on obtient $f(x, y) \equiv f_1(x', y')$: l'équation de la courbe est donc aussi, dans le nouveau système, $f_1(x', y') = 0$, donc, λ étant une constante $f_1(x', y') \equiv \lambda F(x' y')$, et, par suite, $f(x, y) \equiv \lambda F(x', y')$.

81. *Nombre des termes de l'équation d'une courbe de degré m.* — On peut mettre l'équation de degré m sous la forme

$$\varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \ldots + \varphi_1(x, y) + \varphi_0 = 0,$$

$\varphi_p(x, y)$ désignant un polynome homogène de degré p. Le nombre des termes est donc

$$(m+1)+m+(m-1)+\ldots+2+1 \quad \text{ou} \quad \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Ainsi, par exemple, l'équation d'une courbe du second degré renferme six termes :

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

EXERCICES.

1. *On fait tourner autour de l'origine, d'un angle* α, *un point* M *ayant pour coordonnées rectangulaires* x, y; *trouver les coordonnées du point* M' *obtenu.*

Si l'on considère les axes OX', OY' tels que $(\text{OX}, \text{OX}')=\alpha$; par rapport à ces axes, M' a pour coordonnées (x, y); il suffit donc de faire tourner le système OX', OY' de l'angle $-\alpha$.

On peut encore remarquer que, si l'on pose

$$z=x+yi, \qquad z'=x'+y'i,$$

on a

$$z'=z(\cos\alpha+i\sin\alpha).$$

Résoudre la même question avec des axes obliques.

2. *Étant donnés n points* $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$, *déterminer la position du point* $A_0(x_0, y_0)$ *dont les coordonnées satisfont aux équations*

$$x_0-nx_1+\frac{n(n-1)}{1.2}x_2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x_3+\ldots+(-1)^n x_n=0,$$

$$y_0-ny_1+\frac{n(n-1)}{1.2}y_2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}y_3+\ldots+(-1)^n y_n=0.$$

Démontrer que la position de ce point est indépendante du choix des axes des coordonnées.

3. Étant donnés m points $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_m(x_m, y_m)$, soient B_1, B_2, B_m les points qui divisent A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{m-1}A_m$, A_mA_1 dans le rapport $-n$; C_1, C_2, ..., C_m les points qui divisent B_1B_2, B_2B_3, ..., B_mB_1 dans le même rapport, et ainsi de suite. Les coordonnées du $q^{\text{ième}}$ point du $p^{\text{ième}}$ groupe de m points sont

$$\frac{x^q(1+nx)^p}{(1+n)^q}, \frac{y^q(1+ny)^p}{(1+n)^p},$$

pourvu que l'on remplace x^t, y^t par x_r, y_r, r étant le reste de la division de t par m.

(NEUBERG.)

CHAPITRE II.

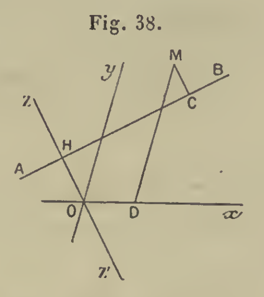
LIGNE DROITE.

Équation de la ligne droite.

82. Théorème. — *L'équation d'une ligne droite en coordonnées rectilignes est du premier degré.*

Soient Ox, Oy deux axes de coordonnées, AB une droite située dans leur plan et Z'Z la perpendiculaire à AB menée par l'origine (*fig.* 38). La droite AB est déterminée si l'on connaît la direction Z'Z et le point H où AB rencontre cette droite. Il suffit donc de connaître la longueur OH et l'angle que $\overline{OH}$ fait avec $\overline{Ox}$; il est préférable de choisir sur Z'Z un sens positif et d'évaluer le segment $\overline{OH}$ compté avec le signe + s'il est dirigé dans le sens positif; avec le signe —, quand il est dirigé dans le sens contraire. Soit p la valeur algébrique de $\overline{OH}$. Pour fixer les idées, supposons que $\overline{OZ}$ soit la demi-droite positive et nommons α l'angle que cette demi-droite fait avec Ox. On voit que p et α sont les coordonnées polaires du point H, Ox étant l'axe polaire.

Fig. 38.



Cela posé, abaissons MC perpendiculaire à AB et soit d la mesure algébrique du segment $\overline{CM}$, d étant positif quand $\overline{CM}$ a le même sens que $\overline{OZ}$, et négatif dans le cas contraire. Projetons sur $\overline{OZ}$ le contour ODM des coordonnées de M et le contour équivalent OHCM; si l'on appelle x, y les coordonnées de M, on obtient, en écrivant que les projections des deux contours sont égales,

$$x \cos\alpha + y \cos(\theta - \alpha) = p + d,$$

d'où

(1) $$d = x\cos\alpha + y\cos(\theta - \alpha) - p.$$

Pour que le point M soit sur AB, il faut et il suffit que $d = 0$: donc l'équation de AB est

(2) $$x\cos\alpha + y\cos(\theta - \alpha) - p = 0.$$

83. *Cas particuliers.* — 1° Quand les axes sont rectangulaires, l'équation de AB est

(3) $$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

2° Pour que AB passe par l'origine, il faut et il suffit que $p = 0$; son équation est alors de la forme

$$x\cos\alpha + y\cos(\theta - \alpha) = 0.$$

3° La perpendiculaire à Ox menée par le point $(x_0, 0)$ a pour équation

$$x + y\cos\theta - x_0 = 0.$$

Il suffit, en effet, de faire coïncider $\overline{OZ}$ avec $\overline{Ox}$ et de remarquer alors que $p = x_0$, $\alpha = 0$.

4° Pareillement, la perpendiculaire à l'axe des y menée par ce point $0, y_0$ a pour équation

$$x\cos\theta + y - y_0 = 0.$$

84. Réciproquement, *toute équation du premier degré entre les coordonnées rectilignes x, y, représente une droite.*

Soit

(4) $$Ax + By + C = 0$$

une équation du premier degré à deux variables x, y. Il sera démontré que l'équation (4) représente une droite si l'on peut déterminer α et p de façon que les coefficients de cette équation soient proportionnels à ceux de l'équation (2); cela revient à déterminer λ, α, p de façon que

$$\cos\alpha = \lambda A, \qquad \cos(\theta - \alpha) = \lambda B, \qquad -p = \lambda C.$$

En appelant β l'un des angles que $\overline{Oy}$ fait avec $\overline{OZ}$, on a

$$\cos(\theta - \alpha) = \cos\beta;$$

nous sommes donc ramenés à trouver une demi-droite $\overline{OZ}$ dont les cosinus directeurs soient proportionnels à A et B; par suite (51)

$$\lambda = \frac{\varepsilon \sin\theta}{R} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

en désignant par R le radical arithmétique $\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$. On a ainsi

$$\cos\alpha = \varepsilon\frac{A\sin\theta}{R}, \qquad \cos(\theta - \alpha) = \varepsilon\frac{B\sin\theta}{R}, \qquad -p = \varepsilon\frac{C\sin\theta}{R}.$$

Les deux déterminations de ε correspondent à une seule droite. En effet, à la détermination $\varepsilon = +1$, correspond une demi-droite déterminée $\overline{OZ}$; p a une valeur algébrique déterminée : donc le point H est déterminé sur Z′Z. Si l'on prend $\varepsilon = -1$, $\overline{OZ}$ est remplacée par la demi-droite opposée $\overline{OZ'}$ et p change de signe, donc le point H reste le même. On peut remarquer, si l'on veut, que les deux systèmes de coordonnées polaires p, α et $-p$, $\alpha + \pi$ déterminent un seul point H.

85. *Construction de la droite représentée par l'équation* $Ax + By + C = 0$. — Remarquons d'abord que si l'unité de longueur n'est pas déterminée, x et y devant représenter des longueurs, il est nécessaire que A et B soient du même degré d'homogénéité et que le degré de C surpasse celui de A d'une unité, de sorte que $\frac{C}{A}$ et $\frac{C}{B}$ représentent des longueurs; cela étant, nous considérerons plusieurs cas.

1° Supposons d'abord que l'un des coefficients A ou B soit nul, C étant différent de zéro.

L'équation $By + C = 0$ ou $y = -\frac{C}{B}$ représente la parallèle à l'axe des x menée par le point $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$.

Pareillement, l'équation $Ax + C = 0$ ou $x = -\frac{C}{A}$ représente la parallèle à l'axe des y menée par le point $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$.

Les réciproques sont vraies; ainsi une parallèle à l'axe des y a une équation de la forme $x = \alpha$ ou $Ax + C = 0$.

2° $C = 0$; l'équation est de la forme $Ax + By = 0$; la droite qu'elle représente passe par l'origine, parce que l'équation précé-

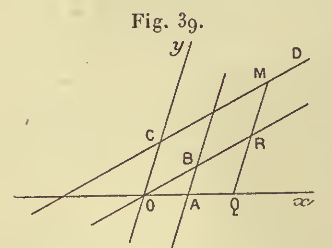
dente admet la solution $x = 0$, $y = 0$. Pour achever de la déterminer, supposons que les coefficients A et B représentent, au signe près, des longueurs; la droite cherchée passe par le point (B, — A); elle est donc déterminée. D'ailleurs on peut remarquer que l'équation proposée exprime la condition nécessaire et suffisante pour que le point $M(x, y)$ soit sur la droite joignant l'origine au point (B, — A).

L'équation précédente peut s'écrire $y = -\frac{A}{B}x$; ou, en posant $-\frac{A}{B} = m$,

$$y = mx.$$

Le coefficient m est un nombre positif ou négatif. Si l'on prend (*fig.* 39) sur l'axe des x un segment OA pour unité, et si l'on porte sur la parallèle à l'axe des y menée par A un segment $\overline{AB}$ dont la mesure algébrique soit exprimée par le nombre m, la droite indéfinie OB est la droite cherchée.

Fig. 39.



3° Considérons enfin le cas où les trois coefficients A, B, C sont différents de zéro. L'équation donnée résolue par rapport à y devient

$$(1) \qquad y = mx + h,$$

en posant $-\frac{A}{B} = m$, $-\frac{C}{B} = h$; m est un nombre et h une longueur au signe près.

Construisons d'abord (*fig.* 39) la droite OB ayant pour équation $y = mx$; déterminons ensuite sur l'axe des y le segment $\overline{OC} = h$ et menons enfin la droite CD parallèle à OB. Soit M un point quelconque de BC, et soient Q et R les points où la parallèle à l'axe des y menée par M rencontre l'axe des x et la droite OB; on a

$$\overline{QM} = \overline{QR} + \overline{RM};$$

donc, en appelant x l'abscisse du point Q et y l'ordonnée de M, on a, en grandeur et en signe, $\overline{QM} = y$, $\overline{QR} = mx$, $\overline{RM} = \overline{OC} = h$ et par suite x et y vérifient l'équation (1).

Réciproquement, si les coordonnées x, y d'un point M vérifient cette équation, on a

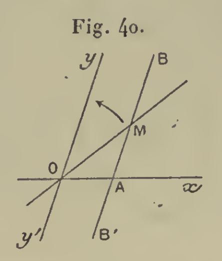
$$\overline{RM} = h,$$

et par suite M est sur la droite CD. L'équation (1) est donc celle de la droite CD.

On voit aussi que le coefficient m détermine la direction de la droite représentée par l'équation (1) et h détermine le point où cette droite rencontre l'axe des y. Pour ces raisons m se nomme le *coefficient angulaire* et h l'*ordonnée à l'origine* de cette droite. Pareillement $-\frac{C}{A}$ se nomme l'*abscisse à l'origine*.

86. *Variation du coefficient angulaire.* — Il résulte de ce qui précède que le coefficient angulaire d'une droite est le même que celui de la parallèle à cette droite menée par l'origine des coordonnées. Il suffit donc de considérer une droite passant par l'origine et soit (*fig.* 40) M le point de cette droite ayant pour abscisse l'unité de longueur; le point M est sur la droite B'B, parallèle à l'axe des y et ayant pour équation $x = 1$. Le coefficient angulaire de OM est égal à l'ordonnée de M, c'est-à-dire au segment $\overline{AM}$. Donc, si la droite OM tourne dans le sens direct autour de l'origine de façon que, coïncidant dans la position initiale avec l'axe $y'y$, elle tourne de 180°, le point M décrira dans le sens de B' vers B la droite B'B tout entière et par suite le coefficient angulaire m de OM varie d'une manière continue en croissant de $-\infty$ à $+\infty$.

Fig. 40.



Il importe de remarquer qu'à toute valeur de m correspond une seule direction pour la droite OM; mais, quand cette droite se confond avec l'axe des y, son coefficient angulaire est aussi bien $+\infty$ que $-\infty$.

87. *Condition pour que les équations*

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{et} \quad A'x + B'y + C' = 0$$

représentent deux droites parallèles.

Il résulte de ce qui précède que les parallèles aux droites données menées par l'origine ont respectivement pour équations

$$Ax + By = 0 \quad \text{et} \quad A'x + B'y = 0.$$

Pour que les droites données soient parallèles, il faut et il suffit

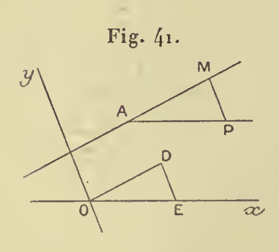
que les équations précédentes représentent une même droite, ce qui donne la condition

$$AB' - BA' = 0.$$

On arrive à la même condition en écrivant que les coefficients angulaires des deux droites données sont égaux.

88. *Équation de la droite passant par un point donné et parallèle à une direction donnée.* — Soient (*fig.* 41) x_0, y_0 les coordonnées d'un point A; a, b celles d'un point D; nous voulons former l'équation de la droite Δ menée par le point A, parallèlement à la droite OD. Soit M(x, y) un point quelconque de Δ; menons par A une parallèle à l'axe des x et par M une parallèle à l'axe des y; soit P le point de rencontre de ces deux droites, enfin soit E le point où la parallèle DE à l'axe des y rencontre l'axe des x. Si les segment parallèles $\overline{AM}$ et $\overline{OD}$ ont le même sens ou des sens contraires, il en sera de même de leurs projections $\overline{AP}$ et $\overline{OE}$; donc, en grandeur et signe,

Fig. 41.



$$\frac{\overline{AP}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{OD}}.$$

Par suite, en posant $\frac{\overline{AM}}{\overline{OD}} = \rho$, ρ ayant le signe + ou le signe — suivant que les deux segments $\overline{AM}$ et $\overline{OD}$ ont le même sens ou des sens contraires; on a, en remplaçant $\overline{AM}$ et $\overline{OD}$ par leurs expressions $x - x_0$ et a

$$\frac{x - x_0}{a} = \rho.$$

On trouve par le même raisonnement

$$\frac{y - y_0}{b} = \rho.$$

Donc

(1) $$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \rho,$$

d'où

(2) $$x = x_0 + a\rho, \qquad y = y_0 + b\rho.$$

Les équations (2) permettent d'exprimer les coordonnées d'un point quelconque M de la droite Δ à l'aide d'un seul paramètre ρ. Lorsque ρ varie de $-\infty$ à $+\infty$, le point $(x_0+a\rho, y_0+b\rho)$ décrit cette droite tout entière dans le sens défini par le segment $\overline{OD}$.

Les formules (2) conviennent évidemment au cas où l'une des deux coordonnées a ou b est nulle ; si $a=0$, par exemple, les coordonnées d'un point de Δ sont données par les formules $x=x_0$, $y=y_0+b\rho$. On peut convenir de conserver encore dans ce cas les équations (1) pourvu qu'il soit entendu que l'on tire de ces équations $x=x_0$ quand $a=0$. Remarque analogue quand $b=0$.

89. L'équation d'une droite peut toujours se ramener à la forme (1). En effet, soit

$$Ax+By+C=0 \tag{3}$$

l'équation d'une droite ; si x_0, y_0 sont les coordonnées d'un point de cette droite, on a

$$Ax_0+By_0+C=0,$$

ce qui donne $C=-Ax_0-By_0$, donc l'équation proposée peut s'écrire

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

ou

$$\frac{x-x_0}{B}=\frac{y-y_0}{-A}. \tag{4}$$

En particulier, l'équation

$$y=mx+h \tag{5}$$

peut s'écrire

$$\frac{x}{1}=\frac{y-h}{m}.$$

90. *Trouver les paramètres directeurs de la droite représentée par l'équation* $Ax+By+C=0$.

Tout point de la parallèle à la droite proposée, menée par l'origine, peut être considéré comme un *point directeur* de cette droite ; on est ainsi ramené à trouver une solution quelconque de l'équation $Ax+By=0$. La solution la plus générale de cette équation est donnée par les formules

$$x=\lambda B, \qquad y=-\lambda A,$$

ce qui démontre que les paramètres directeurs de la droite considérée sont proportionnels à B et — A, comme on le voit d'ailleurs en mettant l'équation de cette droite sous la forme (4). Mais il est indispensable de remarquer que, si l'on veut que λB et $-\lambda A$ représentent des coordonnées, il faut que λ ait des valeurs convenables. Ainsi les paramètres directeurs de la droite ayant pour équation $\beta^3 x - \alpha^3 y = 0$, dans laquelle α et β désignent des longueurs, sont $\lambda\alpha^3$ et $\lambda\beta^3$; pour que ces expressions représentent des longueurs, il faut poser $\lambda = \pm \frac{1}{\mu^2}$, μ désignant une longueur; par exemple, on peut dire que α et $\frac{\beta^3}{\alpha^2}$ sont les coordonnées d'un point directeur de la droite considérée. Dans le cas général, on ne peut prendre $\lambda = 1$ que si A et B représentent des longueurs, au signe près; dans ce cas C sera une aire. Si ces conditions sont remplies, on peut dire que le point (B, — A) est un point directeur de la droite représentée par l'équation (3). Si l'on prend une ligne de la figure pour unité, on peut dire que $(1, m)$ sont les coordonnées d'un point directeur de la droite représentée par l'équation (5).

Proposons-nous de trouver les paramètres principaux de la droite donnée. Pour que la distance du point $(\lambda B, -\lambda A)$ à l'origine soit égale à l'unité, il faut que $\lambda = \pm \frac{1}{R}$, ce qui donne pour les paramètres cherchés $a = \varepsilon \frac{B}{R}$, $b = -\varepsilon \frac{A}{R}$, en supposant $\varepsilon = \pm 1$ et R désignant le radical arithmétique $+\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$. On voit que a et b sont alors des nombres et il ne faut pas oublier que l'on a pris pour unité une longueur déterminée.

D'une manière générale, les paramètres directeurs a, b d'une droite définie par son équation ne sont déterminés qu'à un facteur près; mais le rapport $\frac{b}{a}$ est déterminé et égal au coefficient angulaire de cette droite.

91. *Si les coefficients* A, B, C *tendent vers des limites déterminées* A′, B′, C′, *la droite* Δ, *représentée par l'équation* $Ax + By + C = 0$, *tend vers la droite* Δ′, *ayant pour équation* $A'x + B'y + C' = 0$. — En effet, supposons $B' \neq 0$; l'ordonnée y de Δ est déterminée par l'équation

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B};$$

donc, si l'on donne à x une valeur déterminée x_0, on voit que

$$\lim y = -\frac{A'}{B'}x_0 - \frac{C'}{B'};$$

on en conclut que tout point de la droite Δ a pour limite le point de Δ' qui a même abscisse.

Plus généralement, si les coefficients du polynome $f(x, y)$ tendent vers des limites déterminées, la courbe C ayant pour équation $f(x, y) = 0$ a pour limite la courbe C_1, dont l'équation $f_1(x, y) = 0$ s'obtient en remplaçant dans la première équation chaque coefficient par sa limite. En effet, les ordonnées des points de la courbe C ayant pour abscisse x_0 sont les racines de l'équation $f(x_0, y) = 0$, et l'on sait que ces racines ont respectivement pour limites les racines de l'équation $f_1(x_0, y) = 0$, quelle que soit d'ailleurs la valeur attribuée à x_0, ce qui démontre la proposition.

92. *Conditions nécessaires et suffisantes pour déterminer une droite.* — L'équation la plus générale du premier degré à deux variables x, y renferme trois coefficients. Pour que la droite représentée par cette équation soit déterminée, il faut et il suffit que les rapports de deux quelconques des coefficients au troisième, supposé différent de zéro, soient connus. Par exemple, si $C \neq 0$, il suffit de connaître $\frac{A}{C}, \frac{B}{C}$. En posant $\frac{A}{C} = u$, $\frac{B}{C} = v$, l'équation $ux + vy + 1 = 0$ représente toutes les droites ne passant pas par l'origine, quand on donne à u et v toutes les valeurs possibles. On peut même lever la restriction précédente. En effet, si l'on écrit

(1) $$y + \frac{u}{v}x + \frac{1}{v} = 0,$$

on peut identifier cette équation avec l'équation

(2) $$y - mx = 0,$$

en posant $-\frac{u}{v} = m$, $\frac{1}{v} = 0$, ce qui signifie que si l'on fait croître indéfiniment u et v, de façon que le rapport $-\frac{u}{v}$ ait pour limite m, la droite représentée par l'équation (1) a pour limite celle qui est représentée par l'équation (2). De même, en faisant croître u et v indéfiniment, de façon que $\frac{v}{u}$ tende vers zéro, la droite considérée

aura pour limite l'axe des y. Donc en attribuant à u et v des valeurs finies ou infinies, l'équation $ux + vy + 1 = 0$ peut être considérée comme l'équation la plus générale de la ligne droite. Pour que la droite soit déterminée, il est nécessaire et suffisant que u et v soient déterminés; ces deux constantes se nomment des *paramètres*. On voit que l'équation de la ligne droite renferme *deux paramètres*. Il faut donner deux équations distinctes entre u et v; en d'autres termes, il faut *deux conditions distinctes* pour déterminer une droite. Mais il importe de remarquer que, si les conditions se traduisent par des équations de degré supérieur au premier, il peut y avoir plusieurs droites satisfaisant aux conditions données. On dit que la droite cherchée est *déterminée* quand le problème a un nombre déterminé et limité de solutions.

L'équation $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$ renferme, *en apparence*, trois paramètres : $x_0, y_0, \frac{b}{a}$. Mais, si on la met sous la forme

$$y = \frac{b}{a}x + y_0 - \frac{bx_0}{a},$$

on voit qu'elle ne renferme que *deux* paramètres seulement : $\frac{b}{a}$ et $y_0 - \frac{bx_0}{a}$.

Problèmes relatifs à la ligne droite.

93. *Équation générale des droites passant par un point donné* $A(x_0, y_0)$. — Exprimons que la droite ayant pour équation $Ax + By + C = 0$ passe par le point (x_0, y_0), ce qui donne la condition

$$Ax_0 + By_0 + C = 0;$$

on en tire

$$C = -Ax_0 - By_0,$$

et, par suite, l'équation de toute droite passant par $A(x_0, y_0)$ peut se mettre sous la forme

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Réciproquement, quels que soient A et B, cette équation représente une droite passant par le point donné, puisqu'elle est vérifiée quand on pose $x = x_0, y = y_0$.

Il en résulte que, si l'on donne à A et B toutes les valeurs possibles,

l'équation précédente représente le faisceau de toutes les droites passant par le point donné et n'en représente pas d'autres. Pour ces raisons, on dit que c'est l'*équation générale* des droites passant par le point (x_0, y_0). Elle renferme encore un paramètre $\frac{B}{A}$. On peut évidemment lui donner la forme

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b},$$

a et b étant arbitraires.

94. *Équation générale des parallèles à une droite donnée.* — 1° Soit $y = mx$ l'équation d'une droite passant par l'origine : l'équation d'une parallèle à cette droite est de la forme

$$y = mx + \lambda,$$

et réciproquement, toute équation de cette forme représente une parallèle à la droite donnée; on a donc obtenu l'*équation générale* demandée.

2° Soit $Ax + By + C = 0$ l'équation d'une droite donnée; l'équation générale des parallèles à cette droite est

$$Ax + By + \lambda = 0,$$

λ désignant un paramètre arbitraire. En effet, pour que les droites représentées par les équations

$$Ax + By + C = 0, \qquad A'x + B'y + C' = 0$$

soient parallèles, il faut et il suffit que $AB' - BA' = 0$, c'est-à-dire que

$$A' = kA, \qquad B' = kB,$$

k désignant un facteur arbitraire, différent de zéro; l'équation cherchée est donc

$$Ax + By + \frac{C'}{k} = 0,$$

$\frac{C'}{k}$ étant arbitraire et pouvant être désigné par une seule lettre λ.

Si, pour abréger, on désigne par P le polynome $Ax + By + C$, l'équation $P + \lambda = 0$ est l'équation générale des droites parallèles à la droite $P = 0$.

On peut encore l'écrire sous la forme

$$aP + b = 0,$$

en remplaçant λ par $\frac{b}{a}$.

Il résulte de là que, si $P = 0$, $Q = 0$ représentent deux droites parallèles, l'équation

$$\alpha P + \beta Q + \gamma = 0$$

représente une droite parallèle aux premières, quels que soient α, β, γ. En effet, on a

$$Q \equiv aP + b;$$

donc

$$\alpha P + \beta Q + \gamma \equiv (\alpha + a\beta)P + b\beta + \gamma.$$

95. *Équation de la droite passant par un point* (x_0, y_0) *et parallèle à une direction donnée.* — Si la direction donnée est définie par les paramètres a, b, la question est déjà résolue, et l'équation demandée est

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b},$$

ou encore

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

m étant le coefficient angulaire.

Si la droite donnée a pour équation

$$Ax + By + C = 0,$$

la parallèle menée par (x_0, y_0) a pour équation

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

96. *Équation de la droite passant par deux points donnés* $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. — Exprimons que l'équation

(1) $$Ax + By + C = 0$$

est vérifiée quand on remplace les coordonnées variables x, y successivement par x_1, y_1 et x_2, y_2, ce qui donne

(2) $$Ax_1 + By_1 + C = 0,$$

(3) $$Ax_2 + By_2 + C = 0.$$

Ces deux équations sont homogènes et du premier degré par rapport

à A, B, C. Si les deux points donnés sont distincts, l'un au moins des déterminants déduits du tableau rectangulaire

$$\begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{Vmatrix}$$

est différent de zéro, et par suite les rapports des coefficients A, B, C sont déterminés. En remplaçant dans (1) : A, B, C par les quantités $y_1 - y_2$, $-(x_1 - x_2)$ et $x_1 y_2 - y_1 x_2$ qui leur sont proportionnelles, on obtient l'équation demandée

(4) $$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0.$$

La question revient à éliminer A, B, C entre les équations (1), (2), (3) et, par suite, l'équation demandée peut s'écrire sous forme de déterminant :

(5) $$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

D'ailleurs l'équation (5) est du premier degré, et son premier membre devient nul quand on fait $x = x_1$, $y = y_1$, et quand on fait $x = x_2$, $y = y_2$.

Il résulte de ce qui précède que le coefficient angulaire de la droite $M_1 M_2$ est égal à

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

C'est ce que l'on obtient encore en exprimant que la droite représentée par l'équation

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

passe par M_2.

L'équation $M_1 M_2$ peut encore s'écrire

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

On voit ainsi que les paramètres directeurs de la droite $M_1 M_2$ sont proportionnels aux différences $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$.

97. *Cas particulier.* — Les points donnés sont sur les axes; dans ce cas, en posant $x_1 = \alpha$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = \beta$, on obtient

l'équation

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1.$$

Les points donnés s'appellent alors les *traces* de la droite sur les axes.

On peut obtenir directement cette équation; en effet, dans ce cas, le système (2), (3) devient

$$A\alpha + C = 0, \qquad B\beta + C = 0,$$

d'où

$$A = -\frac{C}{\alpha}, \qquad B = -\frac{C}{\alpha},$$

et par suite l'équation demandée est

$$-\frac{C}{\alpha}x - \frac{C}{\beta}y + C = 0,$$

et, en remarquant que C est arbitraire et supprimant ce facteur commun, on obtient le résultat annoncé.

Lorsque A et B tendent vers zéro, C conservant une valeur finie, α et β croissent indéfiniment et la droite est rejetée à l'infini.

98. *Exprimer que les trois points* $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ *sont en ligne droite.* — Il n'y a qu'à écrire que M_3 est sur la droite M_1M_2, ce qui donne la condition

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

99. *Trouver les coordonnées du point commun à deux droites.* — Soient

$$(1) \qquad Ax + By + C = 0,$$

$$(2) \qquad A'x + B'y + C' = 0$$

les équations des deux droites. Les coordonnées de tout point commun à ces deux droites vérifient ces deux équations; et réciproquement, à toute solution x_0, y_0 du système (1), (2) correspond un point (x_0, y_0) commun aux deux droites. Le problème est ainsi ramené à un problème d'Algèbre. Il y a plusieurs cas à distinguer.

1° $AB' - BA' \neq 0$; le système proposé a une solution unique : les deux droites sont concourantes, et les coordonnées de leur point d'intersection sont

$$x = \frac{BC' - CB'}{AB' - BA'}, \qquad y = \frac{CA' - AC'}{AB' - BA'}.$$

2° $AB' - BA' = 0$, l'un des coefficients de x et y, A, par exemple. étant différent de zéro; le déterminant caractéristique est $AC' - CA'$.

(*a*) $AC' - CA' \neq 0$: les deux droites sont parallèles et distinctes. On convient de dire qu'elles ont un point commun à l'infini. Il peut arriver que la seconde droite soit rejetée à l'infini.

(*b*) $AC' - CA' = 0$; les deux droites sont confondues.

3° $A = A' = B = B' = 0$; si l'on suppose $C \neq 0$ et $C' \neq 0$ les deux droites sont entièrement à l'infini; si $C = 0$, la première est indéterminée; si $C' = 0$, il en est de même de la seconde.

100. *Condition pour que trois droites définies par leurs équations soient concourantes ou parallèles.* — Soient

$$(1) \qquad \begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ A'x + B'y + C' = 0, \\ A''x + B''y + C'' = 0 \end{cases}$$

les équations des trois droites données.

1° Pour exprimer que ces trois droites sont concourantes, il faut exprimer que deux de ces droites sont concourantes et que la troisième passe par le point de concours des deux autres. On a ainsi une première condition : l'un au moins des déterminants

$$AB' - BA', \qquad A'B'' - B'A'', \qquad A''B - B''A$$

doit être différent de zéro. Or, quel que soit celui de ces déterminants qu'on suppose différent de zéro, il pourra être regardé comme étant le déterminant principal du système (1), et le déterminant caractéristique sera le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix};$$

on doit donc poser

$$\Delta = 0.$$

Ainsi, en résumé, pour que les trois droites données soient concourantes, il faut que $\Delta = 0$, et que *l'un au moins des mineurs formés avec les coefficients de x et de y soit différent de zéro.*

Remarque. — Quand on suppose ces conditions remplies, il peut arriver que deux des droites soient concourantes et que la troisième soit confondue avec l'une des deux autres; il peut encore arriver que la troisième soit entièrement indéterminée. Les conditions précédentes sont, en effet, remplies, si l'on suppose, par exemple, $AB' - BA' \neq 0$ avec $A'' = B'' = C'' = 0$.

2° Pour que les droites données soient parallèles, il est nécessaire que les trois mineurs

$$AB' - BA', \qquad A'B'' - B'A'', \qquad A''B - B''A$$

soient nuls, et la condition $\Delta = 0$ est encore remplie.

Réciproquement, si ces conditions sont remplies et si l'on suppose, par exemple, $A \neq 0$, et que l'un des déterminants caractéristiques

$$AC' - CA', \qquad AC'' - CA''$$

soit différent de zéro, les droites données sont parallèles; elles n'ont aucun point commun à distance finie. Il peut arriver alors que l'une de ces droites soit entièrement à l'infini.

Lorsque $A \neq 0$, $AC' - CA' = 0$, $AC'' - CA'' = 0$, les trois mineurs étant toujours supposés nuls, les trois droites sont confondues.

Enfin, lorsque $A = A' = A'' = B = B' = B'' = 0$, les trois droites sont à l'infini. Mais, si $C = 0$, la première droite est indéterminée; pareillement pour la deuxième et la troisième, si $C' = 0$ ou $C'' = 0$.

En résumé, la condition $\Delta = 0$ exprime que les droites données sont concourantes, parallèles, ou encore que deux au moins sont confondues.

Il en résulte que, si l'on suppose $\Delta \neq 0$, ces droites sont distinctes et ne sont ni concourantes ni parallèles, et par suite elles pourront former un triangle, ou bien deux seront parallèles, la troisième les coupant; ou enfin l'une d'elles pourra être à l'infini, les deux autres étant à distance finie et concourantes.

101. Corollaire. — *Si l'on représente par* L, M, P *les premiers membres des équations* (1), *de sorte que les droites don-*

nées soient définies par les équations $L = 0$, $M = 0$, $P = 0$, *pour que ces droites soient concourantes ou parallèles, il faut et il suffit qu'il existe trois nombres* a, b, c *non tous nuls, vérifiant l'identité*

$$aL + bM + cP \equiv 0.$$

En effet, le système d'équations

$$\begin{aligned} Aa + A'b + A''c &= 0, \\ Ba + B'b + B''c &= 0, \\ Ca + C'b + C''c &= 0 \end{aligned}$$

admet des solutions non toutes nulles si le déterminant Δ est nul.

Réciproquement, supposons l'identité précédente vérifiée et soit, par exemple, $c \neq 0$; on en tire

$$P \equiv -\frac{a}{c} L - \frac{b}{c} M.$$

L'équation $P = 0$ est donc équivalente à l'équation

$$aL + bM = 0.$$

Supposons d'abord que les droites définies par les équations $L = 0$, $M = 0$ soient concourantes. Les coordonnées du point de concours de ces deux droites vérifient l'équation précédente, ce qui prouve que la droite P passe par le point de concours des deux autres. Si les droites L et M sont parallèles, $aL + bM = 0$ représente une droite parallèle aux mêmes droites (n° 92); donc alors les trois droites données sont parallèles.

Si c est nul, on a $L \equiv -\frac{b}{a} M$; alors les droites L et M sont confondues.

102. *Équation générale des droites passant par le point de concours de deux droites données.* — Soient $L = 0$, $M = 0$ les équations de deux droites que nous supposerons concourantes. Si l'équation $P = 0$ représente une droite passant par le point de concours des deux premières, il existe, comme on vient de le voir, trois nombres a, b, c non tous nuls et tels que

$$aL + bM + cP \equiv 0.$$

Le coefficient c est nécessairement différent de zéro, sans quoi les

droites L et M seraient confondues; on a donc

$$P \equiv -\frac{a}{c}L - \frac{b}{c}M,$$

et, par suite, toute droite P passant par le point de concours des deux premières a pour équation

$$aL + bM = 0,$$

a et b étant deux constantes.

Réciproquement, toute équation de cette forme représente une droite passant par le point de concours des deux droites L et M; car si x' et y' sont les coordonnées du point de concours de ces deux droites, en désignant par L' ce que devient le polynome L quand on y remplace x par x' et y par y', et par M' ce que devient M quand on fait la même substitution, on a $L' = 0$ et $M' = 0$, et par suite aussi

$$aL' + bM' = 0.$$

Donc l'équation

$$aL + bM = 0$$

est bien l'équation générale demandée.

On peut arriver directement au résultat précédent.

A cet effet, on remarque d'abord, comme nous venons de le faire, que l'équation

$$aL + bM = 0 \tag{1}$$

représente, quelles que soient les deux constantes a, b (auxquelles nous attribuerons toujours des valeurs finies), une droite passant par le point de concours A des droites L et M. Il reste à montrer qu'on peut attribuer aux coefficients a et b des valeurs telles que l'équation précédente soit celle d'une droite donnée D passant par le point A. Pour cela, prenons sur la droite D un point quelconque $M(x_1, y_1)$ différent de A; en désignant par L_1 et M_1 les résultats de la substitution de x_1 à x et de y_1 à y dans les polynomes L et M, l'équation

$$LM_1 - ML_1 = 0$$

représente évidemment la droite AM; donc il suffit de prendre $a = M_1$, $b = -L_1$ pour que l'équation (1) représente la droite D.

En particulier, en faisant $a = 0$, on obtient la droite M, et, en supposant $b = 0$, on a la droite L.

On peut faire usage de l'équation

$$L + \lambda M = 0;$$

mais, pour que cette équation puisse représenter la droite M, il faudra supposer λ infini; en effet, en écrivant l'équation précédente sous la forme

$$\frac{1}{\lambda} L + M = 0,$$

le premier membre se réduit bien à M quand on suppose λ infini.

103. *Remarque.* — Il convient de remarquer que, si λ croît de $-\infty$ à $+\infty$, la droite représentée par l'équation (1) tourne autour de son point fixe toujours dans un même sens. Cela résulte évidemment de ce que les équations

$$L + \lambda M = 0, \qquad L + \lambda' M = 0$$

représentent deux droites distinctes, quand on suppose les droites L et M distinctes elles-mêmes.

104. Application. — *Équation de la droite passant par un point donné et par le point de concours de deux droites.* — Soient $Ax + By + C = 0$, $A'x + B'y + C' = 0$ les équations des deux droites données; d'après ce que nous venons de dire, l'équation

$$(Ax + By + C)(A'x_1 + B'y_1 + C') - (A'x + B'y + C')(Ax_1 + By_1 + C) = 0,$$

représente la droite passant par le point de concours des deux droites données et par le point x_1, y_1; dans le cas particulier où le point donné est l'origine, on obtient l'équation

$$(AC' - CA')x + (BC' - CB')y = 0.$$

105. Théorème. — *Si les coefficients de l'équation d'une droite renferment un paramètre variable au premier degré, cette droite tourne autour d'un point fixe.*

En effet, l'équation considérée est de la forme

$$(1) \qquad (a + \lambda a')x + (b + \lambda b')y + c + \lambda c' = 0$$

ou

$$ax + by + c + \lambda(a'x + b'y + c') = 0;$$

elle représente donc une infinité de droites passant par le point de

concours des deux droites représentées par les équations

(2) $$ax + by + c = 0, \qquad a'x + b'y + c' = 0.$$

Cette conclusion n'a de sens que si ces deux équations représentent deux droites distinctes. Si l'on suppose, au contraire,

$$a = ha', \qquad b = hb', \qquad c = hc',$$

l'équation proposée est de la forme

$$(h + \lambda)(a'x + b'y + c') = 0;$$

elle représente donc une droite fixe ayant pour équation

$$a'x + b'y + c' = 0,$$

à moins que l'on ne donne à λ la valeur $-h$; dans ce cas, elle est indéterminée.

Si les droites représentées par les équations (2) sont parallèles, l'équation (1) représente toutes les droites parallèles aux premières quand on fait varier λ de $-\infty$ à $+\infty$.

106. Théorème. — *Étant donnés trois polynomes entiers en x et y, du premier degré, et indépendants*

$$A \equiv ax + by + c, \qquad B \equiv a'x + b'y + c', \qquad C \equiv a''x + b''y + c'',$$

l'équation d'une droite quelconque du plan peut se mettre sous la forme

$$lA + mB + pC = 0,$$

l, m, p étant des constantes.

En effet, soit

$$ux + vy + w = 0$$

l'équation d'une droite quelconque. On peut résoudre le système

$$\begin{aligned} al + a'm + a''p &= u, \\ bl + b'm + b''p &= v, \\ cl + c'm + c''p &= w, \end{aligned}$$

car le déterminant des coefficients des inconnues l, m, p est supposé différent de zéro.

107. Théorème. — *Les trois polynomes* A, B, C *étant supposés*

indépendants, la condition nécessaire et suffisante pour que les droites représentées par les équations

$$
\begin{aligned}
lA + mB + pC &= 0,\\
l'A + m'B + p'C &= 0,\\
l''A + m''B + p''C &= 0
\end{aligned}
$$

soient concourantes ou parallèles est

$$
\begin{vmatrix} l & m & p \\ l' & m' & p' \\ l'' & m'' & p'' \end{vmatrix} = 0.
$$

En effet, si l'on remplace A, B, C par leurs expressions en x et y, on reconnaît que le déterminant complet du système formé par les équations du premier degré précédentes est égal au produit

$$
\begin{vmatrix} l & m & p \\ l' & m' & p' \\ l'' & m'' & p'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix};
$$

le second de ces déterminants étant différent de zéro, la condition nécessaire et suffisante pour que ce produit soit nul est que le premier facteur soit nul.

108. On peut établir directement cette proposition.

Si les trois droites données ont un point commun x_1, y_1, en désignant par A_1, B_1, C_1 ce que deviennent A, B, C quand on y fait $x = x_1$, $y = y_1$, on aura

$$
\begin{aligned}
lA_1 + mB_1 + pC_1 &= 0,\\
l'A_1 + m'B_1 + p'C_1 &= 0,\\
l''A_1 + m''B_1 + p''C_1 &= 0.
\end{aligned}
$$

Or A_1, B_1, C_1 ne peuvent être nuls tous trois, puisque les droites A, B, C n'ont aucun point commun; donc le déterminant δ des coefficients de A_1, B_1, C_1 est nul.

La conclusion subsiste si les trois droites sont parallèles; car, si l'on nomme x_0, y_0 les paramètres directeurs de la direction commune aux trois droites, en posant

$$
A' = ax_0 + by_0, \qquad B' = a'x_0 + b'y_0, \qquad C' = a''x_0 + b''y_0,
$$

on aura

$$
\begin{aligned}
lA' + mB' + pC' &= 0,\\
l'A' + m'B' + p'C' &= 0,\\
l''A' + m''B' + p''C' &= 0,
\end{aligned}
$$

et l'on ne peut supposer $A'=0$, $B'=0$, $C'=0$; car les droites A, B, C ne sont pas parallèles.

Réciproquement, si le déterminant δ est nul, on peut trouver des nombres α, β, γ non tous nuls et vérifiant les équations

$$\begin{aligned} \alpha l + \beta l' + \gamma l'' &= 0, \\ \alpha m + \beta m' + \gamma m'' &= 0, \\ \alpha p + \beta p' + \gamma p'' &= 0, \end{aligned}$$

et par suite, si U, V, W sont les premiers membres des équations données, on aura

$$\alpha U + \beta V + \gamma W \equiv 0;$$

donc ces droites sont concourantes ou parallèles.

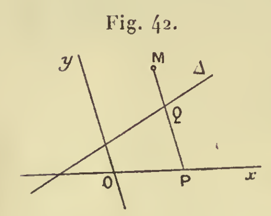
109. *Résolution de l'inégalité*

$$Ax + By + C > 0 \qquad (\text{ou} < 0).$$

Nous établirons d'abord la proposition suivante : *La droite représentée par l'équation* $Ax + By + C = 0$ *partage le plan en deux régions : quand on substitue à x et y dans le polynome* $Ax + By + C$ *les coordonnées d'un point appartenant à l'une de ces régions, le résultat de la substitution a le signe* $+$; *pour tous les points de l'autre région le résultat a le signe* $-$.

En effet, supposons, pour fixer les idées, $B \neq 0$; la droite Δ (*fig.* 42) représentée par l'équation donnée, n'est pas parallèle à l'axe des y. Soit M un point quelconque, ayant pour coordonnées x', y'; la parallèle à l'axe des y menée par M rencontre Δ en un point Q et l'axe des x en un point P;

Fig. 42.



$$\overline{QM} = y' - y'',$$

y'' étant l'ordonnée de Q; or, $Ax' + By'' + C = 0$, d'où il résulte que

$$Ax' + By' + C = B(y' - y'') = B \times \overline{QM}.$$

Cela posé, nous dirons que le point M est situé par rapport à la droite Δ dans la *région des ordonnées positives* quand le segment $\overline{QM}$ aura le signe $+$, c'est-à-dire quand le segment $\overline{QM}$ sera dirigé dans le même sens que la demi-droite $\overline{Oy}$; au contraire, si $\overline{QM}$

a le signe —, c'est-à-dire est dirigé dans le même sens que la demi-droite $\overline{Oy'}$, nous dirons que le point M est par rapport à Δ *dans la région des ordonnées négatives*. D'après la formule précédente, pour tout point (x', y') situé dans la région des ordonnées positives, $Ax' + By' + C$ a le signe de $+B$; et pour tout point de la région des y négatifs, il a le signe de $-B$. Il résulte encore de ce qui précède que $Ax' + By' + C$ et $Ax'' + By'' + C$ ont le même signe ou des signes contraires, suivant que les points (x', y') et (x'', y'') sont situés d'un même côté de la droite Δ ou de côtés différents. Pour abréger le langage, nous dirons que le polynome $Ax + By + C$ prend *au point* (x', y') le signe + ou le signe —, suivant que $Ax' + By' + C$ a le signe + ou le signe —.

Nous appellerons *région positive,* par rapport à la droite Δ, en supposant qu'elle soit représentée par l'équation $Ax + By + C = 0$, la région pour laquelle le polynome $Ax + By + C$ prend des valeurs positives, et région négative celle pour laquelle le même polynome prend des valeurs négatives. D'après ce qui précède, si B est positif, la région positive est celle des y positifs; c'est au contraire celle des y négatifs quand B est négatif. Si $B = 0$, on fera un raisonnement analogue, par rapport à l'axe des x.

Lorsque C est différent de zéro, on peut faire autrement la distinction des deux régions; en effet, *à l'origine* le polynome $Ax + By + C$ se réduit à C; donc la région positive sera celle qui contient l'origine si C est positif, ou celle qui ne contient pas l'origine si C est négatif.

Il convient de remarquer que l'équation de la droite Δ peut être écrite d'une infinité de manières en multipliant A, B, C par un facteur arbitraire; on peut donc toujours s'arranger, si cela est utile, de manière que la région positive soit celle des y positifs ou celle des x positifs, ou encore celle qui contient l'origine si la droite ne passe pas par l'origine.

Cela posé, pour résoudre l'inégalité $Ax + By + C > 0$, on déterminera d'abord la région positive; x et y devront être les coordonnées d'un point quelconque de cette région.

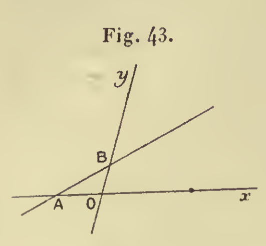
110. *Exemple.* — Résoudre l'inégalité $2x - 3y + 1 > 0$.

La droite représentée (*fig.* 43) par l'équation

$$2x - 3y + 1 = 0$$

rencontre l'axe des x au point A tel que $\overline{OA} = -\frac{1}{2}$ et au point B tel que $\overline{OB} = +\frac{1}{3}$. Pour que l'inégalité donnée soit vérifiée, il faut et il suffit que x et y soient les coordonnées d'un quelconque des points situés par rapport à AB du même côté que l'origine.

Fig. 43.



111. *Applications.* — En nommant α, β les angles que la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite Δ ayant pour équation $Ax + By + C = 0$ fait avec les axes et en posant $\theta - \alpha = \beta$, $R = +\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$, nous avons trouvé

$$\cos\alpha = \varepsilon\frac{A\sin\theta}{R}, \qquad \cos\beta = \varepsilon\frac{B\sin\theta}{R}.$$

Prenons sur la demi-droite définie par ces formules, à partir de l'origine, un segment dont la valeur absolue soit égale à l. Les coordonnées x', y' de l'extrémité de ce segment sont déterminées par les équations

$$x' + y'\cos\theta = l\cos\alpha, \qquad x'\cos\theta + y' = l\cos\beta,$$

d'où

$$x' = l\frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\theta}{\sin^2\theta}, \qquad y' = l\frac{\cos\beta - \cos a\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

et par suite

$$Ax' + By' + C = \varepsilon\frac{R}{\sin\theta}l + C.$$

Si l'on suppose la longueur l suffisamment grande, le second membre a le signe de ε; donc, si $\varepsilon = +1$, on choisit sur la perpendiculaire à Δ la demi-droite dirigée vers la région positive du plan par rapport à Δ; à $\varepsilon = -1$, correspond la demi-droite dirigée vers la région négative. Nous nommerons *normale positive* à Δ, la demi-droite perpendiculaire à Δ qui est dirigée vers la région positive relative à Δ, et *normale négative* celle qui est dirigée en sens contraire.

Problèmes relatifs aux angles.

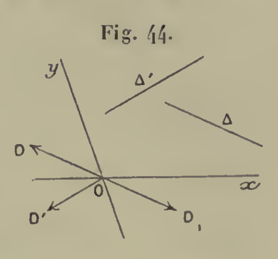
112. Problème. — *Étant données les équations de deux droites* Δ, Δ', *trouver l'angle que la droite* Δ' *fait avec la droite* Δ.

Soient

$$Ax + By + C = 0, \qquad A'x + B'y + C' = 0$$

les équations des droites données. Prenons (*fig.* 44) sur la parallèle à Δ menée par l'origine un point quelconque D et sur la parallèle à Δ′ menée aussi par l'origine un point quelconque D′.

Fig. 44.



L'angle que Δ′ fait avec Δ est défini à un multiple près de π; soit U l'une quelconque de ses déterminations. L'angle que OD′ fait avec OD est défini à un multiple près de 2π; soit V l'une quelconque de ses déterminations; V diffère de U d'un multiple de π, de sorte que $\text{tang}\,V = \text{tang}\,U$. Si nous appelons a, b les coordonnées de D et a', b' celles de D′, nous savons calculer tang V (54), et par suite tang U. Or

$$a = \lambda B, \qquad b = -\lambda A; \qquad a' = \lambda' B', \qquad b' = -\lambda' A';$$

en substituant ces valeurs dans la formule

$$\text{tang}\,V = \frac{(ab' - ba')\sin\theta}{aa' + bb' + (ab' + ba')\cos\theta},$$

nous voyons que les facteurs arbitraires λ, λ′ disparaissent, et il vient

$$\text{tang}(\Delta, \Delta') = \frac{(AB' - BA')\sin\theta}{AA' + BB' - (AB' + BA')\cos\theta}.$$

Il est facile d'expliquer pourquoi λ ni λ′ ne figurent dans la formule définitive; car, si l'on change la valeur absolue de λ, sans changer son signe, le point D se déplace, mais le sens de $\overline{OD}$ ne change pas, de sorte que l'angle V n'est pas altéré; si le signe de λ change, le sens de $\overline{OD}$ est remplacé par le sens opposé $\overline{OD_1}$ et, par suite, l'angle V varie d'un multiple de π, ce qui n'altère pas sa tangente.

113. *Calcul de* cos(Δ, Δ′) *et de* sin(Δ, Δ′). — On a, d'après ce qui précède,

$$\cos(\Delta, \Delta') = \pm\cos V, \qquad \sin(\Delta, \Delta') = \pm\sin V,$$

sans qu'on puisse savoir quel signe on doit prendre, attendu que l'équation de chaque droite Δ ou Δ′ ne donne ni le sens de $\overline{OD}$ ni celui de $\overline{OD'}$, qui peuvent être remplacés chacun par un segment de sens opposé. Or les formules donnant cos V et sin V contiennent en

dénominateur les radicaux

$$\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta} \quad \text{et} \quad \sqrt{a'^2+b'^2+2a'b'\cos\theta},$$

que l'on doit prendre en valeur absolue; en remplaçant a, b, a', b' par leurs expressions données plus haut, on obtient

$$\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta} = \varepsilon\lambda\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta} \qquad (\varepsilon=\pm 1),$$
$$\sqrt{a'^2+b'^2+2a'b'\cos\theta} = \varepsilon'\lambda'\sqrt{A'^2+B'^2-2A'B'\cos\theta} \qquad (\varepsilon'=\pm 1),$$

de sorte que

$$\cos(\Delta,\Delta') = \frac{AA'+BB'-(AB'+BA')\cos\theta}{\varepsilon\varepsilon' RR'}, \quad \sin(\Delta,\Delta') = \frac{(AB'-BA')\sin\theta}{\varepsilon\varepsilon' RR'},$$

où l'on a posé

$$R = +\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}, \qquad R' = +\sqrt{A'^2+B'^2-2A'B'\cos\theta}.$$

Si l'on convient, par exemple, de choisir le point D et le point D' de façon que leurs abscisses soient positives, on devra donner à λ un signe tel que λB soit positif et de même $\lambda' B'$ devra être positif; ensuite, $\varepsilon\lambda$ et $\varepsilon'\lambda'$ devant être positifs, les signes de ε et de ε' seront aussi déterminés.

Lorsque les axes sont rectangulaires les formules précédentes se simplifient et deviennent

$$\operatorname{tang}(\Delta,\Delta') = \frac{AB'-BA'}{AA'+BB'}, \qquad \cos(\Delta,\Delta') = \pm\frac{AA'+BB'}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A'^2+B'^2}},$$
$$\sin(\Delta,\Delta') = \pm\frac{AB'-BA'}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A'^2+B'^2}}.$$

114. *Usage des coefficients angulaires.* — Si les équations des droites sont données sous la forme

$$y = mx+h, \qquad y = m'x+h',$$

il suffit de poser

$$A = m, \qquad B = -1, \qquad A' = m', \qquad B' = -1$$

et l'on obtient

$$\cos(\Delta,\Delta') = \pm\frac{1+mm'+(m+m')\cos\theta}{\sqrt{1+2m\cos\theta+m^2}\sqrt{1+2m'\cos\theta+m'^2}},$$
$$\operatorname{tang}(\Delta,\Delta') = \frac{(m'-m)\sin\theta}{1+mm'+(m+m')\cos\theta},$$
$$\sin(\Delta,\Delta') = \pm\frac{(m'-m)\sin\theta}{\sqrt{1+2m\cos\theta+m^2}\sqrt{1+2m'\cos\theta+m'^2}};$$

quand les axes sont rectangulaires

$$\operatorname{tang}(\Delta, \Delta') = \frac{m' - m}{1 + mm'}, \qquad \cos(\Delta, \Delta') = \pm \frac{1 + mm'}{\sqrt{1 + m^2}\sqrt{1 + m'^2}},$$

$$\sin(\Delta, \Delta') = \pm \frac{m' - m}{\sqrt{1 + m^2}\sqrt{1 + m'^2}}.$$

115. *Remarques.* — 1° Les termes tout connus C, C′ n'interviennent pas dans les formules précédentes.

2° Les signes des radicaux dans $\sin(\Delta, \Delta')$ et $\cos(\Delta, \Delta')$ sont les mêmes.

116. *Autre méthode.* — Abaissons de l'origine des perpendiculaires sur Δ et Δ'; en nommant α et α' les angles que les directions positives de ces perpendiculaires font avec $\overline{Ox}$, on a trouvé

$$\cos\alpha = \varepsilon \frac{A \sin\theta}{R}, \qquad \cos(\theta - \alpha) = \varepsilon \frac{B \sin\theta}{R};$$

on en déduit

$$\sin\alpha = \varepsilon \frac{B - A\cos\theta}{R},$$

et pareillement

$$\cos\alpha' = \varepsilon' \frac{A' \sin\theta}{R'}, \qquad \sin\alpha' = \varepsilon' \frac{B' - A'\cos\theta}{R'}.$$

D'où, à l'aide d'un calcul facile,

$$\cos(\alpha' - \alpha) = \varepsilon\varepsilon' \frac{AA' + BB' - (AB' + BA')\cos\theta}{RR'},$$

$$\sin(\alpha' - \alpha) = \varepsilon\varepsilon' \frac{(AB' - BA')\sin\theta}{RR'},$$

$$\operatorname{tang}(\alpha' - \alpha) = \frac{(AB' - BA')\sin\theta}{AA' + BB' - (AB' + BA')\cos\theta}.$$

Or $(\Delta, \Delta') = \alpha' - \alpha + k\pi$. On retrouve donc les formules obtenues plus haut. Mais on voit que si l'on suppose $\varepsilon\varepsilon' = +1$, les formules précédentes donnent le cosinus et le sinus de l'angle formé par les normales positives ou par les normales négatives; si $\varepsilon\varepsilon' = -1$, on a le cosinus et le sinus de l'angle formé par une normale positive et une normale négative.

117. *Condition pour que deux droites définies par leurs équations soient orthogonales.* — Si D et D′ sont les points directeurs des droites Δ et Δ', pour que ces droites soient rectangulaires, il faut et il suffit que OD et OD′ soient rectangulaires; la condition demandée s'obtient en remplaçant a, b et a', b' par leurs expressions

λB, $-\lambda A$; $\lambda' B'$, $-\lambda' A'$ dans l'équation

$$aa' + bb' + (ab' + ba')\cos\theta = 0,$$

ce qui donne

$$AA' + BB' - (AB' + BA')\cos\theta = 0,$$

ou, si l'on appelle m et m' les coefficients angulaires,

$$1 + mm' + (m + m')\cos\theta = 0.$$

Si les axes sont rectangulaires, on a les conditions

$$AA' + BB' = 0$$

ou

$$1 + mm' = 0.$$

118. On obtient encore la condition précédente en écrivant que $\operatorname{tang}(\Delta, \Delta')$ est infinie ou que $\cos(\Delta, \Delta')$ est nul.

De même, en écrivant que $\operatorname{tang}(\Delta, \Delta') = 0$ ou $\sin(\Delta, \Delta') = 0$, on retrouve la condition de parallélisme : $AB' - BA' = 0$.

119. Application. — *Condition de parallélisme ou d'orthogonalité des droites ayant pour équations*

$$Ax + By + C = 0$$

et

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

1° La condition du parallélisme est

$$Aa + Bb = 0,$$

elle exprime que le point directeur (a, b) de la seconde droite est sur la parallèle à la première, menée par l'origine.

2° En remarquant que les paramètres directeurs de la première droite sont proportionnels à B, $-A$, on trouve pour condition d'orthogonalité, si l'on suppose les axes rectangulaires,

$$aB - bA = 0$$

ou

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B}.$$

Si les axes sont obliques, la condition est

$$aB - bA + (Bb - Aa)\cos\theta = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{a}{A - B\cos\theta} = \frac{b}{B - A\cos\theta},$$

ou encore

$$\frac{A}{a + b\cos\theta} = \frac{B}{a\cos\theta + b}.$$

120. *Mener par un point donné une droite faisant avec une droite donnée un angle donné* V. — Soit m le coefficient angulaire de la droite donnée ; le problème sera résolu si nous savons calculer le coefficient angulaire m' de la droite cherchée. On doit poser

$$\frac{(m' - m)\sin\theta}{1 + mm' + (m + m')\cos\theta} = \operatorname{tang} V,$$

ce qui donne pour m' une seule valeur. En supposant $\theta = \frac{\pi}{2}$, on trouve

$$m' = \frac{m + \operatorname{tang} V}{1 - m \operatorname{tang} V}.$$

Le problème analogue de Géométrie élémentaire a deux solutions ; l'une des droites trouvées fait avec la proposée un angle égal à V ; la seconde droite correspond à l'angle $\pi - V$. Le coefficient angulaire m'' de cette seconde droite est donné par la formule

$$m'' = \frac{m - \operatorname{tang} V}{1 + m \operatorname{tang} V}.$$

121. *Remarque.* — Pour déterminer une droite faisant des angles égaux avec deux droites dont les coefficients angulaires sont m, m' ; on aurait à résoudre l'équation

$$\frac{\mu - m}{1 + m\mu} = \frac{\mu - m'}{1 + m'\mu},$$

μ étant le coefficient angulaire de la droite demandée, et les axes étant supposés rectangulaires. L'équation précédente se réduit à

$$(m' - m)(1 + \mu^2) = 0,$$

ou, en supposant $m' - m \neq 0$,

$$1 + \mu^2 = 0.$$

Le problème ainsi posé est impossible. Il faut remarquer que la

bissectrice d'un angle fait avec ses côtés des angles *égaux* et de *signes contraires*.

122. Problème. — *Trouver l'équation de la perpendiculaire menée par un point* A *à une droite* Δ, *ainsi que les coordonnées du pied de cette perpendiculaire.*

1° *Axes rectangulaires.* — Soient x_0, y_0 les coordonnées du point donné A et

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

l'équation de la droite Δ.

La perpendiculaire abaissée de A sur Δ a pour équation (119)

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B}. \tag{2}$$

On aura les coordonnées du pied de la perpendiculaire en résolvant le système formé par les équations (1) et (2). Pour cela, on prend comme inconnue auxiliaire la valeur commune des deux rapports (2) et l'on pose

$$x = x_0 + A\rho, \qquad y = y_0 + B\rho; \tag{3}$$

en portant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient immédiatement

$$\rho = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}. \tag{4}$$

Les formules (3) et (4) résolvent la question proposée.

2° *Axes obliques.* — On procède de la même façon, mais le calcul est un peu plus long. La perpendiculaire a pour équation

$$\frac{x - x_0}{A - B\cos\theta} = \frac{y - y_0}{B - A\cos\theta} = \rho;$$

en exprimant les coordonnées d'un point de cette perpendiculaire au moyen de ρ et écrivant que ce point est sur la droite donnée, on obtient

$$\rho = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta},$$

ce qui détermine, comme plus haut, le pied de la perpendiculaire.

123. Exercice. — *Vérifier que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.* — Soient

$$Ax + By + C = 0, \qquad A'x + B'y + C' = 0, \qquad A''x + B''y + C'' = 0$$

les équations des trois côtés BC, CA, AB du triangle ABC. La hauteur correspondant au côté BC passant par le point de concours des deux autres côtés, son équation est de la forme

$$A'x + B'y + C' + \lambda(A''x + B''y + C'') = 0.$$

La condition

$$A(A' + \lambda A'') + B(B' + \lambda B'') = 0$$

exprime qu'elle est perpendiculaire au côté BC; on en tire

$$\lambda = -\frac{AA' + BB'}{AA'' + BB''}$$

et, par suite, cette hauteur a pour équation

$$(A'x + B'y + C')(AA'' + BB'') - (A''x + B''y + C'')(AA' + BB') = 0.$$

On formera de la même manière les équations des deux autres hauteurs et l'on vérifiera que la somme des premiers membres est identiquement nulle, ce qui prouve que ces trois droites sont concourantes.

Problèmes relatifs aux distances.

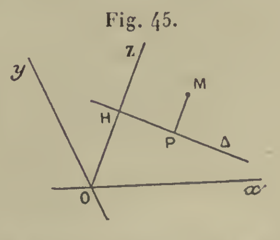
124. Problème. — *Trouver la distance d'un point défini par ses coordonnées à une droite représentée par son équation.*

Soient x_0, y_0 les coordonnées du point donné M (*fig.* 45) et

$$Ax + By + C = 0$$

l'équation d'une droite Δ; enfin, soit θ l'angle des axes coordonnés.

Fig. 45.



Abaissons de l'origine des coordonnées une perpendiculaire sur la droite Δ et prenons sur cette droite un sens déterminé $\overline{OZ}$; si MP est la perpendiculaire abaissée du point M sur la droite Δ, nous désignerons par d le segment $\overline{PM}$ compté avec le signe + si $\overline{PM}$ a même sens que $\overline{OZ}$, et avec le signe — dans le cas contraire, ainsi que nous l'avons fait plus haut (82).

L'angle que la demi-droite OZ fait avec la demi-droite Ox étant désigné par α, nous avons trouvé les formules

$$d = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos(\theta - \alpha) - p$$

et

$$\cos\alpha = \lambda A, \quad \cos(\theta - \alpha) = \lambda B, \quad -p = \lambda C, \quad \lambda = \varepsilon \frac{\sin\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}.$$

Il en résulte que

$$(1) \qquad d = \varepsilon \frac{(Ax_0 + By_0 + C)\sin\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Quand les axes sont rectangulaires

$$(1)' \qquad d = \varepsilon \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Dans tous les cas, on peut poser

$$d = k(Ax_0 + By_0 + C),$$

k étant une constante indépendante des coordonnées du point M.

En résumé, nous appellerons distance d'un point M à une droite Δ le segment $\overline{PM}$, P étant le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur Δ. Si l'on prend $\varepsilon = +1$, la formule (1) ou (1)′ donne pour d une valeur positive quand le point M est dans la région positive du plan par rapport à Δ, et une valeur négative quand le point M est dans l'autre région. Quel que soit le signe de ε, les distances de deux points situés d'un même côté de Δ auront le même signe, et les distances de deux points situés de part et d'autre de Δ auront des signes contraires.

125. *Bissectrices d'un angle.* — Soient

$$Ax + By + C = 0, \qquad A'x + B'y + C' = 0$$

les équations des deux côtés de l'angle. Nous aurons l'équation d'une bissectrice en exprimant que les distances d'un point (x, y) aux deux côtés de l'angle sont égales, ce qui donne

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}} = \pm \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\theta}}.$$

Le signe + correspond à la bissectrice située dans les deux ré-

gions du plan qui ont le même signe par rapport aux deux côtés de l'angle, le signe — correspond à l'autre bissectrice.

126. *Autre méthode.* — Soient (*fig.* 46) A et B deux points ayant pour coordonnées a, b, et a', b' respectivement; si l'on construit un parallélogramme sur OA et OB, le quatrième sommet M a pour coordonnées $a+a'$ et $b+b'$; il en résulte que l'équation de OM est

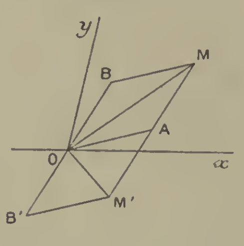


Fig. 46.

$$\frac{x}{a+a'} = \frac{y}{b+b'}.$$

Si B' est le point symétrique de B par rapport à l'origine, on voit de même que la diagonale OM' du parallélogramme construit sur OA et OB' a pour équation

$$\frac{x}{a-a'} = \frac{y}{b-b'}.$$

Si l'on suppose OA = OB = OB', les équations précédentes seront celles des bissectrices des angles AOB, AOB', puisque les parallélogrammes que nous venons de considérer deviennent des losanges.

Cela étant, si l'on donne les équations de deux droites, on peut trouver les paramètres directeurs de ces droites, et en supposant les points directeurs à l'unité de distance, ces paramètres sont, comme nous le savons,

$$a = \varepsilon\frac{B}{R}, \qquad b = -\varepsilon\frac{A}{R}, \qquad a' = \varepsilon'\frac{B'}{R'}, \qquad b' = -\varepsilon'\frac{A'}{R'},$$

R et R' ayant les significations indiquées plus haut; il en résulte que les bissectrices seront définies par les équations

$$\frac{x-x_0}{\frac{B}{R}+\varepsilon\frac{B'}{R'}} = \frac{y-y_0}{-\left(\frac{A}{R}+\varepsilon\frac{A'}{R'}\right)},$$

x_0 et y_0 étant les coordonnées du point de concours des deux droites données. En développant, on retrouve la même équation que plus haut.

127. Problème. — *Déterminer le rapport dans lequel une droite définie par son équation partage un segment, connaissant les coordonnées des extrémités de ce segment.*

Si l'on désigne par (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées des deux points M_1, M_2, un point quelconque M de la droite M_1M_2 a pour coordonnées

$$x' = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y' = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Écrivons que ce point est sur la droite représentée par l'équation

$$Ax + By + C = 0.$$

L'équation obtenue, résolue par rapport à λ, donne

$$-\lambda = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}.$$

Si l'on désigne par P le polynome $Ax + By + C$, par P_1 ce qu'il devient quand on remplace x par x_1 et y par y_1, etc., on a

$$\frac{MM_1}{MM_2} = \frac{P_1}{P_2}.$$

Ce résultat était facile à prévoir, car le rapport $\frac{MM_1}{MM_2}$ est égal au rapport des distances des points M_1, M_2 à la droite Δ, et, de plus, il est positif ou négatif suivant que les points M_1, M_2 sont du même côté de Δ ou de côtés différents.

Remarque. — Toutes les fois qu'il sera question du rapport dans lequel une droite Δ partage un segment $\overline{M_1M_2}$, nous considérerons le rapport $\frac{MM_1}{MM_2}$, M étant le point de rencontre de la droite donnée et de la droite M_1M_2, et nous appellerons ce rapport le *rapport de partage* du segment $\overline{M_1M_2}$ par la droite Δ.

128. Problème. — *Trouver dans quel rapport le segment* $\overline{M_1M_2}$ *est coupé par le segment* $\overline{M_3M_4}$.

Soient x_p, y_p les coordonnées d'un point M_p; la droite M_3M_4 ayant pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

le rapport $\frac{MM_1}{MM_2}$ a pour valeur

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix},$$

M étant le point de rencontre des deux droites M_1M_2 et M_3M_4. En

représentant par (p, q, r) le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \\ x_r & y_r & 1 \end{vmatrix},$$

le rapport demandé est égal à $(1, 3, 4) : (2, 3, 4)$.

Aire d'un triangle en fonction des coordonnées de ses sommets.

129. La méthode suivante est due à Édouard Lucas.

Soit ABC un triangle; nous regarderons l'aire de ce triangle comme positive si un mobile, parcourant la circonférence du cercle circonscrit à ABC, de manière à rencontrer successivement les sommets A, B, C, tourne dans le sens positif; dans le cas contraire, nous regarderons cette aire comme négative. On peut dire encore dans le premier cas qu'un observateur qui parcourt le périmètre dans le sens ABC a constamment l'aire du triangle à sa gauche.

Cela étant, soient ABC, A'BC deux triangles ayant même base BC et des sommets différents; si l'équation du côté BC est $Ax + By + C = 0$, et si les coordonnées des points A et A' sont x_1, y_1 et x_2, y_2, et si l'on représente par ABC et A'BC les mesures algébriques des aires de ces triangles définies comme nous venons de le faire,

$$\frac{ABC}{A'BC} = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C},$$

car les valeurs absolues des aires de ces triangles sont entre elles comme les distances des sommets non communs à la base commune, et, d'autre part, suivant que les points A et A' sont d'un même côté de la base ou de côtés différents, les aires ont le même signe ou des signes différents.

Cela posé, soient ABC, A'B'C' deux triangles quelconques et $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_6, y_6$ les coordonnées de leurs sommets respectifs; en appliquant les remarques précédentes, on a successivement

$$\frac{ABC}{A'BC} = \frac{(1, 2, 3)}{(4, 2, 3)}, \qquad \frac{A'BC}{A'B'C} = \frac{(4, 2, 3)}{(4, 5, 3)}, \qquad \frac{A'B'C}{A'B'C'} = \frac{(4, 5, 3)}{(4, 5, 6)},$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{(1, 2, 3)}{(4, 5, 6)}.$$

Cela étant, supposons (*fig.* 47) que A', B', C' soient respectivement l'origine, le point D (1,0) et le point E (0, 1), de sorte que l'aire du triangle ODE soit

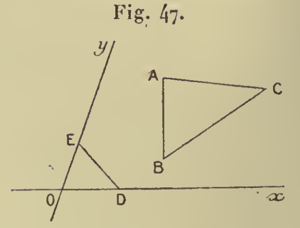
égale à $\frac{1}{2}\sin\theta$; en remarquant que, dans ce cas, le déterminant (4, 5, 6) est égal à $+1$, on a

$$\frac{\text{ABC}}{\frac{1}{2}\sin\theta} = (1, 2, 3),$$

c'est-à-dire

$$\text{ABC} = \frac{1}{2}\sin\theta \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Fig. 47.



Remarque. — On comprend maintenant pourquoi on exprime que les trois points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) sont en ligne droite en écrivant que le déterminant précédent est nul.

130. *Trouver l'aire d'un triangle connaissant les équations de ses trois côtés.* — Soient

$$\text{A}x + \text{B}y + \text{C} = 0, \qquad \text{A}'x + \text{B}'y + \text{C}' = 0, \qquad \text{A}''x + \text{B}''y + \text{C}'' = 0$$

les équations des côtés BC, CA, AB. On obtiendra les coordonnées x_1, y_1 du point A en résolvant le système formé par les deux dernières équations. Désignant par a, b, c, ..., c'' les coefficients de A, B, C, ..., C″ dans le déterminant du système complet des trois équations précédentes, on a $x_1 = \frac{a}{c}$, $y_1 = \frac{b}{c}$; de même les coordonnées du point B sont $x_2 = \frac{a'}{c'}$, $y_2 = \frac{b'}{c'}$ et celles du point C : $x_3 = \frac{a''}{c''}$, $y_3 = \frac{b''}{c''}$; par suite,

$$\text{ABC} = \frac{1}{2}\sin\theta \, \frac{1}{cc'c''} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

ou, en vertu de la propriété fondamentale des déterminants adjoints,

$$\text{ABC} = \frac{\sin\theta}{2.cc'c''} \begin{vmatrix} \text{A} & \text{B} & \text{C} \\ \text{A}' & \text{B}' & \text{C}' \\ \text{A}'' & \text{B}'' & \text{C}'' \end{vmatrix}^2.$$

Remarque. — Cette formule explique pourquoi la condition pour que les droites représentées par les équations précédentes soient concourantes s'obtient en égalant à zéro le déterminant de leurs coefficients.

131. *Aire d'un polygone convexe.* — Soit ABC...L un polygone convexe; joignons tous ses sommets à l'origine des coordonnées; on a, en grandeur et signe,

$$\text{OAB} + \text{OBC} + \ldots + \text{OLA} = \text{S},$$

S désignant l'aire du polygone comptée avec le signe +, si un mobile parcourant le périmètre ABC...L de manière à rencontrer successivement les sommets A, B, ..., L a constamment l'aire à sa gauche. On trouve ainsi

$$\frac{2S}{\sin\theta} = (x_1y_2 - y_1x_2) + (x_2y_3 - y_2x_3) + \ldots + (x_ny_1 - y_nx_1).$$

Centre de gravité, centre des moyennes distances.

132. Considérons dans un même plan un nombre quelconque de points M_1, M_2, ..., M_μ et autant de coefficients m_1, m_2, ..., m_μ leur correspondant respectivement; prenons sur le segment M_1M_2 un point G_1 tel que

$$m_1 . \overline{G_1M_1} + m_2 . \overline{G_1M_2} = 0.$$

Prenons ensuite sur G_1M_3 un point G_2 défini par la relation

$$(m_1 + m_2)\overline{G_2G_1} + m_3\overline{G_2M_3} = 0,$$

puis sur $\overline{G_2M_4}$ un point G_3 défini par la relation

$$(m_1 + m_2 + m_3)\overline{G_3G_2} + m_4\overline{G_3M_4} = 0,$$

et ainsi de suite; nous arriverons finalement à un point $G_{\mu-1}$ défini par la relation

$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_{\mu-1})\overline{G_{\mu-1}G_{\mu-2}} + m_\mu\overline{G_{\mu-1}M_\mu} = 0.$$

Il s'agit de calculer les coordonnées du point $G_{\mu-1}$ que nous désignerons par G. L'abscisse de G_1 est

$$\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2};$$

l'abscisse de G_2 est donc

$$\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

si l'on suppose que l'abscisse de G_{k-1} soit donnée par la formule

$$X_{k-1} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_kx_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k};$$

celle de G_k sera

$$\frac{(m_1 + m_2 + \ldots + m_k)X_{k-1} + m_{k+1}x_{k+1}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k + m_{k+1}}$$

ou

$$\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_kx_k + m_{k+1}x_{k+1}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_{k+1}},$$

il en résulte que l'abscisse du point G est donnée par la formule

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_\mu x_\mu}{m_1 + m_2 + \ldots + m_\mu}$$

et l'on verrait de même que son ordonnée est définie par l'équation

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_\mu y_\mu}{m_1 + m_2 + \ldots + m_\mu};$$

on peut donc poser

$$X = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}, \qquad Y = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}.$$

La symétrie de ces formules montre que, quel que soit l'ordre dans lequel on *compose* les points donnés, on arrivera toujours au même point G.

Les formules précédentes expriment que le produit de la distance du point G à l'un quelconque des axes, c'est-à-dire à une droite quelconque du plan, par la somme des coefficients est égal à la somme des produits de la distance de chaque point à la même droite, multipliée par le coefficient correspondant. Cette propriété est caractéristique. En effet, cherchons un point X, Y satisfaisant à cette condition relativement à une droite que nous pouvons définir par l'équation

$$x \cos\alpha + y \cos(\theta - \alpha) - p = 0,$$

nous devons avoir, en posant $\Sigma m = M$,

$$M[X \cos\alpha + Y \cos(\theta - \alpha) - p] = \Sigma m_k [x_k \cos\alpha + y_k \cos(\theta - \alpha) - p]$$

ou, en simplifiant,

$$\cos\alpha(MX - \Sigma m x) + \cos(\theta - \alpha)(MY - \Sigma m y) = 0.$$

Cette condition doit être vérifiée quelle que soit la droite donnée; en particulier, si l'on suppose $\alpha = \frac{\pi}{2}$, elle se réduit à $MY = \Sigma m y$ et si $\theta - \alpha = \frac{\pi}{2}$, à $MX = \Sigma m x$; ces deux conditions sont donc nécessaires, et elles sont évidemment suffisantes.

En supposant que $m_1, m_2, \ldots, m_\mu$ soient les masses d'un système de points matériels $M_1, M_2, \ldots, M_\mu$, le point G se nomme le centre de gravité de ce système. Lorsque les coefficients $m_1, m_2, \ldots, m_\mu$ sont égaux entre eux, le centre de gravité prend le nom de *centre des moyennes distances;* ses coordonnées sont

$$X = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\mu}{\mu}, \qquad Y = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_\mu}{\mu};$$

on voit que la distance à une droite du centre des moyennes distances d'un

système de points est la moyenne arithmétique des distances de ces points à la droite.

Il résulte de ce qui précède que le point de concours des médianes d'un triangle a pour coordonnées les moyennes arithmétiques des coordonnées de ses sommets. En effet, si nous attribuons aux sommets des coefficients égaux à $+1$, on devra prendre d'abord le milieu D de BC par exemple et lui attribuer le coefficient 2; et ensuite on partagera AD au point G dans le rapport $\frac{1}{2}$ de sorte que $2\overline{DG}+\overline{GA}=0$; le point G aura pour coordonnées

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \quad \frac{y_1+y_2+y_3}{3};$$

ce point est sur la médiane AD; la symétrie de ces expressions montre qu'il est sur chacune des deux autres médianes.

Transversales.

133. Théorème. — *Le produit des rapports segmentaires déterminés sur le périmètre d'un polygone par une droite quelconque est égal à* $+1$.

Soit $M_1M_2\ldots M_\mu$ un polygone quelconque; une droite quelconque Δ coupe les côtés M_1M_2, M_2M_3, ..., $M_\mu M_1$ aux points P_1, P_2, ..., P_μ respectivement; je dis que

$$\frac{P_1M_1}{P_1M_2}\times\frac{P_2M_2}{P_2M_3}\times\cdots\times\frac{P_\mu M_\mu}{P_\mu M_1}=+1.$$

En effet, soit $Ax+By+C=0$ l'équation de la transversale Δ. Représentons par Δ_k le résultat de la substitution de x_k et y_k à x et y dans le polynome $Ax+By+C$; on a

$$\frac{P_1M_1}{P_1M_2}=\frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \qquad \frac{P_2M_2}{P_2M_3}=\frac{\Delta_2}{\Delta_3}, \qquad \ldots, \qquad \frac{P_\mu M_\mu}{P_\mu M_1}=\frac{\Delta_\mu}{\Delta_1}.$$

Donc

$$\frac{P_1M_1}{P_1M_2}\times\frac{P_2M_2}{P_2M_3}\times\ldots\times\frac{P_\mu M_\mu}{P_\mu M_1}$$
$$=\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\,\frac{\Delta_2}{\Delta_3}\cdots\frac{\Delta_\mu}{\Delta_1}=+1.$$

Fig. 48.

En particulier, soit (*fig.* 48) un triangle ABC coupé par une transversale DEF, on a

$$\frac{DB}{DC}\times\frac{EC}{EA}\times\frac{FA}{FB}=+1.$$

134. *Réciproquement, si la relation précédente est vérifiée, les trois points* D, E, F *sont en ligne droite.*

En effet, soit F′ le point où la droite DE coupe le côté AB; on a

$$\frac{DB}{DC} \times \frac{EC}{EA} \times \frac{F'A}{F'B} = +1;$$

en comparant les deux égalités précédentes, on trouve

$$\frac{FA}{FB} = \frac{F'A}{F'B},$$

ce qui démontre que les points F et F′ coïncident; autrement dit, les trois points D, E, F sont en ligne droite.

On peut aussi énoncer une réciproque dans le cas général : si les points P_1, $P_2, \ldots, P_\mu$ vérifient la relation trouvée plus haut, et si $\mu - 1$ de ces points sont sur une ligne droite, le $\mu^{\text{ième}}$ est aussi sur cette droite. La démonstration se fait comme dans le cas du triangle.

Il convient de remarquer que le théorème subsiste lorsqu'on suppose que un ou plusieurs points sont à l'infini. Si la transversale est parallèle au côté M_1M_2 par exemple, il faudra remplacer le rapport $\frac{P_1M_1}{P_1M_2}$ par $+1$.

135. *Démonstration géométrique.* — Poncelet a donné une démonstration très simple du théorème précédent.

Supposons que le côté M_1M_2 par exemple ne soit pas parallèle à la transversale et projetons sur la droite indéfinie M_1M_2 les sommets $M_3, M_4, \ldots, M_\mu$ parallèlement à la transversale en $m_3, m_4, \ldots, m_\mu$; les points de rencontre de la transversale avec les différents côtés du polygone seront tous projetés en P_1. Considérons l'un quelconque des rapports $\frac{P_kM_k}{P_kM_{k+1}}$ par exemple, ce rapport est *projectif*, autrement dit $\frac{P_kM_k}{P_kM_{k+1}} = \frac{P_1m_k}{P_1m_{k+1}}$, et le théorème à démontrer revient à une égalité évidente

$$\frac{P_1M_1}{P_1M_2} \times \frac{P_1M_2}{P_1m_3} \times \frac{P_1m_3}{P_1m_4} \times \ldots \times \frac{P_1m_{\mu-1}}{P_1m_\mu} \times \frac{P_1m_\mu}{P_1M_1} = +1.$$

Remarque. — Il est à peine utile d'ajouter que si l'on parcourt le périmètre du polygone en sens contraire on forme des rapports inverses des précédents, dont le produit est encore égal à $+1$

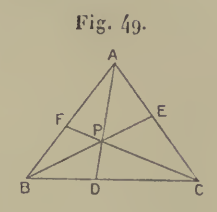
$$\frac{P_\mu M_1}{P_\mu M_\mu} \times \frac{P_{\mu-1}M_\mu}{P_{\mu-1}M_{\mu-1}} \times \ldots \times \frac{P_1M_2}{P_1M_1} = +1.$$

136. Théorème. — *Les droites joignant les sommets d'un triangle à un point* P *pris dans le plan du triangle déterminent sur les côtés du*

triangle des rapports segmentaires dont le produit égale -1; *et réciproquement.*

En effet, rapportons la figure (*fig.* 49) à deux axes quelconques et soient x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4 les coordonnées des sommets A, B, C et du point P. On a trouvé plus haut (128)

Fig. 49.



$$\frac{DB}{DC} = \frac{(1,4,2)}{(1,4,3)},$$

$$\frac{EC}{EA} = \frac{(2,4,3)}{(2,4,1)},$$

$$\frac{FA}{FB} = \frac{(3,4,1)}{(3,4,2)}.$$

En multipliant membre à membre et simplifiant

$$\frac{DB}{DC} \times \frac{EC}{EA} \times \frac{FA}{FB} = -1.$$

137. *Réciproquement,* la relation précédente exprime que les droites AD, BE, CF sont concourantes. En effet, soit P ce point de concours (à distance finie ou à l'infini) des deux droites AD, BE et soit F′ le point où la droite CF rencontre AB ; on aura

$$\frac{DB}{DC} \times \frac{EC}{EA} \times \frac{F'A}{F'B} = -1,$$

donc

$$\frac{FA}{FB} = \frac{F'A}{F'B}, \text{ etc.}$$

138. *Transversales réciproques.* — Soit (*fig.* 50) Δ une transversale rencontrant les côtés d'un triangle aux points D, E, F. Si l'on considère les points D′, E′, F′, symétriques de chacun des points D, E, F par rapport au milieu du côté correspondant, les trois points D′, E′, F′ sont en ligne droite; en effet

Fig. 50.

$$\frac{D'C}{D'B} = \frac{DB}{DC},$$

$$\frac{F'B}{F'A} = \frac{FA}{FB},$$

$$\frac{E'A}{E'C} = \frac{EC}{EA},$$

donc

$$\frac{D'C}{D'B} \times \frac{F'B}{F'A} \times \frac{E'A}{E'C} = +1.$$

Les droites DEF, D′E′F′ ont été nommées *transversales réciproques.*

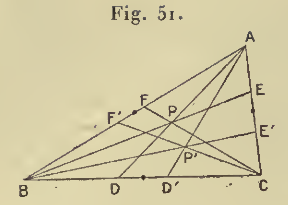


Fig. 51.

M. G. de Longchamps a fait de nombreuses applications de cette remarque si simple.

De même (*fig.* 51), si l'on suppose que les droites AD, BE, CF soient concourantes, les droites AD′, BE′, CF′ sont aussi concourantes, D′, E′, F′ étant déduits de D, E, F par le même procédé.

Division harmonique.

139. Soient (*fig.* 52) A, B, C, D quatre points en ligne droite. Lorsque

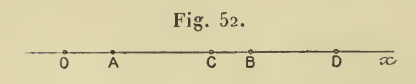
$$\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}, \tag{1}$$

on dit que C et D sont conjugués harmoniques par rapport à A et B. L'égalité précédente pouvant être mise sous la forme

$$\frac{AC}{AD} = -\frac{BC}{BD},$$

on en conclut que A et B sont conjugués harmoniques par rapport à C et D. On dit encore que les quatre points A, B, C, D forment une division harmonique. On convient toujours d'énoncer ces quatre points de façon que les deux premiers soient conjugués par rapport aux deux derniers.

Fig. 52.



Supposons que l'on prenne sur la droite AB une origine quelconque O et une direction positive Ox, et que les points A, B, C, D aient respectivement pour abscisses x_1, x_2, x_3, x_4; la conjugaison harmonique de ces quatre points est définie par l'équation

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} + \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} = 0,$$

ou bien

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 2(x_1 x_2 + x_3 x_4). \tag{2}$$

140. En plaçant diversement l'origine, on met la relation harmonique sous différentes formes particulières : 1° Si l'on suppose l'ori-

gine placée en D de sorte que $x_4 = 0$, la relation générale (2) devient

$$2x_1x_2 = x_3(x_1 + x_2)$$

ou

$$\frac{2}{x_3} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2},$$

c'est-à-dire

$$(3) \qquad \frac{2}{\overline{DC}} = \frac{1}{\overline{DA}} + \frac{1}{\overline{DB}}.$$

Cette relation est donc équivalente à la relation (1). Elle exprime que le segment DC est la moyenne harmonique des segments DA et DB.

La relation (3) a été généralisée : étant donnés n points en ligne droite $A_1, A_2, \ldots, A_n$, on appelle *conjugué harmonique* d'un point O pris sur la droite considérée, par rapport aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ le point M défini par l'équation

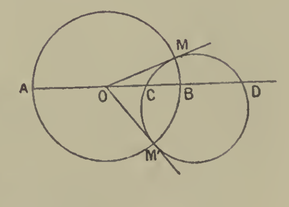
$$\frac{n}{\overline{OM}} = \frac{1}{\overline{OA_1}} + \frac{1}{\overline{OA_2}} + \ldots + \frac{1}{\overline{OA_n}}.$$

2° Supposons en second lieu l'origine placée au milieu de AB; dans ce cas $x_1 + x_2 = 0$ et la relation (2) devient

$$x_3x_4 = x_1^2.$$

Ainsi, en supposant que le point O (*fig.* 53) soit le milieu de AB et que C et D soient conjugués harmoniques par rapport à A et B, on a

Fig. 53.



$$\overline{OC}.\overline{OD} = \overline{OA}^2,$$

et réciproquement. Cette relation exprime que le cercle décrit sur AB comme diamètre coupe à angle droit tout cercle passant par C et D. Réciproquement, si ces cercles se coupent à angle droit, A, B, C, D est une division harmonique.

3° Enfin l'égalité (3) peut prendre une autre forme; en effet, on en déduit

$$\overline{DA}.\overline{DB} = \overline{DC}\,\frac{\overline{DA} + \overline{DB}}{2},$$

c'est-à-dire, en supposant toujours que le point O soit le milieu

de AB,

$$\overline{DA}.\overline{DB} = \overline{DC}.\overline{DO}.$$

141. Il convient encore de remarquer que, si $\frac{AC}{AD} = k$, on a

$$\frac{CA}{CB} = \frac{k+1}{k-1}.$$

Rapport anharmonique.

142. Étant donnés quatre points en ligne droite A, B, C, D, nous appellerons *rapport anharmonique* de ces quatre points le rapport $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$ ou, en conservant les notations précédentes,

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4}.$$

Nous représenterons ce rapport par la notation (ABCD).

On vérifie sans difficulté que le rapport anharmonique des quatre points

$$\left(\frac{x_1 + \lambda_1 x_2}{1 + \lambda_1}, \frac{y_1 + \lambda_1 y_2}{1 + \lambda_1}\right), \quad \ldots, \quad \left(\frac{x_1 + \lambda_4 x_2}{1 + \lambda_4}, \frac{y_1 + \lambda_4 y_2}{1 + \lambda_4}\right)$$

est égal à

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

143. *Remarque.* — D'une manière générale, si l'on appelle *rapport anharmonique* le quotient des rapports des distances de deux des points aux deux autres, ce qui donne les rapports (ABCD), (ACBD), (ACDB), ..., on obtient ainsi 1.2.3.4 ou 24 rapports. Ces rapports sont égaux quatre par quatre. En effet, on a par exemple

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA.DB}{CB.DA} = \frac{DB.CA}{DA.CB} = \frac{AC.BD}{AD.BC} = \frac{BD.AC}{BC.AD},$$

c'est-à-dire

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA),$$

ce qui donne quatre rapports égaux dans lesquels A et B sont conjugués ainsi que C et D. Donc *le rapport anharmonique de quatre points ne change pas quand on permute deux de ces points pourvu que l'on permute en même temps les deux autres.*

Si l'on permute deux points conjugués sans permuter les deux autres, on

obtient le rapport inverse; le rapport (ABCD) est égal à l'inverse du rapport (ABDC).

Les rapports

$$(ABCD), \quad (ACDB), \quad (ADCB)$$

sont distincts. Désignons-les par λ, μ, ν.

De l'identité

$$\overline{AC}.\overline{BD} = \overline{AD}.\overline{BC} + \overline{AB}.\overline{CD},$$

on déduit

$$\frac{\overline{AC}.\overline{BD}}{\overline{AD}.\overline{BC}} = 1 + \frac{\overline{AB}.\overline{CD}}{\overline{AD}.\overline{BC}}$$

ou bien

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} + \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DC}} = 1,$$

c'est-à-dire

$$\lambda + \frac{1}{\mu} = 1.$$

Pareillement, en divisant successivement par $\overline{AB}.\overline{CD}$ et par $\overline{AC}.\overline{BD}$, on obtient

$$\mu + \frac{1}{\nu} = 1, \qquad \nu + \frac{1}{\lambda} = 1.$$

Enfin on vérifie immédiatement que $\lambda\mu\nu = -1$.

Si les quatre points A, B, C, D sont distincts, aucun des rapports λ, μ, ν ne peut être nul ni infini; il résulte des relations que nous venons d'obtenir qu'aucun des rapports ne peut être égal à $+1$; car, si $\lambda = +1$, on aurait $\nu = 0$, ce qui est impossible; on voit encore que deux des trois rapports λ, μ, ν sont positifs et le troisième négatif.

Il résulte de ce qui précède que, si deux systèmes de quatre points en ligne droite A, B, C, D et A′, B′, C′, D′ ont un rapport anharmonique égal, tous les rapports anharmoniques du premier système sont respectivement égaux à ceux du second.

Si $\lambda = -1$, la division A, B, C, D est harmonique: dans ce cas $\mu = \frac{1}{2}$, $\nu = 2$.

144. Théorème fondamental. — *Le rapport anharmonique des points d'intersection d'un faisceau de quatre droites concourantes par une transversale quelconque est indépendant de la position de cette transversale.*

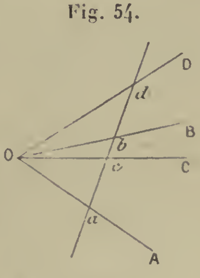


Fig. 54.

Soient (*fig.* 54) $P = 0$, $Q = 0$ les équations de deux droites passant par le point de concours O de quatre droites OA, OB, OC, OD; ces droites ont des équations de la forme

$$P + \lambda_1 Q = 0, \qquad P + \lambda_2 Q = 0, \qquad P + \lambda_3 Q = 0, \qquad P + \lambda_4 Q = 0.$$

Soient a, b, c, d les points d'intersection de la transversale avec ces droites et désignons par x_1, y_1 et x_2, y_2 les coordonnées des points a, b. En désignant par P_1, Q_1 ce que deviennent P et Q quand on substitue à x et y, x_1 et y_1 et par P_2 et Q_2 les résultats de la substitution de x_2 à x et de y_2 à y, on a

$$\frac{ca}{cb} = \frac{P_1 + \lambda_3 Q_1}{P_2 + \lambda_3 Q_2};$$

mais, le point a étant sur OA, $P_1 + \lambda_1 Q_1 = 0$, d'où $P_1 = -\lambda_1 Q_1$; de même $P_2 = -\lambda_2 Q_2$, de sorte que

$$\frac{ca}{cb} = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} \frac{Q_1}{Q_2};$$

on aura de la même manière

$$\frac{da}{db} = \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2} \frac{Q_1}{Q_2}$$

et, par suite,

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2}.$$

Ce rapport est donc indépendant de la position de la sécante; on le nomme le *rapport anharmonique du faisceau* et on le représente par la notation (O.ABCD). La démonstration subsiste évidemment si les quatre droites sont parallèles. On dit que le faisceau est harmonique quand $(O.ABCD) = -1$, c'est-à-dire

$$\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2} = -1$$

ou encore

$$(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) = 2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_3 \lambda_4).$$

145. *Cas particulier.* — Les quatre droites sont représentées par des équations de la forme

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad P + \lambda Q = 0, \qquad P + \mu Q = 0.$$

En procédant comme plus haut, ou bien en supposant $\lambda_1 = 0$, $\lambda_3 = \lambda$, $\lambda_4 = \mu$ et faisant croître λ_2 indéfiniment dans la formule précédente, on trouve

$$(O.ABCD) = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Dans ce cas, pour que le faisceau soit harmonique, il faut et il suffit que $\lambda = -\mu$, de sorte que le système d'équations

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad P + \lambda Q = 0, \quad P - \lambda Q = 0$$

représente un faisceau harmonique, les deux premières droites étant conjuguées par rapport aux deux autres et inversement.

En particulier, considérons les droites représentées par les équations

$$y - m_1 x = 0, \quad y - m_2 x = 0, \quad y - m_3 x = 0, \quad y - m_4 x = 0;$$

leur rapport anharmonique est égal à

$$\frac{m_3 - m_1}{m_3 - m_2} : \frac{m_4 - m_1}{m_4 - m_2}$$

et le rapport anharmonique des quatre droites

$$y = 0, \quad x = 0, \quad y - mx = 0, \quad y - m'x = 0$$

est égal à $\frac{m}{m'}$; enfin $y - mx = 0$, $y + mx = 0$ représentent deux droites conjuguées harmoniques par rapport aux axes.

146. *Démonstration géométrique du théorème précédent.* — Soit (*fig.* 55) O.ABCD un faisceau de quatre droites coupées en a, b, c, d par une transversale, menons par c une parallèle à OD, qui rencontre OA en e, OB en f; on a

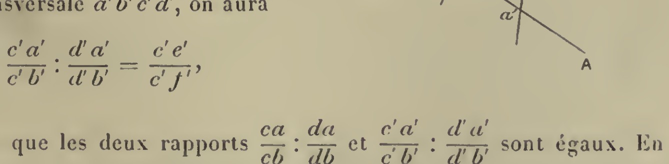


Fig. 55.

$$\frac{ca}{da} = \frac{ce}{do}, \quad \frac{cb}{db} = \frac{cf}{do},$$

d'où

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{ce}{cf}.$$

En faisant les mêmes raisonnements pour une deuxième transversale $a'b'c'd'$, on aura

$$\frac{c'a'}{c'b'} : \frac{d'a'}{d'b'} = \frac{c'e'}{c'f'},$$

ce qui prouve que les deux rapports $\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db}$ et $\frac{c'a'}{c'b'} : \frac{d'a'}{d'b'}$ sont égaux. En regardant a', b', c', d' comme les projections coniques de a, b, c, d, on peut dire que le rapport anharmonique est *projectif*.

Pour que le rapport anharmonique soit égal à -1, il faut et il suffit que c soit le milieu de ef. Ainsi, pour que deux droites OC, OD soient con-

juguées harmoniques par rapport à OA et OB, il faut et il suffit que la droite OC partage en deux parties égales une sécante parallèle à OD et comprise entre OA et OB.

Il convient encore de rappeler que

$$\frac{ca}{cb} = \frac{Oa.Oc.\sin(C.A)}{Ob.Oc.\sin(C.B)}, \qquad \frac{da}{db} = \frac{Oa.Od.\sin(D.A)}{Ob.Od.\sin(D.B)},$$

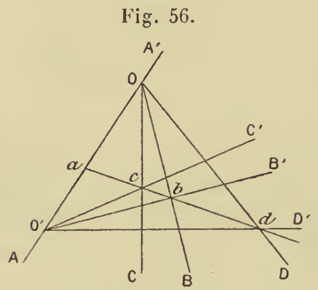
de sorte que

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{\sin(C.A)}{\sin(C.B)} : \frac{\sin(D.A)}{\sin(D.B)}.$$

Cette relation montre bien que le rapport $\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db}$ est indépendant de la position de la sécante et ne dépend que des positions relatives des rayons du faisceau.

147. Théorème. — *Quand deux faisceaux ont un rayon commun et même rapport anharmonique, les points d'intersection des rayons conjugués sont en ligne droite.*

Fig. 56.



Soient, en effet (*fig.* 56), O.ABCD et O'.A'B'C'D' deux faisceaux ayant un rayon commun, OA coïncidant avec O'A', et tels que

$$(O.ABCD) = (O'.A'B'C'D');$$

soient b le point d'intersection des rayons correspondants OB, OB', et c le point d'intersection des rayons OC, OC' et supposons que la droite bc coupe OO' au point a; je dis que bc passe par le point de concours des deux rayons OD, OD'. En effet, supposons que bc coupe OD en un point d et OD' en un point d'. On a vu que

$$(O.ABCD) = (abcd) \qquad \text{et} \qquad (O'.A'B'C'D') = (abcd').$$

Mais les premiers membres de ces égalités sont égaux par hypothèse, donc $(abcd) = (abcd')$, ce qui exige que les points d et d' coïncident. Le théorème est donc démontré.

Polaire d'un point par rapport à un angle.

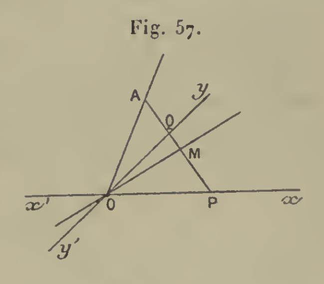
148. *Définition.* — On dit que deux points A, M sont *conjugués harmoniques par rapport à un angle,* lorsque ces points sont

conjugués harmoniques par rapport aux points d'intersection de la droite AM et des deux côtés de l'angle.

149. Théorème. — *Le lieu géométrique des conjugués harmoniques d'un point* A *par rapport à un angle est une droite qui passe par le sommet de cet angle.*

En effet, si l'on mène par le point A (*fig.* 57) une sécante quelconque coupant les côtés de l'angle donné en P et Q et que l'on détermine le conjugué harmonique de A par rapport à P, Q, le faisceau (O.AMPQ) est harmonique. Le point M est donc sur le rayon conjugué de OA par rapport aux droites Ox, Oy et réciproquement, si l'on prend sur le rayon conjugué de OA un point quelconque M, la sécante AM coupant Ox en P et Oy en Q, les quatre points A, M, P, Q forment une division harmonique et par suite A et M sont conjugués par rapport à l'angle xOy. Il en résulte que le lieu des conjugués harmoniques de A par rapport à l'angle xOy est une droite et en outre on voit que le lieu est le même pour tous les points de la droite OA.

Fig. 57.



150. On obtient simplement ces résultats par le calcul. Prenons pour axes de coordonnées les deux côtés de l'angle et soient a, b les coordonnées du point A; x, y celles de M. L'axe des x détermine sur le segment $\overline{AM}$ un rapport ayant pour expression

$$\frac{PM}{PA} = \frac{y}{b}.$$

On a de même

$$\frac{QM}{QA} = \frac{x}{a},$$

et comme on doit avoir

$$\frac{PM}{PA} + \frac{QM}{QA} = 0,$$

l'équation du lieu de M est

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

ou

$$bx + ay = 0.$$

La droite OA a pour équation

$$bx - ay = 0;$$

ce qui montre que le faisceau des quatre droites Ox, Oy, OA, OM est un faisceau harmonique.

La droite OM se nomme *la polaire* de A.

151. Le calcul ne serait pas plus compliqué en prenant des axes quelconques. Soient, en effet, $P = 0$, $Q = 0$ les équations des côtés OP, OQ de l'angle donné, et x_0, y_0 les coordonnées du point A; en appelant P_0, Q_0 ce que deviennent P et Q quand on y remplace les coordonnées variables x, y, ou, comme on dit, les *coordonnées courantes*, par les coordonnées x_0, y_0, on a

$$\frac{PM}{PA} = \frac{P}{P_0}, \qquad \frac{QM}{QA} = \frac{Q}{Q_0},$$

l'équation du lieu est donc

$$\frac{P}{P_0} + \frac{Q}{Q_0} = 0$$

ou

$$PQ_0 + QP_0 = 0.$$

L'équation de OA est évidemment

$$PQ_0 - QP_0 = 0,$$

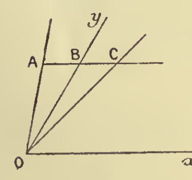
et l'on voit bien que le faisceau des quatre droites représentées par les équations

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad PQ_0 - QP_0 = 0, \qquad PQ_0 + QP_0 = 0$$

est un faisceau harmonique.

152. *Construction de la polaire d'un point par rapport à un angle.* — Si l'on mène (*fig.* 58) AB parallèle à Ox et que l'on construise $\overline{BC} = \overline{AB}$, on sait que OC sera le rayon conjugué de OA par rapport à Ox et Oy; on a ainsi une première construction de la polaire du point A par rapport à l'angle xOy.

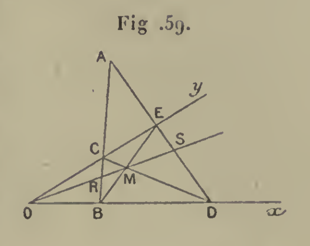
Fig. 58.



Voici une autre construction (*fig.* 59). On mène par le point A les deux sécantes rencontrant Ox en B et D et Oy en C et E et l'on mène les droites BE,

CD; leur point de concours M appartient à la polaire de A. En effet, soient R et S les conjugués de A par rapport à B, C et à D, E. La droite RS étant la polaire de A par rapport à l'angle xOy et aussi par rapport à l'angle BMC passe par les sommets O et M de ces deux angles; donc OM est la polaire de A. C'est d'ailleurs ce que l'on vérifie par le calcul suivant. Posons $\overline{OB}=\alpha$, $\overline{OC}=\beta$; $\overline{OD}=\alpha'$, $\overline{OE}=\beta'$ et appelons, comme plus haut, a, b les coordonnées de A. Les coordonnées x, y du point M vérifient les équations des droites BE, CD; donc

Fig. 59.



$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta'}=1, \tag{1}$$

$$\frac{x}{\alpha'}+\frac{y}{\beta}=1. \tag{2}$$

Mais, le point A étant sur les droites BC et DE, ses coordonnées vérifient les équations

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}=1, \tag{3}$$

$$\frac{a}{\alpha'}+\frac{b}{\beta'}=1. \tag{4}$$

Or, en retranchant membre à membre les équations (1) et (2), on obtient

$$x\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha'}\right)-y\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta'}\right)=0. \tag{5}$$

Les équations (3) et (4) donnent de même

$$a\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha'}\right)+b\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta'}\right)=0. \tag{6}$$

On déduit des équations (5) et (6), en remarquant que les différences $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha'}$ et $\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta'}$ ne sont pas nulles,

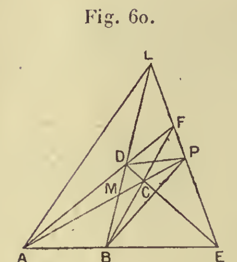
$$bx+ay=0,$$

ce qui prouve bien que M est sur la polaire de A.

Quadrilatère complet.

153. Soit (*fig.* 60) ABCDEF un quadrilatère complet, c'est-à-dire la figure formée par quatre droites AB, BC, BD, DA. Désignons par $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ les équations des trois diagonales AC, EF, BD, rapportées à deux axes de coordonnées quelconques; nous voulons former les équations des quatre côtés du quadrilatère.

Fig. 60.



La droite AB a une équation de la forme

$$(AB) \qquad aX + bY + cZ = 0.$$

La droite BP passant par l'intersection de AB et de LM, son équation est de la forme

$$aX + bY + cZ + \lambda Z = 0$$

et comme cette droite passe par P qui est défini par l'intersection des droites MP, LP, qui ont pour équations $X = 0$, $Y = 0$, on doit prendre $\lambda = -c$; mais les quatre droites AB, BC, BP, BM forment un faisceau harmonique et les droites conjuguées BP, BM ayant pour équations $aX + bY = 0$, $Z = 0$; il en résulte que l'équation de BC, conjuguée de AB, est

$$(BC) \qquad aX + bY - cZ = 0.$$

En remarquant que l'équation de AL est évidemment $bY + cZ = 0$, on trouve de la même manière que AD a pour équation

$$(AD) \qquad -aX + bY + cZ = 0.$$

Pareillement, en considérant que DP a pour équation $aX - bY = 0$, on voit que l'équation de CD est

$$(CD) \qquad aX - bY + cZ = 0.$$

En posant $aX = X'$, $bY = Y'$, $cZ = Z'$, les équations des diagonales sont $X' = 0$, $Y' = 0$, $Z' = 0$ et celles des quatre côtés du quadrilatère

$$X' + Y' + Z' = 0, \quad X' + Y' - Z' = 0, \quad X' - Y' + Z' = 0, \quad -X' + Y' + Z' = 0.$$

Nous pouvons effacer les accents et représenter l'ensemble des quatre côtés par les équations contenues dans la formule

$$\varepsilon X + \varepsilon' Y + \varepsilon'' Z = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1, \ \varepsilon' = \pm 1, \ \varepsilon'' = \pm 1).$$

154. Théorème. — *Les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.*

Prenons pour axes (*fig.* 61) deux côtés consécutifs OA, OC du quadrilatère OABC et soient L, M, P les milieux des diagonales OB, AC, DE. Si l'on pose $\overline{OA} = a$, $\overline{OC} = c$, $\overline{OD} = d$, $\overline{OE} = e$, les coordonnées de M sont $\frac{a}{2}$, $\frac{c}{2}$ et celles de P : $\frac{d}{2}$, $\frac{e}{2}$ et par suite MP a pour équation

Fig. 61.

$$(1) \quad 2x(c-e) - 2y(a-d) + ae - cd = 0.$$

Le point L est à l'intersection des droites menées parallèlement à AE et à CD et à des distances de l'origine respectivement deux fois plus petites; ces parallèles ont pour équations

$$(2) \qquad 2ex + 2ay - ae = 0,$$

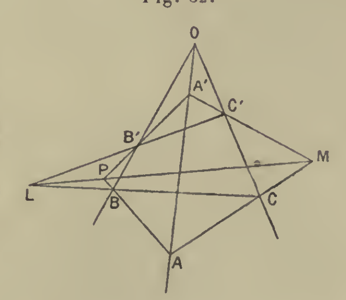
$$(3) \qquad 2cx + 2dy - cd = 0.$$

En multipliant par -1 le premier membre de la dernière équation et ajoutant ensuite membre à membre avec les deux autres, on trouve identiquement zéro; donc les trois droites représentées par ces équations sont concourantes, ce qui démontre la proposition.

Triangles homologiques.

155. Théorème. — *Si les côtés de deux triangles* ABC, A'B'C' *se coupent deux à deux en trois points* L, M, P *situés en ligne droite, les droites* AA', BB', CC' *joignant les sommets opposés sont concourantes, et réciproquement.*

Fig. 62.



Donnons-nous les équations des droites BC, AC, AB (*fig.* 62) et soient respectivement $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$, $Z_1 = 0$ les équations de ces trois droites. L'équation de LMP est de la forme $\alpha X_1 + \beta Y_1 + \gamma Z_1 = 0$; par suite, en posant $\alpha X_1 \equiv X$, $\beta Y_1 \equiv Y$, $\gamma Z_1 \equiv Z$, les équations des côtés du triangle ABC seront $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, et l'équation de LMP devient

$$X + Y + Z = 0.$$

Les équations des côtés B'C', C'A', A'B' seront respectivement de la forme

$$(B'C') \qquad aX + Y + Z = 0,$$

$$(C'A') \qquad X + bY + Z = 0,$$

$$(A'B') \qquad X + Y + cZ = 0.$$

L'équation de AA′ doit être de la forme $\beta Y + \gamma Z = 0$; mais cette équation doit être aussi une combinaison linéaire des équations de C′A′ et de A′B′; son équation est donc

$$(b-1)Y = (c-1)Z.$$

Pareillement BB′ et CC′ ont pour équations

$$(c-1)Z = (a-1)X,$$
$$(a-1)X = (b-1)Y;$$

on voit que ces trois droites sont concourantes, puisqu'on obtient une identité en ajoutant leurs équations membre à membre.

156. *Réciproquement,* si les trois droites AA′, BB′, CC′ sont concourantes, soient

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0$$

les équations des droites BC, OC, OB.

On peut supposer, en employant un artifice analogue à celui qui nous a servi plus haut, les coefficients de X, Y, Z déterminés de façon que AC et AB aient respectivement pour équations

(AC) $$X + Y = 0,$$
(AB) $$X + Z = 0;$$

en retranchant membre à membre, on obtient l'équation

$$Y - Z = 0,$$

qui représente évidemment la droite OA.

Soit $T = 0$ l'équation de B′C′; on peut supposer les coefficients de T déterminés de façon que A′C′ ait pour équation

$$Y + T = 0;$$

or, en retranchant membre à membre les équations de OA et A′C′, on obtient

$$Z + T = 0.$$

Cette équation représente une droite passant par B′ et par le point de rencontre A′ de OB et A′C′; c'est donc l'équation de A′B′. En résumé les côtés du triangle ABC ont respectivement pour équations

$$X = 0, \qquad X + Y = 0, \qquad X + Z = 0,$$

et ceux du triangle A′B′C′

$$T = 0, \qquad Y + T = 0, \qquad Z + T = 0.$$

Il est évident que les côtés du premier triangle rencontrent les côtés correspondants du second en trois points situés sur la droite ayant pour équation

$$X - T = 0.$$

157. Le théorème précédent, dû à Desargues, peut être énoncé d'une autre manière. En regardant ABC et A′B′C′ comme étant deux positions successives d'un triangle qui se déplace et se déforme, on a cette proposition : *Si les trois côtés d'un triangle variable* ABC *pivotent autour de trois points* L, M, P *situés en ligne droite, deux des sommets* A, B *glissant sur deux droites fixes* Δ, Δ', *le troisième sommet* C *décrit aussi une droite fixe* Δ'' *qui passe par le point commun à* Δ *et* Δ'.

158. Il est facile de généraliser : *Si les côtés d'un polygone plan pivotent autour de points fixes situés en ligne droite et que tous les sommets sauf un décrivent des droites fixes, le dernier sommet décrit aussi une droite fixe.* Il suffit de faire voir que si le théorème est vrai pour un polygone de $n-1$ côtés, il sera encore vrai pour un polygone de n côtés, attendu qu'il vient d'être prouvé pour $n = 3$. Or soit un pentagone ABCDE, et supposons que les sommets A, B, D, E décrivent des lignes droites, tous les côtés d'ailleurs pivotant autour des points situés en ligne droite. Prolongeons AB et DC jusqu'à leur point d'intersection M.

Les sommets A, D, E du quadrilatère AMDE décrivant des droites, il en sera de même du point M, si l'on suppose le théorème vrai pour le quadrilatère; or, en appliquant le théorème au triangle BMC, on voit que le point C décrit aussi une droite. On peut donc regarder la proposition comme établie dans toute sa généralité.

EXERCICES.

1. Démontrer par la transformation des coordonnées que l'équation d'une droite est du premier degré, et réciproquement.

— On prend la droite donnée pour axe de x. Réciproquement, on fait une transformation de coordonnées qui fasse disparaître un coefficient de l'équation générale.

2. Vérifier que $Ax + By + C = 0$ représente une droite en faisant remarquer que, si les coordonnées de deux points M_1, M_2 vérifient cette équation, celles d'un point quelconque de M_1M_2 la vérifient aussi.

3. Construire la droite qui a pour équation (axes rectangulaires)

$$(a^2 + b^2)(ax + by) + a^2b^2 = 0.$$

— Chercher le point où cette droite coupe la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite qui joint les traces sur les axes de la droite demandée.

4. Une droite se meut de manière que les segments qu'elle détermine sur les côtés d'un angle donné, à partir de son sommet, aient une somme ou une différence constante. Trouver le lieu du point qui partage la portion de cette droite, comprise entre les côtés de l'angle, dans un rapport donné.

5. Une droite se meut de manière que les segments qu'elle détermine sur les côtés d'un angle, à partir de son sommet, aient une somme ou une différence constante. Lieu du point de concours des perpendiculaires menées aux côtés de cet angle par les points où ils rencontrent la sécante considérée.

6. Une sécante à un angle se meut de manière à être coupée par les côtés de l'angle dans un rapport donné, trouver le lieu du point d'intersection des perpendiculaires menées, par les traces de cette sécante sur les côtés de l'angle, à ces côtés.

7. Des points d'une droite fixe on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un angle; lieu du point qui partage dans un rapport donné la droite joignant les pieds de ces perpendiculaires.

8. Démontrer que les bissectrices des angles extérieurs d'un triangle rencontrent les côtés opposés en trois points en ligne droite.

9. Démontrer que deux bissectrices intérieures d'un triangle et une bissectrice extérieure rencontrent les côtés opposés en trois points en ligne droite.

10. Si des sommets d'un triangle on mène des droites faisant avec les côtés opposés des angles dont les bissectrices soient parallèles à une direction donnée, les trois droites obtenues sont concourantes.

11. Étant données cinq droites qui se coupent deux à deux, on mène les droites qui joignent les milieux des trois diagonales de chacun des quadrilatères formés. Démontrer que les cinq droites ainsi obtenues sont concourantes.

12. Une transversale étant menée dans le plan d'un triangle, démontrer que les droites joignant chaque sommet au milieu du segment déterminé par la transversale dans l'angle correspondant rencontrent les côtés opposés en trois points situés en ligne droite.

13. Étant donné un quadrilatère, trouver le lieu des centres des parallélogrammes y inscrits et dont un côté est parallèle à une direction donnée.

14. Étant données les coordonnées de trois points A, B, C ou les équations de trois droites BC, CA, AB, reconnaître si un point M, dont on donne les coordonnées est à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle ABC.

15. Les deux côtés OA, OC d'un rectangle variable OA, BC sont sur deux droites fixes OX, OY; démontrer que la perpendiculaire abaissée du sommet B sur la diagonale AC passe par un point fixe, si la différence des côtés de ce rectangle est constante.

16. Étant donnés quatre points A, B, C, D et une droite Δ qui coupe AB en M, CD en P; on construit le point M′ conjugué harmonique de P par rapport à A et B et P′, conjugué harmonique de P par rapport à C et D. En faisant une construction analogue relative à AC, BD et AD, BC, on obtient trois droites. Prouver que les droites obtenues sont concourantes.

(De Laffitte.)

17. Les sommets B, C du triangle ABC sont fixes et le troisième se meut sur une droite. Prouver que les sommets et le centre du carré inscrit dont un côté repose sur BC décrivent des droites. (Neuberg.)

18. Étant donné un parallélogramme ABCD, on prend sur les côtés consécutifs AB, AC des segments AM et AN, tel que $\frac{AB}{AM} = m$, $\frac{AC}{AN} = n$. La droite MN coupant la diagonale AD en P, prouver que

$$\frac{PM}{PN} = -\frac{n}{m} \qquad \text{et} \qquad \frac{AD}{AP} = m + n.$$

19. Quatre points étant donnés sur une droite, prenant ces points deux à deux, on obtient trois systèmes de deux couples chacun et à chacun de ces systèmes correspond sur la droite un couple de points simultanément harmonique aux deux couples du système; les trois couples ainsi déterminés, pris deux à deux, sont harmoniques entre eux.

Cette propriété donne la résolution des équations biquadratiques.

(Hesse.)

20. On donne trois points en ligne droite M_1, M_2, M_3. Soient N_1, N_2, N_3 les conjugués harmoniques d'un quatrième point A de cette droite par rapport aux couples M_2, M_3; M_3, M_1; M_1, M_2. Les abscisses des points M étant les racines de l'équation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

et celle du point A étant α, former l'équation aux abscisses des points M.

(Le Paige.)

21. Si l'on appelle A, B, C les angles d'un triangle dont les sommets ont respectivement pour coordonnées x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3, l'orthocentre a pour coordonnées

$$x = \frac{x_1 \operatorname{tang} A + x_2 \operatorname{tang} B + x_3 \operatorname{tang} C}{\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C}, \quad y = \frac{y_1 \operatorname{tang} A + y_2 \operatorname{tang} B + y_3 \operatorname{tang} C}{\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C}.$$

22. Avec les mêmes notations, le centre du cercle, circonscrit au triangle ABC, a pour coordonnées

$$x = \frac{(x_2 + x_3) \operatorname{tang} A + (x_3 + x_1) \operatorname{tang} B + (x_1 + x_2) \operatorname{tang} C}{2(\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C)},$$

$$y = \frac{(y_2 + y_3) \operatorname{tang} A + (y_3 + y_1) \operatorname{tang} B + (y_1 + y_2) \operatorname{tang} C}{2(\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C)}.$$

23. En appelant a, b, c les côtés du triangle ABC, les coordonnées du centre du cercle inscrit sont

$$x = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}, \qquad y = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c},$$

et celles des cercles exinscrits s'obtiendront en changeant dans les expressions précédentes successivement a en $-a$, b en $-b$, c en $-c$.

Points et droites imaginaires.

159. Si l'équation $f(x, y) = 0$ admet la solution imaginaire $x = a + bi$, $y = a' + b'i$, on convient de dire que la courbe représentée par l'équation précédente passe par un *point imaginaire* ayant pour coordonnées $a + bi$, $a' + b'i$.

Les deux systèmes de nombres imaginaires respectivement conjugués

$$x = a + bi, \quad y = a' + b'i; \quad x' = a - bi, \quad y' = a' - b'i$$

constituent *deux points imaginaires conjugués*.

Par opposition, un point défini par deux coordonnées réelles est dit *réel*.

160. Théorème. — *Toute ligne droite passe par une infinité de points imaginaires conjugués deux à deux.*

Soit $Ax + By + C = 0$ une équation du premier degré à coefficients réels représentant une droite Δ; il s'agit de déterminer des nombres réels p, q, p', q', tels que l'équation donnée admette la solution $x = p + qi$, $y = p' + q'i$, c'est-à-dire tels que

$$Ap + Bp' + C = 0, \qquad Aq + Bq' = 0.$$

Il est évident que ce système admet une infinité de solutions, et l'on voit qu'il suffit, pour en trouver une, de prendre pour p et p' les coordonnées d'un point quelconque M de la droite donnée et pour q et q' les coordonnées d'un point quelconque P de la parallèle à cette droite menée par l'origine des coordonnées, de sorte qu'un point imaginaire de la droite Δ est représenté par l'ensemble des deux points réels M, P. En outre, si P' est le symétrique de P par rapport à l'origine, à l'ensemble des deux points M, P' correspond un point

imaginaire conjugué du premier. En faisant varier M et P arbitrairement, on obtiendra autant qu'on voudra de couples de points imaginaires conjugués appartenant à la droite Δ.

161. *Définition.* — On appelle *droite imaginaire* l'ensemble des solutions réelles ou imaginaires d'une équation du premier degré à coefficients imaginaires.

Plus généralement, l'ensemble des solutions réelles ou imaginaires d'une équation à coefficients imaginaires constitue *une courbe imaginaire*. Si une équation à coefficients réels n'a que des solutions imaginaires, on dit aussi que cette équation représente une courbe imaginaire.

Une équation algébrique entière à coefficients imaginaires peut se mettre sous la forme $f(x, y) + if_1(x, y) = 0$, $f(x, y)$ et $f_1(x, y)$ étant deux polynomes entiers à coefficients réels. Cette équation admet en général des solutions réelles que l'on obtient en calculant les solutions réelles communes aux deux équations $f(x, y) = 0$, $f_1(x, y) = 0$. On écarte le cas où $f_1(x, y)$ serait égal à $f(x, y) \times a$, a étant une constante, car dans ce cas l'équation précédente se réduirait à $f(x, y) = 0$ et aurait en réalité des coefficients réels.

162. Théorème. — *Sur toute droite imaginaire il y a un point réel et un seul.*

En effet, l'équation d'une droite imaginaire est de la forme $P + Qi = 0$, P et Q désignant deux polynomes réels. On suppose que les droites représentées par les équations $P = 0$, $Q = 0$ soient distinctes; elles ont donc un point réel commun, à distance finie ou infinie, qui appartient à la droite imaginaire considérée. Il est d'ailleurs évident qu'il ne peut y avoir plus d'un point réel sur une droite imaginaire, car la droite qui passe par deux points réels est réelle.

163. Théorème. — *Deux points imaginaires conjugués déterminent une droite réelle.*

Soient $p + qi$, $p' + q'i$; $p - qi$, $p' - q'i$ les deux points imaginaires donnés. Il s'agit de déterminer A, B, C de façon que

$$A(p + qi) + B(p' + q'i) + C = 0,$$
$$A(p - qi) + B(p' - q'i) + C = 0.$$

Ce système est équivalent au suivant

$$Ap + Bp' + C = 0, \qquad Aq + Bq' = 0.$$

La solution la plus générale est

$$A = \lambda q', \qquad B = -\lambda q, \qquad C = \lambda(qp' - pq'),$$

λ étant arbitraire; on obtient ainsi la droite réelle ayant pour équation

$$q'x - qy + qp' - pq' = 0.$$

164. *Corollaire.* — Une droite imaginaire ne peut posséder deux points imaginaires conjugués.

165. *Définition.* — On appelle *courbes imaginaires conjuguées* deux courbes dont les équations sont de la forme

$$f(x, y) + i f_1(x, y) = 0$$

et

$$f(x, y) - i f_1(x, y) = 0,$$

$f(x, y)$ et $f_1(x, y)$ ayant des coefficients réels. Deux pareilles courbes ont les mêmes points réels. En particulier, deux droites imaginaires conjuguées ont un point réel commun.

166. Convention. — *Toute expression ayant un sens géométrique quand les éléments dont elle dépend sont réels conservera, par définition, le même nom quand quelques-uns de ces éléments deviendront imaginaires.*

En voici quelques exemples. L'expression $(x - x')^2 + (y - y')^2$ représente, quand x, y et x', y' sont réels, le carré de la distance des deux points $M(x, y)$ et $M'(x', y')$. Si l'un de ces points devient imaginaire, ou si tous les deux deviennent imaginaires, nous dirons encore que l'expression précédente *est le carré de la distance de ces deux points*. Ainsi, par exemple, si l'on pose $x = i$, $y = 1$, $x' = -i$, $y' = 0$, l'expression précédente devient égale à -3; nous dirons que le carré de la distance des deux points considérés est égal à -3. Il convient de remarquer que le carré de la distance de deux points imaginaires peut être un nombre positif.

De même

$$\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

est, au signe près, la distance du point (x_0, y_0) à la droite définie par l'équation

$$Ax + By + C = 0,$$

quand on suppose les axes rectangulaires et que le point et la droite sont réels. Nous conserverons le même nom à l'expression précédente quand le point et la droite seront imaginaires.

Pareillement, nous continuerons à appeler coefficient angulaire et ordonnée à l'origine de la droite ayant pour équation

$$Ax + By + C = 0$$

les expressions $-\frac{A}{B}$, $-\frac{C}{B}$ si cette droite est imaginaire. Si les coefficients angulaires de deux droites imaginaires Δ, Δ' sont respectivement égaux à m et m', nous dirons toujours que $\frac{m'-m}{1+mm'}$ est la tangente trigonométrique de l'angle que Δ' fait avec Δ ; et si

$$1 + mm' = 0 \quad \text{ou} \quad AA' + BB' = 0,$$

nous conviendrons de dire que Δ et Δ' sont des droites perpendiculaires.

Il est bien entendu qu'on ne doit attribuer à ce langage aucune réalité géométrique.

Si la transformation des coordonnées

$$x = \alpha X + \alpha' Y + \alpha'', \qquad y = \beta X + \beta' Y + \beta''$$

donne l'identité $f(x, y) \equiv F(X, Y)$, à la solution $x = x_0$, $y = y_0$ de l'équation $f(x, y) = 0$ correspond la solution $X = X_0$, $Y = Y_0$ de l'équation $F(X, Y) = 0$. Quand x_0 et y_0 sont réels, il en est de même de X_0 et Y_0 ; (x_0, y_0) et (X_0, Y_0) définissent alors le même point rapporté aux deux systèmes d'axes. Quand x_0 et y_0 sont imaginaires, il en est de même de X_0, Y_0. Il est naturel de dire encore que x_0, y_0 et X_0, Y_0 définissent le même point imaginaire.

167. *Droites isotropes.* — Parmi les droites imaginaires, il faut étudier d'une manière toute particulière celles qui ont pour coeffi-

cients angulaires i ou $-i$, les axes étant rectangulaires. Ces droites, ou, plus exactement, les équations qui les définissent, jouissent de propriétés remarquables.

1° Par la substitution

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \qquad y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha,$$

on obtient

$$x + iy = (X + iY)(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

et

$$x - iy = (X - iY)(\cos\alpha - i\sin\alpha).$$

Donc, si l'on considère deux systèmes d'axes rectangulaires ayant même origine, les équations

$$x + iy = 0 \quad \text{et} \quad X + iY = 0$$

représentent une seule et même droite. Il en est de même pour les équations

$$x - iy = 0 \quad \text{et} \quad X - iY = 0.$$

On vérifie de même que

$$y - b + i(x - a) \equiv [Y - B + i(X - A)](\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

A et B étant les coordonnées du point (a, b) dans le nouveau système.

Remplaçons l'axe Oy par un nouvel axe OY faisant avec Ox un angle θ; les formules de transformation

$$x = X + Y\cos\theta, \qquad y = Y\sin\theta$$

donnent

$$x + iy = X + Y(\cos\theta + i\sin\theta)$$

et

$$x - iy = X + Y(\cos\theta - i\sin\theta).$$

Si l'on fait tourner ces nouveaux axes d'un angle α en posant

$$X = \frac{X'\sin(\theta - \alpha) - Y'\sin\alpha}{\sin\theta}, \qquad Y = \frac{X'\sin\alpha + Y'\sin(\theta + \alpha)}{\sin\theta},$$

on trouve

$$X + Y(\cos\theta + i\sin\theta) = [X' + Y'(\cos\theta + i\sin\theta)](\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Il en résulte que, si l'on fait tourner les axes d'un angle quelconque, les droites ayant par rapport aux anciens et aux nouveaux axes respectivement pour équations

$$X + Y(\cos\theta + i\sin\theta) = 0$$

et

$$X' + Y'(\cos\theta + i\sin\theta) = 0$$

sont les mêmes; et en combinant ce résultat avec le premier, on voit que, quels que soient les axes de coordonnées passant par un point donné, l'équation précédente représente toujours la même droite et cette remarque s'applique à l'équation conjuguée; on suppose, bien entendu, que θ soit l'angle des axes.

Il est bon de remarquer encore que

$$x^2 + y^2 \equiv (x + iy)(x - iy),$$
$$X^2 + 2XY\cos\theta + Y^2 \equiv [X + Y(\cos\theta + i\sin\theta)][X + Y(\cos\theta - i\sin\theta]$$

et, d'autre part,

$$x^2 + y^2 = X^2 + 2XY\cos\theta + Y^2$$

ou

$$(x + iy)(x - iy) \equiv [X + Y(\cos\theta + i\sin\theta)][X + X(\cos\theta - i\sin\theta)].$$

Si OX fait avec Ox un angle α, on a trouvé plus haut

$$x + iy = [X + Y(\cos\theta + i\sin\theta)](\cos\alpha + i\sin\alpha),$$
$$x - iy = [X + Y(\cos\theta - i\sin\theta)](\cos\alpha - i\sin\alpha),$$

ce qui fournit une vérification.

Les droites singulières que nous venons de définir ont reçu le nom de *droites isotropes*.

Pour bien préciser le sens des résultats précédents il convient de remarquer que, si m est réel, et si x, y et X, Y sont les coordonnées d'un même point rapporté à deux systèmes d'axes rectangulaires ayant même origine, les équations

$$y = mx \quad \text{et} \quad Y = mX$$

représentent deux droites différentes; si l'on passe du premier système au second par une rotation d'un angle égal à α, la seconde droite fait avec la première un angle égal à α; au contraire, si $m = i$ les deux équations définissent une seule et même droite.

2° *Une droite isotrope est perpendiculaire à elle-même;* cela signifie que l'équation $1 + mm' = 0$ est vérifiée si l'on pose $m = m' = i$ et aussi quand $m = m' = -i$.

3° *La distance de deux points pris sur une droite isotrope est nulle.*

Soient x, y et x', y' les coordonnées de deux points appartenant à une droite isotrope; on a, par exemple,

$$y - y' = i(x - x'),$$

donc

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = 0.$$

4° *La distance d'un point du plan à une droite isotrope est infinie ou indéterminée.*

L'expression

$$\frac{y_0 - ix_0 - h}{\sqrt{1 + i^2}}$$

est, par définition, la distance du point (x_0, y_0) à la droite isotrope ayant pour équation

$$y = ix + h,$$

mais $1 + i^2 = 0$; donc, l'expression précédente est infinie, à moins que le point (x_0, y_0) n'appartienne à la droite isotrope. Dans ce cas, l'expression considérée est indéterminée.

5° *L'angle d'une droite isotrope avec une autre droite quelconque est infini.*

Si dans la formule $\tang V = \frac{m' - m}{1 + mm'}$, on pose $m' = i$, on obtient, dans le second membre,

$$\frac{i - m}{1 + im},$$

c'est-à-dire i. De même, pour $m' = -i$, on obtient $-i$. Pour les mêmes substitutions, les expressions qui représentent $\sin V$ et $\cos V$, quand les droites sont réelles, sont infinies.

En supposant $\tang V = i$, la formule d'Euler $\tang V = i\frac{e^{-iV} - e^{iV}}{e^{-iV} + e^{iV}}$, donne $e^{iV} = 0$. Mais si l'on pose $V = m + ni$, de sorte que $e^{iV} = e^{im} \times e^{-n}$, on voit que $n = +\infty$. Ainsi, l'angle V est imaginaire et le coefficient de i est infini. On peut donc dire qu'une droite isotrope fait avec une droite quelconque un angle infini.

Si $\tang V = -i$, on trouvera de même $n = -\infty$.

Une droite isotrope fait avec elle-même un angle indéterminé.

6° Le rapport anharmonique ρ d'un faisceau de quatre droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, ayant pour coefficients angulaires m_1, m_2, m_3, m_4, a pour expression

$$\rho = \frac{m_1 - m_3}{m_2 - m_3} : \frac{m_1 - m_4}{m_2 - m_4}.$$

Si l'on suppose $m_3 = i$, $m_4 = -i$, et si l'on pose $\operatorname{tang} V = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$, on obtient

$$\rho = \frac{\cos V + i \sin V}{\cos V - i \sin V},$$

ou

$$\rho = e^{2iV}.$$

(LAGUERRE.)

Ainsi, en désignant par V l'angle de la droite Δ_1 avec la droite Δ_2, on voit que l'expression e^{2iV} représente ce que l'on peut appeler le rapport anharmonique du faisceau formé par ces deux droites et par les droites isotropes menées par leur point de rencontre.

Dire que deux droites réelles sont rectangulaires, revient à dire que ces droites forment un faisceau harmonique avec les droites isotropes menées par leur point d'intersection; en effet, si $V = \frac{\pi}{2}$, on a $\rho = -1$.

CHAPITRE III.

COORDONNÉES HOMOGÈNES. COORDONNÉES TRILINÉAIRES.

Coordonnées homogènes.

168. Jusqu'ici, la position d'un point dans un plan a été déterminée à l'aide de deux paramètres qui sont les *coordonnées* de ce point par rapport à un système donné d'axes. On a été conduit à faire usage de trois paramètres, au lieu de deux, de la manière suivante.

Soient x, y les coordonnées rectilignes d'un point M; on pose

$$x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z},$$

en convenant que X, Y, Z auront dans tous les cas des valeurs finies et non toutes trois nulles. Supposons qu'on prenne pour unité une ligne de la figure. Je dis qu'à tout point M correspondent des valeurs de X, Y, Z proportionnelles à des nombres déterminés, et réciproquement. Supposons en effet $x = a$, $y = b$; on en déduit

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{Z}{1},$$

ou, λ désignant un facteur arbitraire,

$$X = a\lambda, \qquad Y = b\lambda, \qquad Z = \lambda$$

Réciproquement, soient a, b, c trois nombres donnés; si l'on donne à X, Y, Z des valeurs proportionnelles à ces nombres, de sorte que

$$X = a\lambda, \qquad Y = b\lambda, \qquad Z = c\lambda.$$

On a, en supposant $c \neq 0$,

$$\frac{X}{Z} = \frac{a}{c}, \qquad \frac{Y}{Z} = \frac{b}{c},$$

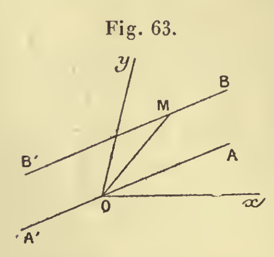
et, par suite, les coordonnées du point M sont déterminées, puisque ces équations donnent $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$.

La position du point M est donc déterminée par les trois nombres a, b, c, ou mieux, par un système quelconque de nombres proportionnels à a, b, c; de sorte que, quelle que soit la valeur de λ, les nombres λa, λb, λc déterminent un seul et même point M.

Nous nommerons λa, λb, λc les coordonnées homogènes du point M.

Cela étant, supposons que le point M soit variable, et, pour plus de simplicité, supposons qu'il décrive une ligne droite B′B ayant pour paramètres directeurs α, β (*fig.* 63). Si le point M s'éloigne indéfiniment de l'origine, ou, comme on dit, si le point M disparaît à l'infini, en restant toujours sur B′B, le rayon OM se confond à la limite, soit avec OA, soit avec OA′, A′A étant parallèle à B′B. Par suite,

Fig. 63.



le coefficient angulaire de OM a pour limite $\frac{\beta}{\alpha}$. C'est ce que l'on

vérifie aussi par le calcul. En effet, les coordonnées de M sont

$$x = x_0 + \alpha\rho, \qquad y = y_0 + \beta\rho,$$

x_0, y_0 étant les coordonnées d'un point déterminé de la droite BB'; on en déduit

$$\frac{y}{x} = \frac{y_0 + \beta\rho}{x_0 + \alpha\rho},$$

ce qui montre que $\frac{y}{x}$ a pour limite $\frac{\beta}{\alpha}$, quand ρ croît indéfiniment. Or, d'une part, pour que les coordonnées $\frac{X}{Z}$, $\frac{Y}{Z}$ grandissent indéfiniment, il est nécessaire que Z tende vers zéro, puisque X, Y, Z ont, par convention, des valeurs finies; d'autre part, $\frac{Y}{X} = \frac{y}{x}$, ce qui prouve que $\lim \frac{Y}{X} = \frac{\beta}{\alpha}$. Les coordonnées homogènes de M n'étant déterminées qu'à un facteur près, on peut poser $X = \alpha$, et, par suite, $\lim Y = \beta$. On peut donc dire que les coordonnées du point M ont alors pour limites : α, β, o. En d'autres termes, le système (α, β, o) définit le point à l'infini dans la direction A'A.

Supposons que le point M s'éloigne indéfiniment sur une parallèle à l'axe des y, ayant pour abscisse a. Dans ce cas, Z tend vers zéro, mais l'abscisse x, c'est-à-dire le rapport $\frac{X}{Z}$, devant conserver une valeur finie a, il faut que X tende vers zéro; Y n'est assujetti à aucune condition. On peut dire, par suite, que le système (o, λ, o) représente un point à l'infini dans la direction $y'y$; si l'abscisse de ce point est égale à a, il faut supposer en outre $\lim \frac{X}{Z} = a$. Pareillement (λ, o, o) représente un point à l'infini dans la direction de l'axe des x.

D'une manière générale, si X, Y, Z tendent vers des limites α, β, γ, le point M tend vers le point qui a pour coordonnées cartésiennes $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$; si $\gamma = 0$, le point M est à l'infini, la direction OM ayant pour limite la direction définie par les deux paramètres directeurs α, β. Donc, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point (X, Y, Z) soit à l'infini est $Z = 0$.

169. Soit $f(x, y)$ un polynome de degré m; ce polynome étant

mis sous la forme

$$\varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \ldots + \varphi_1(x, y) + \varphi_0;$$

si l'on représente par $F(X, Y, Z)$ le polynome *homogène* et de degré m

$$\varphi_m(X, Y) + Z\varphi_{m-1}(X, Y) + Z^2\varphi_{m-2}(X, Y) + \ldots + Z^{m-1}\varphi_1(X, Y) + Z^m\varphi_0,$$

on a identiquement

$$F(X, Y, Z) = Z^m f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) = Z^m f(x, y).$$

Cela posé, à toute solution $x = a$, $y = b$ de l'équation $f(x, y) = 0$ correspond une solution de l'équation $F(X, Y, Z) = 0$, savoir $X = \lambda a$, $Y = \lambda b$, $Z = \lambda$, λ étant arbitraire.

Réciproquement, si l'équation $F(X, Y, Z) = 0$ est vérifiée en posant $X = a$, $Y = b$, $Z = c$; remarquons d'abord qu'elle le sera aussi en posant $X = \lambda a$, $Y = \lambda b$, $Z = \lambda c$. Quelle que soit la valeur de λ, l'équation $f(x, y) = 0$ admet la solution $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$, en supposant $c \neq 0$. On voit ainsi que la courbe C, ayant pour équation $f(x, y) = 0$, peut aussi bien être représentée par l'équation homogène $F(X, Y, Z) = 0$.

Supposons maintenant que cette équation homogène admette la solution $X = \alpha$, $Y = \beta$, $Z = 0$, et soient x_0, y_0 les coordonnées d'un point A et a, b les paramètres directeurs d'une droite Δ. Menons par A une parallèle AB à la droite Δ. Les coordonnées d'un point M de AM étant $x = x_0 + a\rho$, $y = y_0 + b\rho$, ce point sera sur la courbe C, si l'on remplace ρ par une racine de l'équation

$$f(x_0, + a\rho, y_0 + b\rho) = 0.$$

Or le coefficient de ρ^m est $\varphi_m(a, b)$ ou $F(a, b, 0)$. Donc, si l'on suppose que a tende vers α et b vers β, l'un au moins des points d'intersection de la sécante AB et de la courbe C s'éloigne à l'infini. On peut dire encore que la courbe C a, dans ce cas, un point à l'infini, ayant pour coordonnées α, β, 0.

L'équation d'une droite $Ax + By + C = 0$ devient, en coordonnées homogènes,

$$AX + BY + CZ = 0;$$

il revient au même de dire que B, $-$A sont les paramètres direc-

teurs de cette droite, ou que le point à l'infini (B, — A, o) est sur la même droite; on trouve ainsi pour chaque droite un seul point à l'infini.

170. L'équation d'une droite, en coordonnées homogènes, $AX + BY + CZ = 0$, se réduit à $Z = 0$, quand A et B tendent vers zéro, C restant différent de zéro, c'est-à-dire quand la droite considérée disparaît à l'infini. Or nous avons vu que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point soit à l'infini est que le Z de ce point soit nul. Pour ces raisons, on convient de dire que tous les points à l'infini d'un plan sont sur une droite *fictive* qu'on nomme *la droite de l'infini* et qui est définie par l'équation $Z = 0$.

171. Nous avons trouvé les coordonnées (x, y) du point M qui divise un segment M_1M_2 dans le rapport $\frac{MM_1}{MM_2} = -\lambda$; x_1, y_1 et x_2, y_2 étant les coordonnées cartésiennes des points M_1 et M_2, on a

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Si l'on pose $x = \frac{X}{Z}$, $y = \frac{Y}{Z}$, $x_1 = \frac{X_1}{Z_1}$, ..., ces formules se transforment de la manière suivante. Considérons la première, par exemple; elle devient

$$\frac{X}{Z} = \frac{\frac{X_1}{Z_1} + \lambda \frac{X_2}{Z_2}}{1 + \lambda} = \frac{X_1 + \lambda \frac{Z_1}{Z_2} X_2}{Z_1 + \lambda Z_1}$$

et, en posant $\frac{\lambda Z_1}{Z_2} = \mu$,

$$\frac{X}{Z} = \frac{X_1 + \mu X_2}{Z_1 + \mu Z_2}.$$

De même

$$\frac{Y}{Z} = \frac{Y_1 + \mu Y_2}{Z_1 + \mu Z_2}$$

et, par suite, les coordonnées homogènes du point M sont déterminées par les formules

$$\frac{X}{X_1 + \mu X_2} = \frac{Y}{Y_1 + \mu Y_2} = \frac{Z}{Z_1 + \mu Z_2};$$

mais il convient de remarquer que l'on n'a pas, en général,

$$MM_1 + \mu MM_2 = 0,$$

à moins que $Z_1 = Z_2$.

On suppose $Z_1 \neq 0$, $Z_2 \neq 0$; la condition $\lambda = 0$ entraîne $\mu = 0$ et réciproquement. Si λ est infini, il en est de même de μ. Soient λ', λ'' deux valeurs attribuées à λ, et μ', μ'' les valeurs correspondantes de μ; les équations $\lambda' = \lambda''$ et $\mu' = \mu''$ sont équivalentes; de même pour $\lambda' = -\lambda''$ et $\mu' = -\mu''$, et, plus généralement, si $\lambda'' = a\lambda'$, on a aussi $\mu'' = a\mu'$.

D'après cela, si l'on considère deux points M_1, M_2 ayant respectivement pour coordonnées homogènes X_1, Y_1, Z_1 et X_2, Y_2, Z_2; le point M, ayant pour coordonnées homogènes $X_1 + \mu X_2$, $Y_1 + \mu Y_2$, $Z_1 + \mu Z_2$, est un point de la droite M_1M_2. Si μ varie de $-\infty$ à $+\infty$, le point M décrit la droite M_1M_2 tout entière; si $\mu = 0$, M coïncide avec M_1; si μ est infini, M coïncide avec M_2, car on peut dire que les coordonnées de M sont $\frac{1}{\mu}X_1 + X_2$, $\frac{1}{\mu}Y_1 + Y_2$, $\frac{1}{\mu}Z_1 + Z_2$.

Le rapport anharmonique des quatre points μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 est égal à $\frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_1 - \mu_4} : \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_4}$.

Les quatre points (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), $(X_1 + \lambda X_2, \ldots)$, $(X_1 - \lambda X_2, \ldots)$ forment une division harmonique.

Enfin, si l'on considère les points variables

$$(X_1 + \lambda X_2,\ Y_1 + \lambda Y_2,\ Z_1 + \lambda Z_2) \quad \text{et} \quad (X_3 + \mu X_4,\ Y_3 + \mu Y_4,\ Z_3 + \mu Z_4);$$

si ces points se correspondent de façon que

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0,$$

A, B, C, D étant des constantes, on voit qu'à chaque point M de la droite M_1M_2 correspond un point M' pris sur M_3M_4 et réciproquement. On dit alors que les points M et M' tracent sur les deux droites considérées deux divisions homographiques.

Supposons maintenant que le point M_2 soit à l'infini et, par suite, soit $Z_2 = 0$; le point M, ayant pour coordonnées homogènes $X_1 + \lambda X_2$, $Y_1 + \lambda Y_2$, Z_1, a pour coordonnées cartésiennes

$$\frac{X_1}{Z_1} + \frac{\lambda}{Z_1}X_2, \quad \frac{Y_1}{Z_1} + \frac{\lambda}{Z_1}Y_2 \quad \text{ou} \quad x_1 + X_2\rho, \quad y_1 + Y_2\rho,$$

en posant $\frac{\lambda}{Z_1} = \rho$. C'est donc un point de la droite menée par M_1 et ayant pour paramètres directeurs X_2 et Y_2, c'est-à-dire un point de M_1M_2; on peut donc étendre ce qui précède au cas où l'un des points M_1 ou M_2 est à l'infini.

Coordonnées trilinéaires.

171. Soient x, y, z les coordonnées homogènes d'un point, et α, β, γ trois nouvelles variables liées à x, y, z par les équations

$$\alpha = Px + Qy + Rz, \qquad \beta = P'x + Q'y + R'z, \qquad \gamma = P''x + Q''y + R''z,$$

le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ P' & Q' & R' \\ P'' & Q'' & R'' \end{vmatrix}$$

étant différent de zéro.

A tout point M du plan correspond un système de valeurs de α, β, γ proportionnelles à des nombres déterminés et réciproquement, si l'on suppose α, β, γ proportionnels à des nombres donnés, de sorte que $\alpha = \lambda\alpha_1$, $\beta = \lambda\beta_1$, $\gamma = \lambda\gamma_1$, on pourra résoudre le système

$$\begin{aligned} Px + Qy + Rz &= \lambda\alpha_1, \\ P'x + Q'y + R'z &= \lambda\beta_1, \\ P''x + Q''y + R''z &= \lambda\gamma_1, \end{aligned}$$

le déterminant de ce système étant différent de zéro. On voit que, si λ varie, la solution du système précédent varie aussi; mais x, y, z restent proportionnels à des nombres donnés et, par conséquent, à tout système de valeurs de α, β, γ proportionnelles à des nombres donnés correspond un point déterminé M. On peut donc prendre pour coordonnées *trois fonctions linéaires, distinctes* de x, y, z; on dit que ces fonctions α, β, γ sont les *coordonnées trilinéaires* du point M, dont x, y, z sont les coordonnées homogènes.

Les droites représentées par les équations $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ respectivement, c'est-à-dire les droites représentées par les équations

$$Px + Qy + Rz = 0, \qquad P'x + Q'y + R'z = 0, \qquad P''x + Q''y + R''z = 0,$$

forment, en général, un triangle, puisqu'on suppose le déterminant $D \neq 0$; mais il convient de remarquer que deux de ces droites peuvent être parallèles, la troisième les rencontrant toutes deux. L'une de ces droites peut être rejetée à l'infini, les deux autres étant concourantes, et enfin une ou plusieurs d'entre elles peuvent être imaginaires. Par exemple, on peut poser $\alpha = x + yi$, $\beta = x - yi$, $\gamma = z$.

Il est évident que les coordonnées homogènes ne sont qu'un cas particulier des coordonnées trilinéaires.

172. Considérons plus particulièrement le cas où les coefficients des fonctions α, β, γ sont tous réels, et supposons que les droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ forment un triangle véritable ABC, que l'on nomme *triangle de référence*.

Rapportons la figure à deux axes de coordonnées rectangulaires OX, OY, l'origine étant à l'intérieur du triangle de référence; en outre, supposons le sens positif de rotation choisi de façon qu'un rayon tournant autour de l'origine dans le sens positif rencontre les sommets du triangle dans l'ordre A, B, C. Cela étant, on peut représenter les côtés BC, CA, AB par des équations de la forme

$$X\cos\varphi + Y\sin\varphi - h = 0,$$
$$X\cos\psi + Y\sin\psi - k = 0,$$
$$X\cos\theta + Y\sin\theta - l = 0.$$

On a donc (80), λ, μ, ν étant des constantes,

$$P\frac{x}{z} + Q\frac{y}{z} + R \equiv \lambda(X\cos\varphi + Y\sin\varphi - h),$$

$$P'\frac{x}{z} + Q'\frac{y}{z} + R' \equiv \mu(X\cos\psi + Y\sin\psi - k),$$

$$P''\frac{x}{z} + Q''\frac{y}{z} + R'' \equiv \nu(X\cos\theta + Y\sin\theta - l)$$

et, par suite,

$$\alpha \equiv \lambda z(X\cos\varphi + Y\sin\varphi - h),$$
$$\beta \equiv \mu z(X\cos\psi + Y\sin\psi - k),$$
$$\gamma \equiv \nu z(X\cos\theta + Y\sin\theta - l).$$

Si l'on suppose h, k, l positifs, les polynomes entre parenthèses représentent respectivement les distances du point (X, Y) aux trois côtés du triangle de référence, chacune de ces distances étant regardée comme négative quand le point (X, Y) est du même côté que l'origine par rapport au côté considéré, et positive dans le cas contraire; de sorte qu'en désignant par α_1, β_1, γ_1 les mesures algébriques de ces distances, on peut poser

$$\frac{\alpha}{\lambda\alpha_1} = \frac{\beta}{\mu\beta_1} = \frac{\gamma}{\nu\gamma_1}.$$

On obtient ainsi une infinité de systèmes de coordonnées trilinéaires, caractérisés par les nombres λ, μ, ν. Si l'on suppose $\lambda = \mu = \nu$, les coordonnées d'un point M sont proportionnelles aux distances de ce point aux côtés du triangle de référence. Dans ce cas particulier, les coordonnées d'un point M ont toutes les trois le même signe quand ce point est à l'intérieur du triangle de référence, et si le point M se déplace et traverse l'un des côtés du triangle, la coordonnée correspondante change de signe. Ce système particulier de

coordonnées a reçu le nom de *système de coordonnées trilinéaires normales* ou *coordonnées trilatères*.

Soient x, y les coordonnées rectangulaires d'un point M, et $ux + vy + 1 = 0$ l'équation d'une droite Δ; on peut poser

$$\alpha = x, \ \beta = y, \ \gamma = ux + vy + 1.$$

Si Δ s'éloigne à l'infini, u et v tendent vers zéro, et les coordonnées du point M ont pour limites $x, y, 1$.

On peut encore remarquer que si $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sont les distances de M aux côtés du triangle de référence formé par les axes et la droite Δ, et si l'on nomme h la distance de l'origine à Δ, on a posé

$$\alpha = \alpha_1, \qquad \beta = \beta_1, \qquad \gamma = \frac{\gamma_1}{h}.$$

Si Δ s'éloigne indéfiniment en conservant une direction fixe, on a évidemment

$$h = \gamma_1 + k,$$

k étant la projection de OM sur une perpendiculaire à Δ; donc $\frac{\gamma_1}{h}$ a pour limite 1. On ferait une démonstration analogue avec des axes obliques. Donc, quand on rapporte un point à deux axes, on peut dire que le triangle de référence est formé par ces deux axes et la droite de l'infini.

173. *Relation entre les coordonnées normales d'un point.* — Étant donné un point M, ses distances aux trois côtés du triangle de référence sont déterminées en grandeur et en signe; mais on ne peut pas, en général, déterminer un point dont les coordonnées normales soient égales à des nombres donnés; il y a, en effet, entre ces coordonnées une relation linéaire que nous allons établir.

Reprenons les équations qui définissent α, β, γ, et cherchons, d'une manière générale, à quelle condition on peut supposer $z = 1$, et prendre, par suite, pour x, y les coordonnées cartésiennes du point M. On pose alors

$$\begin{aligned} Px + Qy + R &= \alpha, \\ P'x + Q'y + R' &= \beta, \\ P''x + Q''y + R'' &= \gamma, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en éliminant x et y,

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ P' & Q' & R' \\ P'' & Q'' & R'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P & Q & \alpha \\ P' & Q' & \beta \\ P'' & Q'' & \gamma \end{vmatrix}.$$

Il y a, par suite, entre α, β, γ une relation linéaire

$$r\alpha + r'\beta + r''\gamma = D,$$

r, r', r'', D étant quatre constantes, toutes les quatre différentes de zéro, si le triangle de référence existe.

Dans le cas général, on a

$$Dz = r\alpha + r'\beta + r''\gamma;$$

d'où il résulte que la droite de l'infini ($z = 0$) a pour équation

$$r\alpha + r'\beta + r''\gamma = 0.$$

Occupons-nous maintenant des coordonnées normales et posons

$$\begin{aligned}\alpha &= h - x\cos\varphi - y\sin\varphi,\\ \beta &= k - x\cos\psi - y\sin\psi,\\ \gamma &= l - x\cos\theta - y\sin\theta;\end{aligned}$$

la relation entre α, β, γ sera

$$\begin{aligned}&\alpha\sin(\theta - \psi) + \beta\sin(\varphi - \theta) + \gamma\sin(\psi - \varphi)\\ &\quad = h\sin(\theta - \psi) + k\sin(\varphi - \theta) + l\sin(\psi - \varphi).\end{aligned}$$

On peut aisément transformer cette relation en y introduisant les angles A, B, C du triangle de référence. Supposons d'abord l'axe $\overline{OX}$ parallèle à $\overline{BC}$, et l'axe $\overline{OY}$ dirigé de façon que l'ordonnée de A soit positive. Dans ces conditions, on peut poser

$$\varphi = \frac{3\pi}{2}, \qquad \psi = \frac{\pi}{2} - C, \qquad \theta = \frac{\pi}{2} + B,$$

d'où

$$\theta - \psi = B + C, \qquad \varphi - \theta = \pi - B, \qquad \psi - \varphi = -(\pi + C).$$

Cela étant, si l'on fait tourner les axes d'un angle ω, chacun des angles φ, ψ, θ augmentant de ω, les différences précédentes ne changeront pas.

La relation fondamentale devient ainsi

$$\alpha\sin A + \beta\sin B + \gamma\sin C = h\sin A + k\sin B + l\sin C,$$

ou encore, a, b, c désignant les côtés du triangle de référence et $2S$ le double de sa surface,

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = ah + bk + cl = 2S,$$

puisque h, k, l sont les distances de l'origine aux trois côtés du triangle.

La droite de l'infini a donc pour équation, en coordonnées normales,

$$\alpha\sin A + \beta\sin B + \gamma\sin C = 0$$

ou encore

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0.$$

174. On peut disposer des paramètres λ, μ, ν de façon qu'une droite don-

née soit représentée par une équation du premier degré ayant des coefficients donnés d'avance. Soient, en effet, α_1, β_1, γ_1 les coordonnées normales et $u\alpha_1 + v\beta_1 + w\gamma_1 = 0$ l'équation d'une droite déterminée. Cette droite aura pour équation

$$L\alpha + M\beta + N\gamma = 0,$$

si l'on pose $\alpha = \lambda\alpha_1$, $\beta = \mu\beta_1$, $\gamma = \nu\gamma_1$, à condition que

$$\frac{L\lambda}{u} = \frac{M\mu}{v} = \frac{N\nu}{w};$$

en particulier, si l'on suppose $\frac{\lambda}{u} = \frac{\mu}{v} = \frac{\nu}{w}$, l'équation de la droite donnée sera, dans le système choisi,

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

175. *Coordonnées barycentriques.* — On nomme ainsi un système de coordonnées trilinéaires dans lequel la droite de l'infini a pour équation

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

D'après ce qui précède (n° 174), pour que la droite de l'infini ait pour équation

$$L\alpha + M\beta + N\gamma = 0,$$

on doit supposer

$$\frac{L\lambda}{a} = \frac{M\mu}{b} = \frac{N\nu}{c};$$

et en particulier, si $L = M = N$:

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{\mu}{b} = \frac{\nu}{c}.$$

Donc, dans ce cas, on peut poser

$$\alpha = a(h - x\cos\varphi - y\sin\varphi),$$
$$\beta = b(k - x\cos\psi - y\sin\psi),$$
$$\gamma = c(l - x\cos\theta - y\sin\theta).$$

Les coordonnées α, β, γ d'un point M sont alors proportionnelles aux produits des distances de ce point aux côtés du triangle de référence multipliées chacune par la longueur du côté correspondant, ou, ce qui revient au même, elles sont proportionnelles aux aires des triangles MBC, MCA, MAB. On voit encore aisément que, si l'on suppose que A, B, C soient des points matériels ayant pour masses α, β, γ, le centre de gravité de ce système sera précisément le point M ayant pour coordonnées α, β, γ ; ce qui explique le nom de *coordonnées barycentriques* que Möbius a donné à ce système qu'il a employé le premier.

176. *Équation d'une courbe en coordonnées trilinéaires.* — Soit

$f(X, Y) = 0$ l'équation d'une courbe rapportée à un système de coordonnées rectilignes. Nous pouvons, en premier lieu, remplacer ces coordonnées par des coordonnées homogènes et nous obtiendrons ainsi une équation homogène $F(x, y, z) = 0$, comme nous l'avons déjà expliqué. En second lieu, on peut, au moyen d'une substitution linéaire, passer des coordonnées homogènes à un système de coordonnées trilinéaires : on obtient ainsi une équation homogène $F_1(\alpha, \beta, \gamma) = 0$.

Réciproquement, toute équation homogène $F_1(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, dans laquelle α, β, γ sont des fonctions linéaires et homogènes de trois variables x, y, z, peut se mettre sous la forme $F(x, y, z) = 0$, ou encore, en posant $\frac{x}{z} = X$, $\frac{y}{z} = X$, sous la forme $F(X, Y, 1) = 0$, ou plus simplement $f(X, Y) = 0$. Il en est de même, d'ailleurs, de toute équation entre des fonctions linéaires, homogènes ou non, des variables X, Y.

On peut obtenir souvent l'équation d'une courbe en coordonnées trilinéaires sous forme non homogène, mais il est toujours facile de rétablir l'homogénéité. Supposons, en effet, qu'on ait obtenu l'équation algébrique, non homogène et de degré m, $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ et soit $A\alpha^u\beta^v\gamma^w$ un terme de $f(\alpha, \beta, \gamma)$, tel que $u + v + w < m$. Supposons que le terme de degré le plus faible soit de degré m', m' pouvant d'ailleurs être nul. Si α, β, γ sont des fonctions de x et y, liées par la relation fondamentale $r\alpha + r'\beta + r''\gamma = D$, on multipliera tous les termes de l'équation par $D^{m-m'}$; mais, au lieu de $A\alpha^u\beta^v\gamma^w D^{m-m'}$, on écrira

$$A\alpha^u\beta^v\gamma^w(r\alpha + r'\beta + r''\gamma)^{m-u-v-w}D^{u+v+w-m'},$$

et de même pour tous les termes de degré moindre que m.

177. *Équation de la droite passant par deux points dont on donne les coordonnées trilinéaires* $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$. — L'équation demandée est évidemment

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\alpha(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + \beta(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') + \gamma(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') = 0.$$

178. L'équation d'une droite étant mise sous la forme $u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$, on voit que cette droite est déterminée si l'on connaît les coefficients u, v, w ou simplement leurs rapports. On peut donc désigner une droite par le système (u, v, w) des coefficients des coordonnées courantes α, β, γ dans l'équation de cette droite. Pour cette raison, u, v, w se nomment les *coordonnées* de la droite; mais, pour éviter toute confusion, ces coordonnées d'une nouvelle espèce ont été appelées *coordonnées tangentielles;* nous verrons plus tard la raison de cette dénomination. Les coordonnées rectilignes ou trilinéaires se nomment, par opposition, *coordonnées ponctuelles*.

Il résulte de ce qui précède que les coordonnées tangentielles de la droite passant par les points $M'(\alpha', \beta', \gamma')$ et $M''(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ sont

$$\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'', \qquad \gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'', \qquad \alpha'\beta'' - \beta'\alpha''.$$

179. *Coordonnées du point de concours des droites* (u', v', w') et (u'', v'', w''). — Les deux équations simultanées

$$u'\alpha + v'\beta + w'\gamma = 0, \qquad u''\alpha + v''\beta + w''\gamma = 0$$

donnent

$$\frac{\alpha}{v'w'' - w'v''} = \frac{\beta}{w'u'' - u'w''} = \frac{\gamma}{u'v'' - v'u''};$$

donc le point de concours des deux droites considérées a pour coordonnées ponctuelles

$$v'w'' - w'v'', \qquad w'u'' - u'w'', \qquad u'v'' - v'u''.$$

180. *Condition pour que deux droites soient parallèles.* — Il résulte de ce qui précède que le point de concours des deux droites (u', v', w'), (u'', v'', w'') sera à l'infini si

$$r(v'w'' - w'v'') + r'(w'u'' - u'w'') + r''(u'v'' - v'u'') = 0.$$

En particulier, dans le cas des coordonnées *normales*, la condition de parallélisme est

$$(v'w'' - w'v'')\sin A + (w'u'' - u'w'')\sin B + (u'v'' - v'u'')\sin C = 0.$$

181. *Équation générale des droites parallèles à une droite donnée.* — Soit

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$$

l'équation d'une droite donnée. En désignant par k une constante arbitraire, l'équation demandée est, en coordonnées homogènes,

$$u\alpha + v\beta + w\gamma + kz = 0.$$

Mais nous avons trouvé l'identité

$$r\alpha + r'\beta + r''\gamma = Dz;$$

l'équation générale cherchée est donc

$$D(u\alpha + v\beta + w\gamma) + k(r\alpha + r'\beta + r''\gamma) = 0.$$

On obtient immédiatement cette équation en écrivant l'équation d'une droite passant par le point de concours de la droite donnée et de la droite de l'infini.

L'équation

$$(u\alpha + v\beta + w\gamma)(r\alpha' + r'\beta' + r''\gamma') - (u\alpha' + v\beta' + w\gamma')(r\alpha + r'\beta + r''\gamma) = 0$$

représente la parallèle à la droite donnée qui passe par le point $(\alpha', \beta', \gamma')$.

182. *Formules de transformation de coordonnées ponctuelles ou tangentielles.* — Les équations fondamentales

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha = Px + Qy + Rz, \\ \beta = P'x + Q'y + R'z, \\ \gamma = P''x + Q''y + R''z \end{cases}$$

donnent

$$(2)\qquad \begin{cases} Dx = p\alpha + p'\beta + p''\gamma, \\ Dy = q\alpha + q'\beta + q''\gamma, \\ Dz = r\alpha + r'\beta + r''\gamma, \end{cases}$$

$p, p', \ldots, r''$ désignant les mineurs de D, précédés de signes convenablement choisis.

Si, dans l'équation d'une droite (u, v, w), on remplace α, β, γ par leurs expressions en x, y, z, on obtiendra l'identité

$$u\alpha + v\beta + w\gamma \equiv u_1 x + v_1 y + w_1 z,$$

où

$$(3)\qquad \begin{cases} u_1 = Pu + P'v + P''w, \\ v_1 = Qu + Q'v + Q''w, \\ w_1 = Ru + R'v + R''w, \end{cases}$$

et l'on déduit de ces formules

$$(4)\qquad \begin{cases} Du = pu_1 + qv_1 + rw_1, \\ Dv = p'u_1 + q'v_1 + r'w_1, \\ Dw = p''u_1 + q''v_1 + r''w_1, \end{cases}$$

Soient (x, y, z), (x', y', z') les coordonnées homogènes de deux points, et (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ leurs coordonnées trilinéaires; on déduit de (1)

$$\beta\gamma' - \gamma\beta' = \begin{vmatrix} P'x + Q'y + R'z & P'x' + Q'y' + R'z' \\ P''x + Q''y + R''z & P''x' + Q''y' + R''z' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} P' & Q' & R' \\ P'' & Q'' & R'' \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{Vmatrix};$$

donc

$$(5)\qquad \begin{cases} \beta\gamma' - \gamma\beta' = p\,(yz' - zy') + q\,(zx' - xz') + r\,(xy' - yx'), \\ \gamma\alpha' - \alpha\gamma' = p'(yz' - zy') + q'(zx' - xz') + r'(xy' - yx'), \\ \alpha\beta' - \beta\alpha' = p''(yz' - zy') + q''(zx' - xz') + r''(xy' - yx'), \end{cases}$$

et l'on en tire

$$(6)\qquad \begin{cases} D(yz' - zy') = P(\beta\gamma' - \gamma\beta') + P'(\gamma\alpha' - \alpha\gamma') + P''(\alpha\beta' - \beta\alpha'), \\ D(zx' - xz') = Q(\beta\gamma' - \gamma\beta') + Q'(\gamma\alpha' - \alpha\gamma') + Q''(\alpha\beta' - \beta\alpha'), \\ D(xy' - yx') = R(\beta\gamma' - \gamma\beta') + R'(\gamma\alpha' - \alpha\gamma') + R''(\alpha\beta' - \beta\alpha'). \end{cases}$$

On aurait des formules analogues pour les coordonnées tangentielles.

183. La droite Δ, représentée par l'équation

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0,$$

sépare le plan en deux régions. Mais, pour deux points (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$, situés d'un même côté de cette droite, les expressions $u\alpha + v\beta + w\gamma$ et $u\alpha' + v\beta' + w\gamma'$ peuvent avoir le même signe ou des signes contraires, car on peut multiplier les coordonnées homogènes ou les coordonnées trilinéaires d'un point par un facteur arbitraire positif ou négatif. L'identité

$$\frac{u\alpha + v\beta + w\gamma}{z} \equiv u_1 \frac{x}{z} + v_1 \frac{y}{z} + w_1$$

montre que l'expression

$$\frac{u\alpha + v\beta + w\gamma}{z},$$

ou l'expression équivalente

$$\frac{D(u\alpha + v\beta + w\gamma)}{r\alpha + r'\beta + r''\gamma}$$

conserve un signe invariable pour tous les points situés d'un côté déterminé de la droite Δ. Le facteur D étant constant, on peut se borner à considérer la fraction

$$\frac{u\alpha + v\beta + w\gamma}{r\alpha + r'\beta + r''\gamma}.$$

184. *Forme absolue.* — Soit

$$u\alpha + v\beta + w\gamma \equiv u_1 x + v_1 y + w_1 z = 0$$

l'équation d'une droite Δ. Cette droite est isotrope, si l'on a $u_1^2 + v_1^2 = 0$, en supposant les coordonnées cartésiennes $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ rectangulaires. Or

$$u_1^2 + v_1^2 = (Pu + P'v + P''w)^2 + (Qu + Q'v + Q''w)^2.$$

Nous désignerons par $\Phi(u, v, w)$ la forme quadratique, égale à la somme de deux carrés, que nous venons d'obtenir, et qui a été nommée par M. Cayley *la forme absolue*. Le discriminant de cette forme est nul; donc la *forme adjointe* est un carré parfait, et l'on reconnaît sans difficulté qu'elle est égale au carré de $ru + r'v + r''w$. Nous avons posé

$$\alpha = \lambda(x\cos\varphi + y\sin\varphi - hz),$$
$$\beta = \mu(x\cos\psi + y\sin\psi - kz),$$
$$\gamma = \nu(x\cos\theta + y\sin\theta - lz),$$

et, par suite, la forme absolue a pour expression générale

$$(\lambda u\cos\varphi + \mu v\cos\psi + \nu w\cos\theta)^2 + (\lambda u\sin\varphi + \mu v\sin\psi + \nu w\sin\theta)^2$$

ou, en développant,

$$\Phi(u, v, w) \equiv \lambda^2 u^2 + \mu^2 v^2 + \nu^2 w^2 \\ - 2\mu\nu . vw \cos A - 2\nu\lambda . wu \cos B - 2\lambda\mu . uv \cos C.$$

185. *Angle de deux droites.* — Soient Δ, Δ' deux droites, ayant pour équations respectivement

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0, \qquad u'\alpha + v'\beta + w'\gamma = 0.$$

En posant $(D, D') = V$, on a

$$\cos V = \frac{u_1 u'_1 + v_1 v'_1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}\sqrt{u_1'^2 + v_1'^2}}.$$

Le numérateur, eu égard aux formules (3), a pour expression

$$(Pu + P'v + P''w)(Pu' + P'v' + P''w') \\ + (Qu + Q'v + Q''w)(Qu' + Q'v' + Q''w').$$

Or il est évident que cette expression est égale à la moitié du coefficient de λ dans le développement de $\Phi(u + \lambda u', v + \lambda v', w + \lambda w')$; donc

(7) $$\cos V = \frac{\frac{1}{2}\left(u'\frac{\partial\Phi}{\partial u} + v'\frac{\partial\Phi}{\partial v} + w'\frac{\partial\Phi}{\partial w}\right)}{\sqrt{\Phi(u, v, w)\Phi(u', v', w')}}.$$

On a de même

$$\sin V = \frac{u_1 v'_1 - v_1 u'_1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}\sqrt{u_1'^2 + v_1'^2}},$$

c'est-à-dire

(8) $$\sin V = \frac{r(vw' - wv') + r'(wu' - uw') + r''(uv' - vu')}{\sqrt{\Phi(u, v, w)\Phi(u', v', w')}}.$$

La condition d'orthogonalité des deux droites Δ, Δ' est donc

(9) $$u'\frac{\partial\Phi}{\partial u} + v'\frac{\partial\Phi}{\partial v} + w'\frac{\partial\Phi}{\partial w} = 0.$$

S'il s'agit de coordonnées normales, on obtient

(10) $$\left\{\begin{aligned} &uu' + vv' + ww' - (vw' + wv')\cos A \\ &\qquad - (wu' + uw')\cos B - (uv' + vu')\cos C = 0. \end{aligned}\right.$$

On obtient d'ailleurs cette condition directement en exprimant que

$$(u\cos\varphi + v\cos\psi + w\cos\theta)(u'\cos\varphi + v'\cos\psi + w'\cos\theta) \\ + (u\sin\varphi + \ldots)(u'\sin\varphi + \ldots) = 0.$$

En égalant à zéro le numérateur de $\sin V$, on retrouve la condition de parallélisme que nous avons déjà obtenue (180).

186. *Distance de deux points.* — Le carré de la distance des deux points (x, y, z), (x', y', z') a pour expression

$$d^2 = \frac{(yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2}{z^2 z'^2},$$

c'est-à-dire, en vertu des formules (2) et (6),

$$d^2 = \frac{D^2\,\Phi(\beta\gamma' - \gamma\beta',\ \gamma\alpha' - \alpha\gamma',\ \alpha\beta' - \beta\alpha')}{(r\alpha + r'\beta + r''\gamma)^2\,(r\alpha' + r'\beta' + r''\gamma')^2}.$$

D'après cela, l'équation $\Phi(\beta\gamma' - \gamma\beta',\ \gamma\alpha' - \alpha\gamma',\ \alpha\beta' - \beta\alpha') = 0$ représente les deux droites isotropes issues du point $(\alpha', \beta', \gamma')$.

187. *Distance d'un point à une droite.* — La distance du point (x_1, y_1, z_1) à la droite (u, v, w) a pour expression

$$d = \frac{1}{z_1}\,\frac{u_1 x_1 + v_1 y_1 + w_1 z_1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}$$

ou

$$d = \frac{D(u\alpha_1 + v\beta_1 + w\gamma_1)}{(r\alpha_1 + r'\beta_1 + r''\gamma_1)\sqrt{\Phi(u, v, w)}}.$$

188. *Trouver les équations des bissectrices, des médianes, des hauteurs, etc. du triangle de référence.* — Pour plus de simplicité, nous supposerons qu'il s'agisse de coordonnées *normales;* mais les méthodes s'appliqueraient à des coordonnées trilinéaires quelconques.

1° La bissectrice *intérieure* de l'angle A, étant le lieu des points situés à égales distances des côtés AB et AC, a pour équation $\beta - \gamma = 0$.

La bissectrice *extérieure* du même angle a pour équation $\beta + \gamma = 0$; car les distances d'un point quelconque de cette bissectrice aux côtés AB, AC ont des signes contraires. On vérifie ainsi, d'ailleurs, que ces deux bissectrices sont conjuguées harmoniques par rapport aux côtés AB, AC.

Les trois bissectrices *intérieures*, ayant respectivement pour équations $\beta - \gamma = 0$, $\gamma - \alpha = 0$, $\alpha - \beta = 0$, se coupent au point $\alpha = \beta = \gamma = \frac{S}{p}$, p désignant le demi-périmètre du triangle de référence. On vérifie ainsi que le rayon du cercle inscrit est égal à $\frac{S}{p}$; on peut ajouter que, les coordonnées du centre de ce cercle étant égales, on peut les supposer égales à l'unité.

On voit de même que deux bissectrices extérieures et une bissectrice intérieure concourent en un même point, qui est le centre de l'un des cercles exinscrits au triangle de référence. Ainsi, par exemple, les trois bissectrices $\alpha + \beta = 0$, $\alpha + \gamma = 0$, $\beta - \gamma = 0$ concourent au point $-\alpha = \beta = \gamma$; d'où l'on tire, pour le rayon r_a du cercle exinscrit tangent au côté AB : $r_a = \frac{S}{p - a}$. Les coordonnées du centre de ce cercle sont $-1, 1, 1$.

2° *Médianes.* — Le sommet A, ayant pour coordonnées 1, 0, 0, la parallèle à BC menée par A a pour équation (181) $b\beta + c\gamma = 0$; donc la médiane issue du sommet A, étant la conjuguée harmonique de cette parallèle par rapport aux côtés AB, AC, a pour équation $b\beta - c\gamma = 0$.

Les deux autres médianes ayant, d'après cela, pour équations

$$c\gamma - a\alpha = 0, \qquad a\alpha - b\beta = 0,$$

on voit que ces droites se rencontrent au point $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$.

Avec des coordonnées barycentriques, les médianes ont pour équations

$$\beta - \gamma = 0, \qquad \gamma - \alpha = 0, \qquad \alpha - \beta = 0,$$

et leur point de concours a pour coordonnées 1, 1, 1, ce qui est évident *a priori*, puisque, G étant le centre de gravité du triangle, les trois triangles GBC, GCA, GAB sont équivalents.

3° *Hauteurs.* — L'équation de la hauteur issue du sommet A est de la forme $\beta + \lambda\gamma = 0$. En exprimant que cette droite est perpendiculaire au côté BC, la condition trouvée plus haut (185) donne

$$\lambda \cos B + \cos C = 0.$$

On obtient donc pour la hauteur cherchée l'équation

$$\beta \cos B - \gamma \cos C = 0;$$

c'est ce que l'on vérifie en calculant le rapport des distances du pied de la hauteur aux deux côtés AB, AC.

Les deux autres hauteurs ont pour équations

$$\gamma \cos C - \alpha \cos A = 0, \qquad \alpha \cos A - \beta \cos B = 0;$$

on en conclut immédiatement que les trois hauteurs se rencontrent au point dont les coordonnées normales sont proportionnelles à $\frac{1}{\cos A}, \frac{1}{\cos B}, \frac{1}{\cos C}$.

4° *Perpendiculaires aux milieux des côtés.* — La perpendiculaire élevée au milieu D de BC a une équation de la forme

$$\lambda\alpha + b\beta - c\gamma = 0;$$

en exprimant que cette droite est perpendiculaire à BC, on trouve

$$\lambda = b \cos C - c \cos B;$$

son équation est donc

$$\alpha \sin(B - C) + \beta \sin B - \gamma \sin C = 0.$$

On trouvera de même pour les deux autres perpendiculaires

$$\beta \sin(C - A) + \gamma \sin C - \alpha \sin A = 0,$$
$$\gamma \sin(A - B) + \alpha \sin A - \beta \sin B = 0.$$

On vérifie aisément que ces trois droites se coupent au point ayant pour coordonnées $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$.

5° *Équations des perpendiculaires menées à l'un des côtés, par ses extrémités.* — On trouve, par la même méthode, que les perpendiculaires menées par C et B respectivement, au côté BC, ont pour équations

$$\alpha \cos C + \beta = 0 \quad \text{et} \quad \alpha \cos B + \gamma = 0.$$

En remarquant que l'équation

$$\sin B(\alpha \cos C + \beta) + \sin C(\alpha \cos B + \gamma) = 0$$

représente la droite de l'infini, on voit que sa conjuguée par rapport aux perpendiculaires menées aux extrémités de BC, c'est-à-dire la droite équidistante de ces deux dernières, a pour équation

$$\sin B(\alpha \cos C + \beta) - \sin C(\alpha \cos B + \gamma) = 0;$$

c'est bien l'équation trouvée plus haut.

189. Soient x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 les coordonnées homogènes de deux points M_1, M_2; désignons par α_1, β_1, γ_1 et α_2, β_2, γ_2 ce que deviennent les fonctions α, β, γ quand on y remplace x, y, z successivement par x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2. Si l'on pose $x = x_1 + \lambda x_2$, $y = y_1 + \lambda y_2$, $z = z_1 + \lambda z_2$, α, β, γ deviennent $\alpha_1 + \lambda\alpha_2$, $\beta_1 + \lambda\beta_2$, $\gamma_1 + \lambda\gamma_2$ et sont les coordonnées trilinéaires d'un point de M_1M_2. On voit, d'après cela, que tout ce qui a été dit au n° 171, concernant les coordonnées homogènes, s'applique aux coordonnées trilinéaires.

Considérons de même deux droites (u_1, v_1, w_1) et (u_2, v_2, w_2). Le rapport anharmonique du faisceau formé par ces deux droites et par les deux droites

$$(u_1 + \lambda u_2,\ v_1 + \lambda v_2,\ w_1 + \lambda w_2), \quad (u_1 + \mu u_2,\ v_1 + \mu v_2,\ w_1 + \mu w_2)$$

est égal à $\frac{\lambda}{\mu}$. Par suite, le faisceau est harmonique si $\lambda + \mu = 0$. Lorsque les paramètres variables λ, μ sont liés par l'équation

$$(1) \qquad A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0,$$

on dit que les droites λ, μ se correspondent homographiquement; elles sont en involution si $B = C$.

Plus généralement considérons quatre droites quelconques Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 définies par les paramètres (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2), (u_3, v_3, w_3), (u_4, v_4, w_4);

on dit que les droites

$$(u_1 + \lambda u_2,\ v_1 + \lambda v_2,\ w_1 + \lambda w_2) \quad \text{et} \quad (u_3 + \mu u_4,\ v_3 + \mu v_4,\ w_3 + \mu w_4)$$

tracent deux faisceaux homographiques si λ et μ satisfont à l'équation précédente. Supposons que Δ_1 et Δ_2 correspondent à Δ_3 et Δ_4. Dans ce cas l'équation (1) doit être vérifiée quand $\lambda = 0$, $\mu = 0$ et aussi quand λ et μ sont infinis; donc $A = 0$, $D = 0$; elle se réduit donc à $\mu = k\lambda$, k étant une constante. Par suite, la droite μ aura pour coordonnées

$$u_3 + \lambda k u_4, \quad v_3 + \lambda k v_4, \quad w_3 + \lambda k w_4,$$

ou, en posant $u'_4 = k u_4$, $v'_4 = k v_4$, $w'_4 = k w_4$:

$$u_3 + \lambda u'_4, \quad v_3 + \lambda v'_4, \quad w_3 + \lambda w'_4.$$

On peut donc, en multipliant par un facteur convenable les coordonnées de Δ_4, définir l'homographie par les systèmes

$$\begin{aligned} &u_1 + \lambda u_2, \quad v_1 + \lambda v_2, \quad w_1 + \lambda w_2, \\ &u_3 + \lambda u_4, \quad v_3 + \lambda v_4, \quad w_3 + \lambda w_4, \end{aligned}$$

et il devient ainsi évident que le rapport anharmonique de quatre droites du premier faisceau est égal au rapport anharmonique des quatre droites correspondantes du second faisceau.

EXERCICES.

1. Si deux triangles ABC, A′B′C′ sont tels que les perpendiculaires abaissées des sommets A, B, C du premier sur les côtés B′C′, C′A′, A′B′ du second soient concourantes, il en est de même des perpendiculaires abaissées des sommets du second triangle sur les côtés du premier. Montrer que si la même propriété a lieu aussi pour les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur C′A′, A′B′, B′C′, elle aura encore lieu pour les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur A′B′, B′C′, C′A′.

2. On dit que deux points M, M′ sont réciproques quand leurs coordonnées trilinéaires vérifient les relations

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'.$$

Connaissant les coordonnées normales d'un point M, calculer celles du point réciproque M′. Application à l'orthocentre et au centre du cercle circonscrit.

3. Prouver que les symédianes d'un triangle sont concourantes et calculer les coordonnées normales de leur point de concours.

— On nomme symédiane relative à un angle la symétrique de la médiane partant du sommet de cet angle par rapport à la bissectrice du même angle.

4. Trouver un point M tel que

$$\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA} = \theta,$$

θ étant un angle donné et ABC désignant le triangle de référence.

5. En prenant pour axes deux côtés AB, AC du triangle de référence, trouver les coordonnées normales d'un point dont on donne les coordonnées rectilignes.

6. Le point de concours des hauteurs d'un triangle H (orthocentre); le point de concours des médianes G (centre de gravité) et le centre O du cercle circonscrit sont en ligne droite, et, en outre, $GH = 2GO$.

7. Former l'équation de la droite OGH.

8. Former l'équation de la droite joignant les centres du cercle inscrit et du cercle circonscrit.

9. Même problème pour chacun des cercles exinscrits.

CHAPITRE IV.

INVARIANTS.

190. On sait (*Cours d'Algèbre*, t. II, p. 193) que le *discriminant* d'une forme quadratique est un *invariant*. Nous nous proposons d'examiner le cas où la *substitution linéaire* est une transformation de coordonnées.

Considérons d'abord la transformation sans déplacement d'origine. Soient x, y les anciennes coordonnées d'un point M et X, Y ses nouvelles coordonnées. Les paramètres principaux de la demi-droite $\overline{OX}$ étant (α, β) et ceux de $\overline{OY}$: (α', β'), les formules de transformation sont

$$(1) \qquad x = \alpha X + \alpha' Y, \qquad y = \beta X + \beta' Y.$$

En désignant par θ l'angle (Ox, Oy) et par θ' l'angle (OX, OY) et en supposant le plan orienté suivant la convention ordinaire, on a en grandeur et signe

$$\sin\theta' = (\alpha\beta' - \beta\alpha')\sin\theta.$$

Le déterminant $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ est précisément le module μ de la substitution (1). On a donc

$$\mu = \frac{\sin\theta'}{\sin\theta}.$$

On peut vérifier ce résultat : on sait que

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 = X^2 + 2XY\cos\theta' + Y^2;$$

or les discriminants de ces formes sont respectivement $\sin^2\theta$ et $\sin^2\theta'$; par suite, le discriminant étant un invariant, $\sin^2\theta' = \sin^2\theta.\mu^2$.

Cela posé, la forme $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ devient, après la transformation de coordonnées, $A'X^2 + 2B'XY + C'Y^2$, de sorte que

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \equiv A'X^2 + 2B'XY + C'Y^2,$$

et par conséquent

$$A'C' - B'^2 = (AC - B^2)\mu^2;$$

d'où, en remplaçant μ^2 par $\dfrac{\sin^2\theta'}{\sin^2\theta}$,

$$\frac{A'C' - B'^2}{\sin^2\theta'} = \frac{AC - B^2}{\sin^2\theta}.$$

On a donc ce théorème : Quand on effectue sur la forme $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ une transformation de coordonnées sans déplacement d'origine, l'expression

$$\frac{AC - B^2}{\sin^2\theta}$$

reste invariable.

Effectuons maintenant la transformation la plus générale sur la forme quadratique

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2,$$

en posant

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z, \\ y = \beta X + \beta' Y + \beta'' Z, \\ z = \qquad\qquad\qquad\quad Z. \end{cases}$$

Le module de la substitution est encore égal à $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ ou $\dfrac{\sin\theta'}{\sin\theta}$; cette substitution change la forme quadratique donnée en une nouvelle forme, de sorte que

$$Ax^2 + \ldots + Fz^2 \equiv A'X^2 + \ldots + F'Z^2.$$

Si l'on pose

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \Delta, \qquad \begin{vmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix} = \Delta',$$

on a

$$\Delta' = \Delta\mu^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\Delta'}{\sin^2\theta'} = \frac{\Delta}{\sin^2\theta}.$$

D'après cela, si l'on effectue le changement de coordonnées représenté par les formules

$$x = \alpha X + \alpha' Y + \alpha'', \qquad y = \beta X + \beta' Y + \beta'',$$

dans le polynome $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$, l'expression $\frac{\Delta}{\sin^2\theta}$ reste invariable; ce qui signifie que,

$$A'X^2 + 2B'XY + C'Y^2 + 2D'X + 2E'Y + F'$$

désignant le nouveau polynome du second degré obtenu par la substitution précédente, l'expression $\frac{\Delta'}{\sin^2\theta'}$ aura la même valeur que $\frac{\Delta}{\sin^2\theta}$.

191. Considérons deux formes

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \qquad \text{et} \qquad A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2.$$

Si ces formes se transforment en

$$A'X^2 + 2B'XY + C'Y^2 \qquad \text{et} \qquad A'_1X^2 + 2B'_1XY + C'_1Y^2,$$

on en déduit l'identité

$$(A + \lambda A_1)x^2 + \ldots \equiv (A' + \lambda A'_1)X^2 + \ldots;$$

donc

$$(A' + \lambda A'_1)(C' + \lambda C'_1) - (B' + \lambda B'_1)^2 \equiv [(A + \lambda A_1)(C + \lambda C_1) - (B + \lambda B_1)^2]\mu^2,$$

et, par conséquent, cette identité ayant lieu quelle que soit la valeur attribuée à λ, les coefficients de λ doivent être les mêmes dans les deux membres, ce qui donne

$$A'C'_1 + C'A'_1 - 2B'B'_1 = (AC_1 + CA_1 - 2BB_1)\mu^2.$$

Donc, si l'on fait une transformation de coordonnées, on aura

$$\frac{A'C'_1 + C'A'_1 - 2B'B'_1}{\sin^2\theta'} = \frac{AC_1 + CA_1 - 2BB_1}{\sin^2\theta}.$$

En particulier, puisque $x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 \equiv X^2 + 2XY\cos\theta' + Y^2$, on a

$$\frac{A' + C' - 2B'\cos\theta'}{\sin^2\theta'} = \frac{A + C - 2B\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

Il est clair qu'un déplacement de l'origine sans changement de direction des axes n'altère pas les coefficients des termes du plus haut degré d'un polynome; donc en résumé, en posant $AC - B^2 = \delta$, $A + C - 2B\cos\theta = \eta$ quand

on effectue sur le polynome du second degré

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$$

la transformation de coordonnées la plus générale, les trois quantités $\frac{\delta}{\sin^2\theta}$, $\frac{\eta}{\sin^2\theta}$, $\frac{\Delta}{\sin^2\theta}$ restent invariables.

Mais il est essentiel de remarquer que l'on ne doit supprimer ni introduire aucun facteur commun aux coefficients A', B', ..., F' du polynome transformé.

192. *Application.* — Considérons la forme suivante : $(Ax + By)^2$ ou $A^2x^2 + 2ABxy + B^2y^2$. Il résulte de ce qui précède que

$$\frac{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

reste invariable quand on fait une transformation de coordonnées.

Cela étant, soit

$$Ax + By + C = 0$$

l'équation d'une droite Δ; si l'on effectue une transformation de coordonnées, de façon que

$$Ax + By + C \equiv A'X + B'Y + C',$$

on aura aussi

$$\frac{(Ax + By + C)\sin\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}} = \frac{(A'X + B'Y + C')\sin\theta'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\theta'}}.$$

Ainsi l'expression

$$\frac{(Ax + By + C)\sin\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}},$$

dans laquelle x, y sont les coordonnées d'un point quelconque M, n'est pas altérée par la transformation de coordonnées la plus générale; elle représente une longueur, comme on s'en assure aisément. Or, supposons que l'on prenne pour nouvel axe des x la droite Δ elle-même et pour axe des y une perpendiculaire à Δ; nous aurons $A' = C' = 0$, $\theta' = 90°$, et par suite

$$\frac{(Ax + By + C)\sin\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}} = \frac{B'Y}{\sqrt{B'^2}} = \pm Y.$$

On en conclut que la distance d du point (x, y) à la droite Δ a pour expression

$$d = \pm\frac{(Ax + By + C)\sin\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}.$$

C'est la formule démontrée plus haut.

CHAPITRE V.

FAISCEAUX DE DROITES.

---

193. Une équation algébrique de degré supérieur au premier peut représenter un système de droites, comme le montrent les exemples suivants.

1° Une équation à une seule variable $f(x) = 0$ représente des droites parallèles à l'axe des y.

En effet, à toute solution $x = a$ de cette équation correspond une parallèle à l'axe des y.

Si $f(x)$ est un polynome entier en x, de degré m, l'équation précédente se décompose et représente m droites parallèles à l'axe des y; comme cette équation peut avoir des racines imaginaires ou des racines égales, nous dirons que l'équation représente m droites réelles ou imaginaires, distinctes ou confondues.

Par exemple, l'équation $x^3 - a^3 = 0$ se décompose en deux autres, savoir

$$x - a = 0 \qquad \text{et} \qquad x^2 + ax + a^2 = 0;$$

elle représente une droite réelle, $x = a$, et deux droites imaginaires conjuguées. Pareillement, une équation algébrique de la forme $f(y) = 0$ représente des parallèles à l'axe des x.

2° Une équation algébrique homogène à deux variables

$$f(x, y) = 0$$

représente un faisceau de droites passant par l'origine. Supposons, en effet, que $f(x, y)$ soit un polynome homogène de degré m; on sait (*C. A.*, t. II, p. 546) que ce polynome peut être mis sous la forme d'un produit de facteurs homogènes linéaires

$$f(x, y) \equiv (\alpha_1 x + \beta_1 y)(\alpha_2 x + \beta_2 y)\ldots(\alpha_m x + \beta_m y),$$

ce qui prouve que l'équation proposée se décompose en plusieurs autres, homogènes et du premier degré; donc elle représente m droites passant par l'origine, qui d'ailleurs ne sont pas nécessairement distinctes ni toutes réelles.

Le résultat précédent est général; toute équation homogène en x et y, algébrique ou transcendante, ne représente que des droites passant par l'origine.

3° Une équation transcendante peut aussi définir un système de droites. Ainsi l'équation

$$\sin x = 0$$

est équivalente à

$$x = k\pi,$$

k désignant un entier quelconque, positif ou négatif; elle représente donc une infinité de parallèles à l'axe des y.

L'équation

$$\sin x = \sin y$$

représente une double infinité de droites définies par les équations

$$y = x + 2k\pi, \quad y = -x + 2k'\pi + \pi.$$

Ces droites forment un réseau de carrés dont les côtés sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les axes.

Faisceaux du second degré.

194. L'équation

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$$

représente deux droites passant par l'origine. Cherchons dans quel cas ces droites sont réelles.

En supposant d'abord $C \neq 0$, nous remarquerons que, si m et m', sont les racines de l'équation

$$(2) \qquad Ct^2 + 2Bt + A = 0,$$

le premier membre de l'équation proposée se décompose en deux facteurs du premier degré :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \equiv C(y - mx)(y - m'x);$$

par suite, en posant $AC - B^2 = \delta$, il y a trois cas à distinguer :

1° $\delta < 0$. L'équation (1) représente deux droites réelles et distinctes.

2° $\delta > 0$. L'équation (1) représente deux droites imaginaires conjuguées.

3° $\delta = 0$; dans ce cas, $m = m'$, de sorte que

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = C(y - mx)^2;$$

l'équation (1) ne représente, à vrai dire, qu'une seule droite. Mais, si l'on suppose que δ tende vers zéro, les deux droites qu'elle représente, distinctes d'abord, se confondent quand δ devient nul. On dit alors que l'équation (1) représente *deux droites confondues*, ou encore *une droite double*.

Lorsque $C = 0$, l'équation proposée se réduit à $Ax^2 + 2Bxy = 0$; elle se décompose en deux équations du premier degré, et représente deux droites réelles $x = 0$, $Ax + 2By = 0$. Or, dans ce cas, $\delta = -B^2$, c'est-à-dire $\delta < 0$. Ce cas rentre donc dans le premier. Si $C = 0$, $B = 0$, l'équation se réduit à $Ax^2 = 0$; elle représente une droite double, confondue avec l'axe des y; mais δ est alors égal à zéro : c'est conforme au résultat du troisième cas.

On doit d'ailleurs remarquer que, si C tend vers zéro, une racine de l'équation (2) grandit indéfiniment et l'autre tend vers $-\frac{2B}{A}$, et si, en outre, B tend vers zéro, les deux racines grandissent indéfiniment.

195. On obtient ces résultats par un autre procédé qu'il est utile de connaître. Le polynome (1) est décomposable en une somme de carrés, de sorte que l'on peut poser

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \equiv \varepsilon(ax + by)^2 + \varepsilon'(a'x + b'y)^2,$$

ε et ε' désignant des nombres égaux à $+1$ ou -1 ou à zéro, et $ab' - ba$ étant supposé différent de zéro.

La substitution $X = ax + by$, $Y = a'x + b'y$, ayant pour module $\mu = ab' - ba'$, fournit l'identité

$$\varepsilon X^2 + \varepsilon' Y^2 = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

Donc (*C. A.*, t. II, p. 536)

$$\delta = \varepsilon\varepsilon' . \mu^2.$$

Par suite, si $\delta < 0$, on a aussi $\varepsilon\varepsilon' < 0$; la forme est alors la différence de deux carrés, c'est-à-dire un produit de deux facteurs réels du premier degré : l'équation (1) représente deux droites réelles. Si $\delta > 0$, on doit supposer $\varepsilon\varepsilon' > 0$; le polynome (1) est la *somme* de deux carrés, l'équation représente deux droites imaginaires conjuguées. Enfin si $\delta = 0$ l'un des nombres ε, ε' est nul, on a une droite double; on écarte le cas où $A = B = C = 0$ qui correspond à $\varepsilon = \varepsilon' = 0$.

196. *Trouver l'angle des droites représentées par l'équation*

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0.$$

Soit θ l'angle des axes; il s'agit de calculer l'angle V défini par la formule

$$\operatorname{tang} V = \frac{(m' - m)\sin\theta}{1 + mm' + (m + m')\cos\theta}.$$

On a formé plus haut l'équation aux coefficients angulaires; on en déduit

$$mm' = \frac{A}{C}, \qquad m + m' = -\frac{2B}{C},$$

$$m' - m = \pm\sqrt{(m + m')^2 - 4mm'} = \pm\frac{2\sqrt{-\delta}}{C};$$

en substituant dans la formule précédente, on obtient

$$(2) \qquad \operatorname{tang} V = \pm\frac{2\sqrt{-\delta}\sin\theta}{\eta}.$$

Si m ou m' est infini, on vérifie sans peine que cette formule subsiste.

197. *Condition d'orthogonalité.* — Pour que tang V soit infini, il faut et il suffit que $\eta = 0$, c'est-à-dire

$$A + C - 2B\cos\theta = 0.$$

198. *Remarques.* — I. On peut diriger autrement le calcul en posant

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = (bx - ay)(b'x - a'y)$$

et en partant de la formule

$$(3) \qquad \operatorname{tang} V = \frac{(ab' - ba')\sin\theta}{aa' + bb' + (ab' + ba')\cos\theta};$$

on a en effet

$$aa' = C, \qquad bb' = A, \qquad ab' + ba' = -2B,$$
$$ab' - ba' = \pm\sqrt{(ab' + ba')^2 - 4aa'bb'} = \pm 2\sqrt{-\delta}.$$

En particulier, la condition d'orthogonalité des deux droites s'obtient en posant

$$aa' + bb' + (ab' + ba')\cos\theta = 0.$$

II. La théorie des invariants permet de trouver très facilement $\operatorname{tang} V$. Pour plus de précision, supposons les droites réelles et distinctes et prenons-les pour axes, en posant

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 2B'XY.$$

Il suffira d'éliminer B' entre les équations

$$\frac{\delta}{\sin^2\theta} = \frac{-B'^2}{\sin^2 V}, \qquad \frac{\eta}{\sin^2\theta} = \frac{-2B'\cos V}{\sin^2 V}.$$

199. *Déterminer le signe que l'on doit choisir dans la formule* (2) *pour que* V *soit l'angle formé par les demi-droites du faisceau qui sont dirigées du côté des* y *positifs.* — Si l'on suppose que (a, b) soient les paramètres directeurs de la première des deux droites avec laquelle l'axe des x se confondrait s'il tournait autour de l'origine dans le sens positif, la formule (3) donne l'angle dont il s'agit. Or, si nous supposons $b = b' = 1$, on aura évidemment $a - a' > 0$; et par suite

$$a - a' = +\sqrt{(a + a')^2 - 4aa'}.$$

D'autre part,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A(x - ay)(x - a'y),$$

et par conséquent

$$a + a' = -\frac{2B}{A}, \qquad aa' = \frac{C}{A}, \qquad a - a' = +2\frac{\sqrt{-\delta}}{\sqrt{A^2}};$$

il faut donc poser

$$a - a' = \varepsilon\frac{2\sqrt{-\delta}}{A},$$

ce qui donne

$$\operatorname{tang} V = \varepsilon\frac{2\sqrt{-\delta}\sin\theta}{\eta},$$

ε étant égal à $+1$ quand A et positif et à -1 quand A est négatif.

200. *Exprimer que les deux faisceaux représentés par*

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0, \qquad A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 = 0$$

sont conjugués harmoniques.

1° Nous supposons que les droites du premier faisceau dont les coefficients angulaires sont m_1, m_2, soient conjuguées par rapport aux deux droites du second faisceau, ayant pour coefficients angulaires m_3, m_4. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est

$$(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) = 2(m_1 m_2 + m_3 m_4),$$

c'est-à-dire

$$\frac{-2B}{C} \times \frac{-2B'}{C'} = 2\left(\frac{A}{C} + \frac{A'}{C'}\right)$$

ou, sous forme entière,

$$AC' + CA' - 2BB' = 0.$$

2° La condition est toute différente si l'on suppose que les rayons conjugués appartiennent à des faisceaux différents. Il s'agit alors d'exprimer, au moyen des coefficients des équations données, la condition suivante :

$$(m_1 + m_3)(m_2 + m_4) = 2(m_1 m_3 + m_2 m_4),$$

ou, en développant,

$$m_1 m_2 + m_3 m_4 = m_1(2m_3 - m_4) + m_2(2m_4 - m_3).$$

Le premier membre est connu; pour calculer le second, posons

$$u = m_1(2m_3 - m_4) + m_2(2m_4 - m_3)$$

et considérons l'expression obtenue en permutant m_1 et m_2, savoir

$$v = m_2(2m_3 - m_4) + m_1(2m_4 - m_3),$$

ce qui donne

$$u + v = (m_1 + m_2)(m_3 + m_4) = \frac{4BB'}{CC'}$$

$$u - v = 3(m_1 - m_2)(m_3 - m_4) = \pm \frac{12\sqrt{\delta\delta'}}{CC'}$$

et, par suite,

$$u = \frac{2BB' \pm 6\sqrt{\delta\delta'}}{CC'}.$$

La condition cherchée est donc

$$AC' + CA' - 2BB' = \pm 6\sqrt{\delta\delta'}$$

ou

$$H^2 - 36.\delta\delta' = 0$$

en désignant par H l'invariant harmonique $AC' + CA' - 2BB'$.

On arrive aux résultats précédents par la théorie des invariants.

Dans le premier cas, posons

$$\begin{aligned} A\,x^2 + 2B\,xy + C\,y^2 &= XY,\\ A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 &= uX^2 + 2vXY + wY^2. \end{aligned}$$

Deux droites conjuguées harmoniques par rapport aux droites = $Y = 0$ ont des équations de la forme $aX + bY = 0$, $a'X + b'Y = 0$ avec la condition $\frac{b}{a} + \frac{b'}{a'} = 0$ ou $ab' + ba' = 0$. Mais, si l'on suppose

$$uX^2 + 2vXY + wY^2 = (aX + bY)(a'X + b'Y),$$

on voit que

$$ab' + ba' = 2v;$$

il s'agit donc d'exprimer que $v = 0$. Or

$$AC' + CA' - 2BB' = -2v\,\mu^2;$$

donc la condition demandée est $H = 0$.

En second lieu, si les rayons conjugués n'appartiennent pas à un même faisceau, nous poserons

$$\begin{aligned} A\,x^2 + 2B\,xy + C\,y^2 &= uX^2 + 2v\,XY\\ A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 &= \qquad\quad 2v'XY + w'Y^2 \end{aligned}$$

et nous exprimerons que $uX + 2vY = 0$, $2v'X + w'Y = 0$ représentent deux droites conjuguées harmoniques par rapport aux droites $X = 0$, $Y = 0$. La condition est $uw' + 4vv' = 0$.

Or, μ étant le module de la substitution qui permet de passer des variables X, Y aux variables x, y, on a

(1) $$\delta = -v^2\mu^2,$$

(2) $$\delta' = -v'^2\mu^2,$$

$$H = (uw' - 2vv')\mu^2;$$

ou, en tenant compte de la relation trouvée plus haut,

(3) $$H = -6vv'\mu^2.$$

Il reste à éliminer $v\mu$ et $v'\mu$ entre les équations (1), (2), (3), ce qui se fait

sans difficulté et l'on trouve la relation $H^2 = 36.\delta\delta'$. Il convient de remarquer que ces *résultats* subsistent *avec des coordonnées trilinéaires.*

Remarque. — La condition d'orthogonalité $\eta = 0$ exprime que les côtés d'un angle droit forment un faisceau harmonique avec les droites isotropes menées par son sommet, ce que nous savions déjà.

201. *Trouver l'équation des bissectrices du faisceau*

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0.$$

Pour que

$$A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 = 0$$

représente les bissectrices du faisceau, il faut et il suffit (comme on le démontre sans difficulté en s'appuyant sur le n° 146) que ces droites soient rectangulaires et conjuguées harmoniques par rapport aux droites du faisceau donné, c'est-à-dire que A', B', C' vérifient les deux équations

$$A' + C' - 2B'\cos\theta = 0, \qquad AC' + CA' - 2BB' = 0.$$

Si l'on suppose que l'un des mineurs $A - C$, $B - A\cos\theta$, $B - C\cos\theta$ soit différent de zéro, ces équations déterminent les rapports des inconnues A', 2B', C'; on aura l'équation cherchée en éliminant A', 2B', C' entre les équations précédentes, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ 1 & -\cos\theta & 1 \\ C & -B & A \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$x^2(A\cos\theta - B) + xy(A - C) + y^2(B - C\cos\theta) = 0.$$

Cette équation représente deux droites réelles quand les coefficients A, B, C sont réels, même si le faisceau donné est composé de droites imaginaires conjuguées, comme le montre l'identité

$$\begin{aligned}(A - C)^2 - 4(A\cos\theta - B)(B - C\cos\theta)\\ = [2B - (A + C)\cos\theta]^2 + (A - C)^2\sin^2\theta;\end{aligned}$$

car le second membre est toujours positif, si l'on écarte l'hypothèse

$A = C$, $B = A\cos\theta$, pour laquelle le faisceau est isotrope; alors les bissectrices sont indéterminées.

202. *Remarque.* — D'une manière générale, si les coefficients de l'équation

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$$

sont réels et si

$$(2) \qquad A + C - 2B\cos\theta = 0,$$

cette équation représente deux droites réelles. En effet, en tenant compte de la relation (2), on trouve

$$B^2 - AC = \frac{(A+C)^2\sin^2\theta + (A-C)^2\cos^2\theta}{4\cos^2\theta}.$$

Conditions pour que l'équation du second degré $f(x, y) = 0$ représente deux droites.

203. Si l'équation du second degré $f(x, y) = 0$ représente deux droites, on a identiquement

$$f(x, y) \equiv (ux + vy + w)(u'x + v'y + w'),$$

et, par suite, en posant

$$f(x, y, z) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2,$$

on aura

$$f(x, y, z) \equiv (ux + vy + wz)(u'x + v'y + w'z),$$

d'où il résulte que la forme quadratique $f(x, y, z)$ sera la somme de deux carrés *au plus* et, par conséquent, son discriminant Δ sera nul. Nous obtenons ainsi une condition nécessaire $\Delta = 0$. Réciproquement, si cette condition est remplie, $f(x, y, z)$ est la somme de deux carrés distincts ou un carré; dans les deux cas $f(x, y, z)$ est le produit de deux facteurs linéaires distincts ou non et, par suite, l'équation $f(x, y, z) = 0$ représente deux droites, distinctes ou confondues.

Discussion. — Les coefficients de $f(x, y, z)$ étant supposés tous

réels, soit δ le discriminant de la fonction $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ ou $\varphi(x, y)$. Nous distinguerons plusieurs cas :

1° $\delta \neq 0$. On sait alors que, le discriminant Δ étant nul et le mineur symétrique δ étant différent de zéro, $f(x, y, z)$ est la somme de deux carrés distincts; si l'on pose

$$(1) \qquad f(x, y, z) \equiv \varepsilon(lx + my + nz)^2 + \varepsilon'(l'x + m'y + n'z)^2,$$

on a

$$(2) \qquad \varphi(x, y) \equiv \varepsilon(lx + my)^2 + \varepsilon'(l'x + m'y)^2.$$

Le discriminant de $\varphi(x, y)$ étant différent de zéro, cette forme est la somme de deux carrés distincts; donc $lm' - ml' \neq 0$; les droites représentées par les équations

$$lx + my + nz = 0, \qquad l'x + m'y + n'z = 0$$

sont concourantes; il en est donc de même des droites représentées par l'équation $f(x, y, z) = 0$, puisque leurs équations peuvent s'écrire

$$lx + my + nz = \pm\sqrt{-\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}}(l'x + m'y + n'z);$$

on voit, en outre, que ces droites sont réelles ou imaginaires, suivant que ε et ε' ont des signes contraires ou le même signe, c'est-à-dire suivant que δ est négatif ou positif; donc, si l'on suppose $\Delta = 0$, $\delta < 0$, l'équation $f(x, y, z) = 0$ représente deux droites réelles et concourantes.

Si, au contraire, on a $\Delta = 0$, $\delta > 0$, l'équation considérée représente deux droites concourantes, imaginaires conjuguées.

2° $\delta = 0$. Ce cas se subdivise en deux autres; supposons que l'un des mineurs symétriques $AF - D^2$ ou $CF - E^2$ soit différent de zéro, et soit, par exemple, $AF - D^2 \neq 0$: la forme $f(x, y, z)$ est encore la somme de deux carrés distincts et l'identité (1) subsiste.

L'identité (2) montre que $lm' - ml' = 0$, puisque $\varphi(x, y)$ est un carré parfait; donc $lx + my + nz = 0$, $l'x + m'y + n'z = 0$ représentent deux droites parallèles; d'ailleurs ces droites sont distinctes, car on déduit de l'identité (1), en y faisant $y = 0$,

$$(3) \qquad Ax^2 + 2Dxz + Fz^2 \equiv \varepsilon(lx + nz)^2 + \varepsilon'(l'x + n'z)^2,$$

et comme le discriminant $AF - D^2$ du premier membre est différent

de zéro, $ln' - nl'$ est aussi différent de zéro; en outre, l'identité (3) montre que ε et ε' ont le même signe ou des signes différents suivant que l'on suppose $AF - D^2$ positif ou négatif; donc, si l'on suppose $\Delta = 0$, $\delta = 0$, $AF - D^2 < 0$, l'équation $f(x, y, z) = 0$ représente deux droites parallèles et réelles. Si, au contraire, on suppose $\Delta = 0$, $\delta = 0$, $AF - D^2 > 0$, elle représente deux droites parallèles imaginaires; mais la direction de ces droites est toujours réelle, car elle est donnée par l'équation $lx + my = 0$ dont les coefficients sont réels.

Enfin, si $\Delta = 0$ et si les mineurs $AC - B^2$, $AF - D^2$, $CF - E^2$ sont nuls tous les trois, l'identité (1) est remplacée par celle-ci

$$f(x, y, z) \equiv \varepsilon(lx + my + nz)^2,$$

et l'équation $f(x, y, z) = 0$ représente alors deux droites confondues.

On peut donc dresser le Tableau suivant :

$\Delta = 0$	$\delta < 0$		deux droites concourantes réelles.
	$\delta > 0$		deux droites concourantes imaginaires.
	$\delta = 0$	$AF - D^2 < 0$ (ou $CF - E^2 < 0$)	deux droites parallèles réelles.
		$AF - D^2 > 0$ (ou $CF - E^2 > 0$)	deux droites parallèles imaginaires.
		$AF - D^2 = 0$, $CF - E^2 = 0$	deux droites confondues (à distance finie si A ou C est différent de o).

204. Lorsque l'on suppose $\delta \neq 0$, on peut trouver les coordonnées du point de concours des deux droites. En effet, les équations $f'_x = 0, f'_y = 0$ représentent alors deux droites concourantes; soient x_0, y_0 les coordonnées de leur point de rencontre et posons $x = x_0 + X$, $y = y_0 + Y$; nous obtiendrons ainsi

$$f(x, y) \equiv f(x_0, y_0) + X f'_{x_0} + Y f'_{y_0} + \varphi(X, Y);$$

mais $f'_{x_0} = 0$, $f'_{y_0} = 0$; d'autre part, f_1, f_2, f_3 désignant les demi-dérivées de f, si dans l'identité d'Euler

$$f(x, y, z) \equiv x f_1 + y f_2 + z f_3$$

on pose $x = x_0$, $y = y_0$, $z = 1$, on obtient

$$f(x_0 y_0) \equiv D x_0 + E y_0 + F = 0,$$

car, en vertu des hypothèses $\Delta = 0$, $\delta \neq 0$, l'équation $f'_z = 0$ est une conséquence des équations $f'_x = 0$, $f'_y = 0$; donc, en définitive, l'équation $f(x, y) = 0$ se réduit à $\varphi(X, Y) = 0$ ou

$$A(x - x_0)^2 + 2B(x - x_0)(y - y_0) + C(y - y_0)^2 = 0;$$

le point de concours des deux droites a donc pour coordonnées précisément x_0 et y_0.

Lorsque $\Delta = 0$, $\delta = 0$, si l'un au moins des coefficients A ou C est différent de zéro, les droites représentées par l'équation $f(x, y) = 0$ sont à distance finie; en supposant par exemple $A \neq 0$, les abscisses des points de rencontre avec l'axe des x sont les racines de l'équation $Ax^2 + 2Dx + F = 0$, ce qui explique l'intervention du mineur $AF - D^2$ dans la discussion. Remarquons encore que, si $f(x, y, z)$ est un carré parfait, les dérivés f'_x, f'_y, f'_z sont proportionnelles et, par suite, la droite double est représentée par l'une ou l'autre des équations $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f'_z = 0$; il est bon de remarquer que l'une de ces dérivées ou deux d'entre elles peuvent être identiquement nulles. Enfin, si l'on suppose $A = 0$, $C = 0$, $B = 0$, l'équation proposée se réduit à $z(2Dx + 2Ey + Fz) = 0$; elle représente deux droites dont l'une est à l'infini; et si en outre $D = 0$, $E = 0$, l'équation se réduit à $Fz^2 = 0$ et représente deux droites rejetées à l'infini.

205. *Nombre des conditions nécessaires pour que l'équation de degré m représente m droites.*

1° *Les m droites sont concourantes.* — Soient x_0, y_0 les coordonnées du point de concours; si l'on pose $x = x_0 + X$, $y = y_0 + Y$, l'équation

$$f(x_0 + X, y_0 + Y) = 0$$

devra être homogène en X et Y; en annulant les coefficients des termes de degré inférieur à m, on trouvera $\frac{m(m+1)}{2}$ conditions. Si x_0, y_0 ne sont pas données, deux de ces équations les détermineront et il ne restera plus que $\frac{m^2 + m - 4}{2}$ conditions.

2° *Les m droites sont parallèles.* — Si la direction est donnée, on prend l'axe des y parallèle à cette direction et dans l'équation transformée on annule tous les termes qui contiennent y; ce qui donne encore $\frac{m(m+1)}{2}$ conditions. Si la direction des droites n'est pas donnée, il faudra éliminer le paramètre qui détermine la direction du nouvel axe des y et il restera $\frac{m^2 + m - 2}{2}$ conditions.

3° *Les m droites sont quelconques.* — Dans ce cas, en supposant qu'aucune d'elles ne passe par l'origine, il faudra identifier l'équation $f(x, y) = 0$ avec

la suivante

$$(u_1x+v_1y+1)(u_2x+v_2y+1)\ldots(u_mx+v_my+1)=0,$$

ce qui donne $\frac{m(m+3)}{2}$ conditions entre lesquelles on devra éliminer les $2m$ inconnues $u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m$; le nombre des conditions cherchées est donc égal à $\frac{m(m+3)}{2}-2m$ ou $\frac{m(m-1)}{2}$.

EXERCICES.

1. Déterminer h de façon que l'équation

$$x^2+ay^2+(a+1)xy+(1-a)y+h=0$$

représente deux droites.

2. Étant donnée l'équation d'un faisceau de n droites issues d'un point A, former l'équation du faisceau des perpendiculaires à ces droites menées par un point donné.

3. Étant donnée l'équation d'un faisceau de droites issues d'un point donné A, former l'équation du faisceau obtenu en faisant tourner chacune de ces droites, et dans le même sens, d'un angle donné α, autour du point A.

4. Former l'équation d'un faisceau régulier de n droites issues de l'origine des coordonnées.

5. Trouver l'angle de deux droites, connaissant l'équation du faisceau formé par ces deux droites, en coordonnées trilinéaires.

6. Trouver la condition pour que l'équation

$$a_0x^4+4a_1x^3y+6a_2x^2y^2+4a_3xy^3+a_4y^4=0$$

représente un faisceau harmonique.

Montrer que cette condition est la suivante :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}=0.$$

Vérifier si cette condition est suffisante.

7. Trouver la condition pour que deux des droites représentées par l'équation du quatrième degré précédente soient rectangulaires, ou fassent entre elles un angle de 45°.

8. Trouver la somme V des angles que font avec l'axe des x les droites du faisceau $f(x,y)=0$, les axes étant rectangulaires.

— En posant $f(i, 1) = P + Qi$, on a $\operatorname{tang} V = -\frac{Q}{P}$.

9. Résoudre le même problème en supposant le faisceau défini par l'équation tangentielle $f(u, v) = 0$, les valeurs de $-\frac{u}{v}$, racines de l'équation étant les coefficients angulaires des droites du faisceau.

— En posant $f(1, i) = P' + Q'i$, on a $\operatorname{tang} V = \frac{Q'}{P'}$.

CHAPITRE VI.

CERCLE.

206. L'équation du cercle de rayon R dont le centre a pour coordonnées x_0, y_0 est

$$(1) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + 2(x - x_0)(y - y_0)\cos\theta - R^2 = 0,$$

θ désignant l'angle des axes coordonnés. Nous allons examiner quelques cas particuliers.

1° Les axes de coordonnées sont rectangulaires; l'équation du cercle est alors

$$(2) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0.$$

2° Les axes sont deux diamètres rectangulaires du cercle donné; dans ce cas l'équation est réduite à la forme la plus simple

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

3° Le cercle donné est tangent à l'un des axes, par exemple à l'axe des y; en outre, les axes sont rectangulaires. Dans ce cas, $R^2 = x_0^2$ et, par suite, l'équation (2) se simplifie et devient

$$x^2 + (y - y_0)^2 - 2xx_0 = 0$$

et, en outre,

$$R = |x_0|.$$

4° Si, de plus, le cercle passe par l'origine, $y_0 = 0$ et l'équation se réduit à

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 = 0.$$

5° De même, un cercle tangent à l'axe des x a pour équation, les axes étant toujours supposés rectangulaires,

$$(x - x_0)^2 + y^2 - 2yy_0 = 0; \qquad R = |y_0|.$$

6° L'équation d'un cercle passant par l'origine et tangent à l'axe des x est, les axes étant rectangulaires,

$$x^2 + y^2 - 2yy_0 = 0.$$

7° Équation du cercle tangent aux deux axes, supposés rectangulaires. On a alors

$$x_0 = \varepsilon R, \qquad y_0 = \varepsilon' R \qquad (\varepsilon = \pm 1,\ \varepsilon' = \pm 1);$$

l'équation cherchée est donc

$$x^2 + y^2 - 2\varepsilon R x - 2\varepsilon' R y + R^2 = 0.$$

207. *Conditions pour que l'équation du second degré* $f(x, y) = 0$ *représente un cercle.*

Étant donnée l'équation

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

rapportée à deux axes d'angle θ, il s'agit de trouver quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on puisse déterminer x_0, y_0, R, de manière que l'équation

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + 2(x - x_0)(y - y_0)\cos\theta - R^2 = 0$$

ou, en développant,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - 2x(x_0 + y_0\cos\theta) \\ & \quad - 2y(x_0\cos\theta + y_0) + x_0^2 + 2x_0y_0\cos\theta + y_0^2 - R^2 = 0 \end{aligned} \right.$$

soit identique à l'équation (1). Les coefficients de l'équation (1) devant être proportionnels aux coefficients des termes respectivement

semblables de l'équation (2), on voit d'abord que A doit être différent de zéro; cette condition étant supposée remplie, en multipliant par A tous les coefficients du polynome (2), on doit obtenir identiquement le polynome (1); donc on doit poser

$$A \cos\theta = B, \tag{3}$$

$$A = C, \tag{4}$$

$$A(x_0 + y_0 \cos\theta) = -D, \tag{5}$$

$$A(x_0 \cos\theta + y_0) = -E, \tag{6}$$

$$A(x_0^2 + 2x_0 y_0 \cos\theta + y_0^2 - R^2) = F. \tag{7}$$

Les deux équations (3) et (4) ne contenant pas les inconnues x_0, y_0, R^2 expriment *des conditions nécessaires;* examinons si ces conditions sont suffisantes. Le déterminant du système formé par les équations (5) et (6) étant égal à $A^2 \sin^2\theta$ est différent de zéro, puisque l'on suppose $A \neq 0$; on peut donc déterminer x_0 et y_0 par les formules

$$x_0 = \frac{E\cos\theta - D}{A^2 \sin^2\theta}, \qquad y_0 = \frac{D\cos\theta - E}{A^2\sin^2\theta}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (7), on obtiendra pour R^2 une valeur réelle finie et bien déterminée; mais il faut en outre que cette valeur soit positive. Écrivons les équations (5), (6), (7), en tenant compte des relations (3) et (4), de la manière suivante :

$$Ax_0 + By_0 + D = 0, \tag{8}$$

$$Bx_0 + Cy_0 + E = 0, \tag{9}$$

$$Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 - F - AR^2 = 0. \tag{10}$$

On peut remplacer la dernière équation par celle qu'on obtient en ajoutant ces trois équations membre à membre, après avoir multiplié les deux membres respectivement par x_0, y_0 et -1, ce qui donne

$$Dx_0 + Ey_0 + F + AR^2 = 0. \tag{11}$$

On devrait, pour obtenir R^2, remplacer, dans l'équation (11), x_0 et y_0 par leurs valeurs tirées des équations (8) et (9). Cette opération revient à l'élimination de x_0, y_0 entre les équations (8), (9), (11), et comme ces équations sont linéaires par rapport à x_0, y_0, on

a, pour déterminer R^2,

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F + AR^2 \end{vmatrix} = 0;$$

d'où l'on tire, en remplaçant $AC - B^2$ par $A^2 \sin^2\theta$,

$$R^2 = \frac{-\Delta}{A^3 \sin^2\theta}.$$

Donc enfin, si l'on suppose

$$(12) \qquad A \neq 0, \qquad A = C = \frac{B}{\cos\theta}, \qquad A\Delta < 0,$$

les équations (3), (4), (5), (6), (7) peuvent être vérifiées et, par suite, l'équation (1) représentera un cercle. Les conditions précédentes (12) sont donc *nécessaires* et *suffisantes* pour que l'équation (1) représente un cercle réel.

Si l'on suppose $A \neq 0$, $A = C = \frac{B}{\cos\theta}$, $A\Delta > 0$, l'équation (1) ne représente plus un cercle; mais on peut la ramener à la forme

$$(x - x_0)^2 + 2(x - x_0)(y - y_0)\cos\theta + (y - y_0)^2 + R^2 = 0,$$

où x_0, y_0, R sont des quantités réelles; on dit alors que l'équation précédente représente un *cercle imaginaire*, dont le centre est réel et le rayon imaginaire de la forme Ri, sans partie réelle. Enfin, si l'on suppose $A \neq 0$, $A = C = \frac{B}{\cos\theta}$, $\Delta = 0$, l'équation (1) se ramène à la forme

$$(x - x_0)^2 + 2(x - x_0)(y - y_0)\cos\theta + (y - y_0)^2 = 0;$$

on dit alors qu'elle représente un cercle de rayon nul. Il faut remarquer aussi qu'elle représente les deux droites isotropes menées par le point (x_0, y_0) qui est le centre du cercle de rayon nul. En résumé, pour que l'équation (1) représente un cercle, réel ou imaginaire, il faut et il suffit que

$$A = C = \frac{B}{\cos\theta}, \qquad A \neq 0.$$

208. *Remarque.* — Si l'équation (1) représente deux droites,

c'est-à-dire si $\Delta = 0$, on exprimera que les deux droites sont isotropes en écrivant, en outre, que cette équation représente un cercle.

209. *Détermination du centre.* — Le centre est le point commun aux deux droites ayant pour équations

$$Ax + By + D = 0, \qquad Bx + Cy + E = 0.$$

Les premiers membres sont les demi-dérivées de $f(x, y)$ par rapport à x et y (nous verrons plus loin que ce résultat s'applique à une courbe du second degré quelconque). En écrivant les équations précédentes sous la forme

$$x + y\cos\theta + \frac{D}{A} = 0, \qquad x\cos\theta + y + \frac{E}{A} = 0,$$

on reconnaît que la première représente la perpendiculaire menée à l'axe des x par le point ayant pour coordonnées $\left(-\frac{D}{A}, 0\right)$ et que la seconde représente la perpendiculaire à l'axe des y menée par le point $\left(0, -\frac{E}{A}\right)$; on connaît ainsi les projections orthogonales du centre sur les deux axes. On peut encore remarquer que

$$R^2 = d^2 - \frac{F}{A},$$

d étant la distance du centre à l'origine et, par suite, quand les coefficients A et F ont des signes contraires, le rayon du cercle est réel.

210. *Cas particulier : axes rectangulaires.* — Quand les axes coordonnés sont rectangulaires, les conditions (12) se simplifient et deviennent

$$A \neq 0, \qquad A = C, \qquad B = 0;$$

en outre,

$$R^2 = -\frac{\Delta}{A^3}.$$

211. Il résulte de ce qui précède que l'équation générale du cercle, réel ou imaginaire, est

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

si les axes sont obliques et que $(Ox, Oy) = \theta$; et si les axes sont

rectangulaires

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Dans ce dernier cas, l'équation précédente peut s'écrire

$$(x + D)^2 + (y + E)^2 = D^2 + E^2 - F;$$

par suite, les coordonnées du centre sont : $-D$, $-E$; en outre : $R^2 = D^2 + E^2 - F$.

212. En résumé, pour que l'équation du second degré $f(x, y) = 0$ représente un cercle, il faut et il suffit que l'ensemble des termes du second degré soit identique, à un facteur près, au polynome isotrope $x^2 + 2xy\cos\theta + y^2$. Nous poserons

$$\psi(x, y) \equiv x^2 + 2xy\cos\theta + y^2,$$

et l'équation d'un cercle pourra se mettre sous la forme *canonique* suivante

$$\psi(x, y) + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

D, E, F étant trois *paramètres arbitraires;* ou encore, x_0, y_0 étant les coordonnées du centre et R le rayon,

$$\psi(x - x_0, y - y_0) - R^2 = 0.$$

213. *Nombre de conditions nécessaires pour déterminer un cercle.* — L'équation du cercle contient, comme nous venons de le voir, trois coefficients indéterminés D, E, F; il faut donc donner trois conditions pour déterminer un cercle. Si ces conditions se traduisent par des équations du premier degré, il y aura un seul cercle répondant à la question, ou bien il y en aura une infinité, à moins que le problème ne soit impossible.

On exprimera que le cercle passe par un point donné (x', y') en écrivant que l'équation du cercle est vérifiée pour $x = x'$, $y = y'$; on obtient ainsi une équation du premier degré en D, E, F. Il en résulte que trois points déterminent, en général, un cercle; nous allons discuter ce problème.

214. *Équation du cercle passant par trois points donnés.* — Exprimons que l'équation

$$\psi(x, y) + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1}$$

est vérifiée par les coordonnées (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) des trois points donnés; nous obtiendrons ainsi, pour déterminer D, E, F, les trois équations linéaires

$$\psi_1 + 2Dx_1 + 2Ey_1 + F = 0, \tag{2}$$

$$\psi_2 + 2Dx_2 + 2Ey_2 + F = 0, \tag{3}$$

$$\psi_3 + 2Dx_3 + 2Ey_3 + F = 0, \tag{4}$$

où l'on a écrit ψ_1 au lieu de $\psi(x_1, y_1)$, etc. Si les trois points donnés ne sont pas en ligne droite, le déterminant du système précédent est différent de zéro; s'il en est ainsi, on aura l'équation du cercle cherché en portant dans l'équation (1) les valeurs de D, E, F tirées des équations (2), (3), (4), ce qui revient à éliminer 2D, 2E, F entre les équations (1), (2), (3), (4); par conséquent l'équation du cercle passant par les trois points donnés est

$$\begin{vmatrix} \psi & x & y & 1 \\ \psi_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \psi_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ \psi_3 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Ce résultat est d'ailleurs évident *a priori*.

215. *Condition pour que quatre points donnés soient sur un cercle.* — Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) les coordonnées de quatre points A, B, C, D; on écrira que ces quatre points sont sur un cercle en écrivant que les coordonnées de l'un d'eux vérifient l'équation du cercle passant par les trois autres, ce qui donne la condition

$$\begin{vmatrix} \psi_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \psi_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ \psi_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ \psi_4 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

On doit d'ailleurs supposer que l'un au moins des mineurs relatifs à la première colonne soit différent de zéro, et alors, si l'équation (6) est vérifiée, il en sera de même des autres mineurs relatifs à la même colonne, pourvu que les quatre points soient distincts, ainsi qu'on s'en assure aisément.

La relation (6) développée suivant les éléments de la première colonne

peut s'écrire

$$\overline{OA}^2(BCD) - \overline{OB}^2(CDA) + \overline{OC}^2(DAB) - \overline{OD}^2(ABC) = 0,$$

en désignant par (BCD), (CDA), (DAB), (ABC) les aires des triangles BCD, CDA, DAB, ABC, ces aires étant affectées de signes convenables, la lettre O désignant l'origine des coordonnées. En posant $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = u$, $BD = v$; $(BCD) = S_1$, $(CDA) = S_2$, ... et en plaçant l'origine successivement aux points A, B, C, D, on obtient les équations

$$\begin{aligned}
&\quad\;\; - a^2 S_2 + u^2 S_3 - d^2 S_4 = 0,\\
a^2 S_1 &\qquad\qquad + b^2 S_3 - v^2 S_4 = 0,\\
u^2 S_1 &- b^2 S_2 \qquad\qquad - c^2 S_4 = 0,\\
d^2 S_1 &- v^2 S_2 + c^2 S_3 \qquad\qquad = 0,
\end{aligned}$$

et par suite, en éliminant S_1, S_2, S_3, S_4, on obtient

$$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & u^2 & d^2 \\ a^2 & 0 & b^2 & v^2 \\ u^2 & b^2 & 0 & c^2 \\ d^2 & v^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$(ac - bd + uv)(ac - bd - uv)(ac + bd + uv)(ac + bd - uv) = 0.$$

216. *Cas particulier.* — Supposons que l'on prenne pour axes deux des côtés du triangle ABC; si l'on pose $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, l'équation du cercle circonscrit au triangle OAB sera

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - ax - by = 0,$$

θ étant l'angle AOB, l'axe des x étant la droite OA. Supposons que b tende vers zéro, le point B venant se confondre avec l'origine; l'équation

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - ax = 0$$

représente le cercle passant par les points O et A et tangent à l'axe des y. On a $\Delta = -\dfrac{a^2}{4}$ et par suite $R = \dfrac{|a|}{2\sin\theta}$, ce qui est d'ailleurs évident.

217. *Autre forme de l'équation du cercle circonscrit à un triangle.* — Rapportons le cercle à deux diamètres rectangulaires; son équation sera, en coordonnées homogènes,

$$x^2 + y^2 - R^2 z^2 = 0.$$

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées des sommets du triangle

donné; nous ferons la substitution

$$x = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3, \qquad y = \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3, \qquad z = \alpha + \beta + \gamma,$$

car nous pouvons poser $z_1 = z_2 = z_3 = 1$. Il est visible que α, β, γ sont les coordonnées barycentriques du point (x, y), le triangle ABC étant pris pour triangle de référence. L'équation du cercle devient ainsi

$$(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3)^2 + (\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3)^2 - R^2(\alpha + \beta + \gamma)^2 = 0.$$

Comme ce cercle passe par le point (x_1, y_1), le coefficient de α^2 est nul et de même ceux de β^2 et de γ^2 sont nuls. Calculons le coefficient de $\alpha\beta$, savoir

$$2x_1 x_2 + 2y_1 y_2 - 2R^2.$$

L'identité

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \equiv x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_1 x_2 - 2y_1 y_2$$
$$= 2R^2 - 2x_1 x_2 - 2y_1 y_2$$

montre que $2x_1 x_2 + 2y_1 y_2 - 2R^2 = c^2$, c désignant la longueur du côté AB. En appelant a, b les longueurs des deux autres côtés, on obtient ainsi

$$x^2 + y^2 - R^2 \equiv -(c^2\alpha\beta + a^2\beta\gamma + b^2\gamma\alpha).$$

L'équation demandée est donc, en coordonnées barycentriques,

$$a^2\beta\gamma + b^2\gamma\alpha + c^2\alpha\beta = 0,$$

et, par conséquent, en coordonnées normales,

$$a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta = 0 \qquad \text{ou} \qquad \beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C = 0.$$

On obtient directement cette équation en remarquant que, si l'on nomme D, E, F les pieds des perpendiculaires abaissées sur les côtés du triangle ABC d'un point quelconque du cercle circonscrit, le triangle DEF est nul, puisque les trois points D, E, F sont en ligne droite.

Le module de la substitution précédente est égal au double $2S$ de la surface du triangle ABC; le discriminant de $x^2 + y^2 - R^2 z^2$ est égal à $-R^2$ et celui de $-c^2\alpha\beta - a^2\beta\gamma - b^2\gamma\alpha$ est égal à $-\frac{1}{4}a^2 b^2 c^2$; donc

$$\frac{1}{4}a^2 b^2 c^2 = R^2 . 4S^2,$$

ce qui donne la formule bien connue $abc = 4RS$.

Intersection d'une droite et d'un cercle.

218. Soient

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0, \tag{1}$$

$$ux + vy + w = 0 \tag{2}$$

les équations du cercle et de la droite. Les coordonnées des points communs sont les solutions du système précédent. Supposons, par exemple, $v \neq 0$; nous aurons l'équation *aux abscisses* des points d'intersection, en éliminant y entre les équations (1) et (2). On trouve ainsi

$$(3) \qquad (u^2+v^2)x^2+2uwx+w^2-v^2R^2=0.$$

La condition de réalité est

$$(4) \qquad (u^2+v^2)R^2-w^2>0.$$

A chaque racine réelle de l'équation (3) correspond une valeur réelle de y fournie par l'équation (2); par conséquent, la droite coupera le cercle en deux points réels et distincts si l'inégalité (4) est vérifiée. Cette condition exprime que la distance du centre du cercle à la droite donnée doit être moindre que son rayon.

Pour que les deux points d'intersection soient confondus en un seul, c'est-à-dire pour que la droite soit tangente au cercle, il faut et il suffit que

$$(5) \qquad (u^2+v^2)R^2-w^2=0.$$

Cette équation est ce que l'on nomme l'*équation tangentielle* du cercle représenté par l'équation (1) en *coordonnées ponctuelles*.

Il résulte de là qu'il y a deux tangentes au cercle (1), parallèles à la direction définie par l'équation $ux+vy=0$. Ces tangentes sont représentées par l'équation

$$ux+vy+\varepsilon R\sqrt{u^2+v^2}=0;$$

en remplaçant successivement ε par ± 1, on aura les équations des deux tangentes parallèles à la direction donnée.

Les coordonnées du point de contact de chaque tangente sont

$$x=-\varepsilon\frac{Ru}{\sqrt{u^2+v^2}}, \qquad y=-\varepsilon\frac{Rv}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

L'abscisse du point de contact est en effet égale à la demi-somme des racines de l'équation (3), puisque ces racines sont égales; ayant l'abscisse, on en déduit immédiatement la valeur de l'ordonnée. On voit que les points de contact de ces deux tangentes sont diamétralement opposés.

En particulier, les tangentes parallèles à la droite ayant pour équation $y = mx$ sont déterminées par l'équation

$$y = mx + \varepsilon R\sqrt{1+m^2}.$$

219. *Équation de la tangente au cercle, en un point donné.* — Soient (x_1, y_1) les coordonnées d'un point A du cercle ayant pour équation

$$(1) \qquad x^2+y^2-R^2=0.$$

Soient x, y les coordonnées d'un point quelconque P (*fig.* 64); les expressions $x_1+\lambda x$, $y_1+\lambda y$, $1+\lambda$ sont les coordonnées homogènes d'un point M de la droite AP; ce point M sera sur le cercle représenté par l'équation (1), si λ est l'une des racines de l'équation

Fig. 64.

$$(x_1+\lambda x)^2+(y_1+\lambda y)^2-R^2(1+\lambda)^2=0$$

ou, en développant et remarquant que le terme constant est nul, puisque $A(x_1, y_1)$ est sur le cercle,

$$(2) \qquad 2\lambda(xx_1+yy_1-R^2)+\lambda^2(x^2+y^2-R^2)=0.$$

Cette équation a une racine nulle, à laquelle correspond le point A; la seconde racine correspond au second point d'intersection de la droite AP et du cercle; pour que ce second point se confonde avec le premier, il faut et il suffit que

$$(3) \qquad xx_1+yy_1-R^2=0,$$

c'est-à-dire que la droite AP soit confondue avec la droite AT, représentée par l'équation précédente. Cette équation est donc celle de la tangente au point (x_1, y_1), pourvu qu'on suppose remplie la condition

$$x_1^2+y_1^2-R^2=0.$$

Le rayon OA ayant pour équation $xy_1-yx_1=0$, on vérifie que la tangente en A est perpendiculaire au rayon OA.

220. *Mener à un cercle une tangente par un point donné.* — Désignons par X, Y les coordonnées courantes et par x_1, y_1 les

coordonnées du point donné. Il s'agit de déterminer les coordonnées (x, y) d'un point M du cercle défini par l'équation

(1) $$X^2 + Y^2 - R^2 = 0,$$

et tel que la tangente en ce point passe par A. La tangente en M ayant pour équation

$$Xx + Yy - R^2 = 0,$$

les coordonnées (x, y) doivent vérifier les deux équations

(2) $$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

(3) $$xx_1 + yy_1 - R^2 = 0;$$

donc le point M est à l'intersection du cercle et de la droite que représentent les équations (2) et (3) quand on y regarde x et y comme des coordonnées courantes. Réciproquement, tout point commun au cercle et à la droite représentés par ces deux équations convient à la question. Il y a donc deux tangentes passant par le point A; leurs points de contact sont à l'intersection du cercle donné et de la droite représentée par l'équation (3) et que l'on nomme la *polaire* du point A. Ces points sont réels si (218)

$$x_1^2 + y_1^2 - R^2 > 0,$$

c'est-à-dire si le point donné est extérieur au cercle; les deux tangentes sont alors réelles. Si le point A est sur le cercle, elles se confondent en une seule, et enfin elles n'existent plus si le point A est intérieur au cercle.

On peut remplacer l'équation (3) par celle qu'on obtient en retranchant membre à membre les équations (2) et (3); ce qui donne

(4) $$x^2 + y^2 - xx_1 - yy_1 = 0.$$

Cette équation représente le cercle décrit sur OA comme diamètre; les points de contact cherchés sont à l'intersection de ce cercle et du cercle donné. On retrouve ainsi la construction donnée en Géométrie élémentaire.

Polaire d'un point par rapport à un cercle.

221. *Définition.* — On dit que deux points A, B sont conjugués harmoniques par rapport à un cercle quand ces deux points sont conjugués harmo-

niques par rapport aux points d'intersection de ce cercle et de la droite AB. On nomme *polaire* d'un point par rapport à un cercle le lieu des conjugués harmoniques de ce point par rapport au cercle donné.

Sur chaque droite menée par le point A, il y a un point M et un seul, qui soit conjugué de A, et si le point A n'est pas sur le cercle, le point M est distinct du point A. On prévoit ainsi que le lieu cherché est une droite. Si la sécante menée par A devient tangente, le conjugué de A se confond avec le point de contact; la polaire de A est donc la corde des contacts des tangentes issues de A. Enfin, si A est sur le cercle, on voit immédiatement que sa polaire se confond avec la tangente en A. Nous allons vérifier ces résultats par le calcul.

222. *Équation de la polaire d'un point.* — Soient (x_1, y_1) les coordonnées de A et (x, y) celles d'un point M. Soit $x^2+y^2-R^2=0$ l'équation du cercle donné. A chaque racine de l'équation

$$(x_1+\lambda x)^2+(y_1+\lambda y)^2-R^2(1+\lambda)^2=0$$

correspond un point d'intersection du cercle et de la droite AM; pour que les deux points d'intersection soient conjugués par rapport à A et M, il faut et il suffit que les racines de l'équation précédente soient égales et de signes contraires; la polaire de A a donc pour équation

$$xx_1+yy_1-R^2=0.$$

La condition pour que deux points (x_1, y_1), (x_2, y_2) soient conjugués est

$$x_1x_2+y_1y_2-R^2=0.$$

223. *Pôle d'une droite.* — Étant donnée la droite représentée par l'équation

$$(1)\qquad ux+vy+w=0,$$

il s'agit de déterminer les coordonnées (x_1, y_1) d'un point ayant pour polaire cette droite, par rapport au cercle défini par l'équation

$$x^2+y^2-R^2=0.$$

La polaire du point (x_1, y_1) ayant pour équation

$$(2)\qquad xx_1+yy_1-R^2=0,$$

on trouve, en identifiant les équations (1) et (2),

$$\frac{x_1}{u}=\frac{y_1}{v}=-\frac{R^2}{w};$$

donc

$$x_1=-\frac{R^2u}{w},\qquad y_1=-\frac{R^2v}{w}.$$

Toute droite a donc un pôle; ce pôle est rejeté à l'infini dans la direction perpendiculaire à cette droite, si elle passe par le centre du cercle.

En particulier, le pôle de la droite (1), par rapport au cercle imaginaire défini par l'équation

$$x^2+y^2+1=0,$$

a pour coordonnées homogènes les trois coefficients u, v, w de l'équation de la droite, c'est-à-dire précisément les coordonnées tangentielles de cette droite.

224. *Positions relatives du pôle et de la polaire.* — Si l'on prend pour axe des x le diamètre qui passe par le point A, les coordonnées de ce point étant $(x_1, 0)$, sa polaire a pour équation $xx_1 - R^2 = 0$.

On voit ainsi que la polaire d'un point A, par rapport à un cercle de centre O, est une perpendiculaire au diamètre OA. Si x_1 varie de 0 à $+\infty$, l'abscisse x de la polaire décroît de $+\infty$ à 0; si $x_1 = R$ on a aussi $x = R$. Quand le point A est intérieur au cercle, sa polaire est extérieure, et, si le point A est extérieur, sa polaire rencontre le cercle en deux points réels.

225. Théorème fondamental. — *Quand un point décrit une droite fixe* D, *sa polaire tourne autour du pôle* P *de la droite* D, *et réciproquement, si une droite tourne autour de* P *son pôle décrit la droite* D, *polaire du point* P.

En effet, soient (x_1, y_1) les coordonnées de P; la droite D, polaire de P, a pour équation

$$xx_1+yy_1-R^2=0.$$

Soient (x_2, y_2) les coordonnées d'un point M de la droite D, de sorte que

$$x_1x_2+y_1y_2-R^2=0.$$

Cette équation exprime que la polaire de M passe par P.

Réciproquement, soient x_2, y_2 les coordonnées du pôle d'une droite Δ passant par P; Δ, ayant pour équation

$$xx_2+yy_2-R^2=0,$$

passe par P si

$$x_1x_2+y_1y_2-R^2=0.$$

Ce qui exprime que le pôle (x_2, y_2) de Δ est sur la polaire D du point P.

Remarque. — On peut remarquer qu'au fond ces deux propositions sont identiques. En effet, supposons établie la première partie et soit Δ une droite passant par P, le point P étant sur Δ, sa polaire passe par M, pôle de Δ. On peut d'ailleurs démontrer le théorème en s'appuyant sur cette remarque évidente : si deux points sont conjugués, la polaire de l'un passe par l'autre. Cela étant, M étant sur la polaire de P, ces deux points sont conjugués; donc la polaire de M passe par P.

226. *Corollaires.* — 1° Le pôle de la droite AB est le point commun aux polaires des deux points A et B.

2° La polaire du point de rencontre de deux droites est la droite qui passe par les pôles de ces deux droites. En particulier, la corde des contacts des tangentes issues d'un point est la polaire de ce point.

227. Théorème de Salmon. — *Étant donnés deux points et un cercle, les distances de chacun de ces points à la polaire de l'autre sont entre elles comme les distances de ces mêmes points au centre du cercle.*

Soient A (x_1, y_1) et B (x_2, y_2) deux points, les axes étant deux diamètres rectangulaires du cercle donné, dont le rayon est égal à R. Soient δ_1 la distance de A à la polaire de B ; δ_2 la distance de B à la polaire de A et enfin d_1 et d_2 les distances de A et de B au centre du cercle. On a

$$\delta_1 = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 - R^2|}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

ou

$$d_2\delta_1 = |x_1x_2 + y_1y_2 - R_2|.$$

Pareillement,

$$d_1\delta_2 = |x_1x_2 + y_1y_2 - R^2|;$$

donc

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{d_1}{d_2}.$$

228. Problème. — *Former l'équation du faisceau des tangentes à un cercle, menées par un point donné* A. — Soient (x_1, y_1) les coordonnées du point A ; si (x, y) sont les coordonnées d'un point M pris sur une tangente, issue du point A, au cercle de rayon R rapporté à deux diamètres rectangulaires, l'équation

$$(x_1 + \lambda x)^2 + (y_1 + \lambda y)^2 - R^2(1 + \lambda)^2 = 0$$

a ses racines égales, et réciproquement. Donc les coordonnées de M vérifient l'équation

$$(x^2 + y^2 - R^2)(x_1^2 + y_1^2 - R^2) - (xx_1 + yy_1 - R^2)^2 = 0$$

qui représente le faisceau demandé.

229. *Exprimer les coordonnées d'un point d'un cercle à l'aide d'un seul paramètre.* — Soient x_0, y_0 les coordonnées du centre C d'un cercle de rayon R ; si u, v sont les paramètres principaux d'un rayon CM, les coordonnées de l'extrémité M sont

$$x = x_0 + uR, \qquad y = y_0 + vR.$$

Si les axes *sont rectangulaires,* $u = \cos\varphi$, $v = \sin\varphi$, φ étant l'angle que $\overline{CM}$ fait avec $\overline{Ox}$; on a ainsi, pour les coordonnées de M :

$$x = x_0 + R\cos\varphi, \qquad y = y_0 + R\sin\varphi.$$

230. *Équation de la corde* MM′, *les points* M *et* M′ *ayant pour paramètres* φ *et* φ'. — Supposons que les axes soient deux diamètres rectangulaires du cercle donné. L'équation de MM′ est

$$x(R\cos\varphi - R\cos\varphi') - y(R\sin\varphi - R\sin\varphi') + R^2(\sin\varphi\cos\varphi' - \cos\varphi\sin\varphi') = 0,$$

ou, en simplifiant,

$$x\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2} + y\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2} - R\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2} = 0.$$

En posant $\varphi' = \varphi$, on en déduit l'équation de la tangente au point φ :

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - R = 0.$$

Ce résultat est évident *à priori.* Il convient de remarquer que le point de contact de la tangente parallèle étant diamétralement opposé au point φ, le paramètre de ce point de contact est égal à $\pi + \varphi$, de sorte que l'équation de cette seconde tangente est

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi + R = 0.$$

Lorsque les axes ne passent pas par le centre, l'équation de la tangente au point φ est

$$(x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi - R = 0,$$

et la tangente parallèle a pour équation

$$(x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi + R = 0.$$

Pour trouver l'intersection de la droite

$$ux + vy + w = 0$$

avec le cercle

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

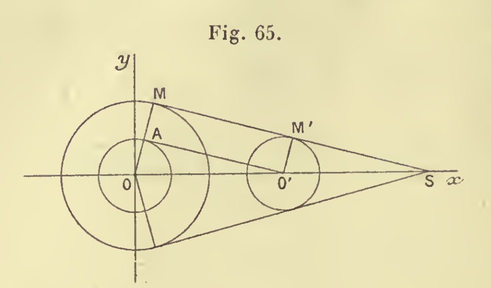
il suffira de résoudre l'équation

$$R(u\cos\varphi + v\sin\varphi) + w = 0.$$

231. Problème. — *Mener une tangente commune à deux cercles.* — Pre-

nons pour axes deux diamètres rectangulaires de l'un des deux cercles; l'un de ces diamètres passant par le centre de l'autre cercle. Soit (*fig.* 65) a l'abscisse du centre O′ et soient R, R′ les rayons des deux cercles qui seront représentés par les équations

Fig. 65.



$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$
$$(x - a)^2 + y^2 - R'^2 = 0.$$

L'équation d'une tangente au premier cercle peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad x \cos\varphi + y \sin\varphi - R = 0;$$

l'équation d'une tangente au second sera de même

$$(2) \qquad (x - a)\cos\varphi' + y \sin\varphi' - R' = 0.$$

En identifiant ces deux équations, on trouve

$$(3) \qquad \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{R}{R' + a\cos\varphi'}.$$

Les deux premiers rapports donnent $\tang\varphi' = \tang\varphi$, de sorte que $\varphi' = \varphi + k\pi$, k désignant un entier.

Par suite, suivant que l'on donne à k des valeurs paires ou impaires, on peut poser $\varphi' = \varphi$ ou $\varphi' = \varphi + \pi$.

Premier cas. $\varphi' = \varphi$. — Les équations (3) se réduisent à une seule, qui donne

$$\cos\varphi = \frac{R - R'}{a}.$$

Nous pouvons toujours supposer $a > 0$ et $R \geqq R'$; pour que la valeur attribuée à $\cos\varphi$ soit acceptable, il est nécessaire et suffisant que $R - R'$ soit $\leqq a$; c'est-à-dire que les cercles ne soient pas *intérieurs* l'un à l'autre. On retrouve ainsi la solution donnée en Géométrie élémentaire, car si de O comme centre avec $R - R'$ comme rayon, on décrit un cercle et que l'on mène à ce cercle une tangente O′A par le point O′, l'angle AOO′ aura pour cosinus $\frac{R - R'}{a}$ et, par suite, on pourra prendre $\varphi = AOO'$ ou $\varphi = 2\pi - AOO'$.

Il n'y a plus qu'à mener les tangentes au cercle O qui correspondent à ces angles. Les tangentes communes auront pour équations

$$x(R - R') \pm y\sqrt{a^2 - (R - R')^2} - aR = 0,$$

on voit que ces tangentes sont des tangentes extérieures, les centres O et O′ étant du même côté par rapport à chacune d'elles; elles coupent l'axe des x en un même point S ayant pour abscisse $\frac{aR}{R-R'}$.

Deuxième cas. $\varphi' = \varphi + \pi$. — Les équations (3) donnent

$$\cos\varphi = \frac{R+R'}{a},$$

et l'on doit avoir $a \geqq R + R'$.

On décrira, de O comme centre avec $R + R'$ pour rayon (*fig.* 66), un cercle auquel on mènera une tangente par le point O′; l'angle φ sera égal à AOO′ ou à $2\pi -$ AOO′. On retrouve encore la solution élémentaire. Le problème n'est possible que si les deux cercles sont extérieurs ou tangents extérieurement. L'équation des tangentes communes de cette seconde espèce est

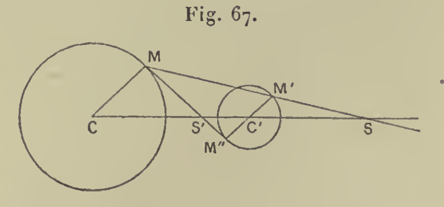
Fig. 66.

$$x(R+R') \pm y\sqrt{a^2-(R+R')^2} - aR = 0.$$

Si l'on remplace x et y par zéro dans le premier membre, on trouve pour résultat : $-aR$; si, au contraire, on pose $x = a$, $y = 0$, on obtient $+aR'$; donc chacune des tangentes passe entre O et O′; on a obtenu dans ce cas des tangentes intérieures. Ces tangentes coupent la ligne des centres en un même point S′ ayant pour abscisse $\frac{aR}{R+R'}$.

232. *Centre de similitude de deux cercles.* — Considérons deux cercles rapportés à deux axes quelconques, et soient a, b et a', b' les coordonnées de leurs centres C, C′; R et R′ étant leurs rayons. Menons deux rayons parallèles et de même sens; si u, v sont les paramètres directeurs principaux de la directrice commune, les coordonnées de l'extrémité des deux rayons seront, pour le point M (*fig.* 67), $x_1 = a + uR$, $y_1 = b + vR$, et, pour le point M′, $x_2 = a' + uR'$, $y_2 = b' + vR'$.

Fig. 67.



La droite MM′ a donc pour équation

$$x[b-b'+v(\mathrm{R}-\mathrm{R}')]-y[a-a'+u(\mathrm{R}-\mathrm{R}')]$$
$$+ab'-ba'+u(b'\mathrm{R}-b\mathrm{R}')+v(a\mathrm{R}'-a'\mathrm{R})=0,$$

ce qu'on peut écrire ainsi :

$$x(b-b')-y(a-a')+ab'-ba'$$
$$-u[y(\mathrm{R}-\mathrm{R}')-(b'\mathrm{R}-b\mathrm{R}')]+v[x(\mathrm{R}-\mathrm{R}')-(a'\mathrm{R}-a\mathrm{R}')]=0.$$

On voit immédiatement que la droite MM′ passe par le point ayant pour coordonnées

$$x=\frac{a'\mathrm{R}-a\mathrm{R}'}{\mathrm{R}-\mathrm{R}'},\qquad y=\frac{b'\mathrm{R}-b\mathrm{R}'}{\mathrm{R}-\mathrm{R}'},$$

et que l'on nomme *le centre de similitude directe* des deux cercles donnés.

Si l'on considère les rayons CM et C′M″ parallèles et de sens contraires, il faut, pour avoir l'équation de MM″, remplacer dans les coordonnées de M′, u et v par $-u$ et $-v$, ce qui revient à changer R′ en $-$R′, de sorte que l'on peut affirmer, sans faire de nouveaux calculs, que la droite MM″ passe par un point fixe ayant pour coordonnées

$$x=\frac{a'\mathrm{R}+a\mathrm{R}'}{\mathrm{R}+\mathrm{R}'},\qquad y=\frac{b'\mathrm{R}+b\mathrm{R}'}{\mathrm{R}+\mathrm{R}'};$$

ce second point est *le centre de similitude inverse*.

233. Théorème. — *Les centres de similitude directe de trois cercles pris deux à deux sont en ligne droite; de même, deux centres inverses et un centre direct convenablement associés sont en ligne droite, de sorte que les six centres sont disposés sur quatre droites.*

Les coordonnées du centre direct des deux cercles que nous avons considérés plus haut peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{\dfrac{a'}{\mathrm{R}'}-\dfrac{a}{\mathrm{R}}}{\dfrac{1}{\mathrm{R}'}-\dfrac{1}{\mathrm{R}}},\quad \frac{\dfrac{b'}{\mathrm{R}'}-\dfrac{b}{\mathrm{R}}}{\dfrac{1}{\mathrm{R}'}-\dfrac{1}{\mathrm{R}}};$$

on peut donc dire que les coordonnées homogènes de ce centre sont

$$\frac{a}{\mathrm{R}}-\frac{a'}{\mathrm{R}'},\quad \frac{b}{\mathrm{R}}-\frac{b'}{\mathrm{R}'},\quad \frac{1}{\mathrm{R}}-\frac{1}{\mathrm{R}'}.$$

Soient C, C′, C″ trois cercles dont les centres ont pour coordonnées (a, b), (a', b'), (a'', b''), et soient R, R′, R″ leurs rayons. Appelons S, S′, S″ les centres de similitude directe, et T, T′, T″ les centres inverses respectifs des couples (C′, C″), (C″, C), (C, C′); je dis que les points S, S′, S″ sont en ligne droite. En effet, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{a'}{R'} - \frac{a''}{R''} & \frac{b'}{R'} - \frac{b''}{R''} & \frac{1}{R'} - \frac{1}{R''} \\ \frac{a''}{R''} - \frac{a}{R} & \frac{b''}{R''} - \frac{b}{R} & \frac{1}{R''} - \frac{1}{R} \\ \frac{a}{R} - \frac{a'}{R'} & \frac{b}{R} - \frac{b'}{R'} & \frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \end{vmatrix}$$

est évidemment nul, puisque la somme des éléments appartenant à chaque colonne est nulle.

Si l'on change R en $-$R, le déterminant est encore égal à zéro, ce qui prouve que les centres inverses T′ et T″ et le centre direct S sont en ligne droite.

Proposons-nous de former l'équation de la droite SS′S″.

Pour cela, remarquons que la droite S′S″ a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{a'}{R'} - \frac{a}{R} & \frac{b'}{R'} - \frac{b}{R} & \frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \\ \frac{a''}{R''} - \frac{a}{R} & \frac{b''}{R''} - \frac{b}{R} & \frac{1}{R''} - \frac{1}{R} \end{vmatrix} = 0.$$

Or ce déterminant peut être remplacé par le suivant :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 & 0 \\ \frac{a}{R} & \frac{b}{R} & \frac{1}{R} & 1 \\ \frac{a'}{R'} & \frac{b'}{R'} & \frac{1}{R'} & 1 \\ \frac{a''}{R''} & \frac{b''}{R''} & \frac{1}{R''} & 1 \end{vmatrix}.$$

Il en résulte que l'équation de chacun des quatre axes de similitude est comprise dans la formule

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 & 0 \\ a & b & 1 & \varepsilon R \\ a' & b' & 1 & \varepsilon' R' \\ a'' & b'' & 1 & \varepsilon'' R'' \end{vmatrix} = 0,$$

$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ désignant l'unité positive ou négative. En prenant $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon''$, on aura l'axe de similitude directe.

234. Considérons maintenant un cercle rapporté à deux axes quelconques, et soit

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 + 2\alpha xz + 2\beta yz + \gamma z^2 = 0$$

son équation. On a

$$f(x_1 + \lambda x, y_1 + \lambda y, z_1 + \lambda z)$$
$$\equiv f(x_1, y_1, z_1) + \lambda(xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1}) + \lambda^2 f(x, y, z).$$

On en déduit, en raisonnant comme on l'a fait dans le cas où les axes coordonnés sont deux diamètres rectangulaires, les résultats suivants :

1° L'équation de la tangente au point x_1, y_1, z_1, situé sur le cercle, est

$$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} = 0.$$

2° L'équation de la polaire d'un point quelconque x_1, y_1, z_1 est

$$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} = 0.$$

Cette équation peut s'écrire aussi

$$x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z = 0.$$

On en conclut que la polaire de l'origine des coordonnées a pour équation

$$f'_z = 0.$$

3° Enfin, l'équation du faisceau des tangentes issues d'un point (x_1, y_1, z_1) est

$$4f(x, y, z)f(x_1, y_1, z_1) - (xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1})^2 = 0.$$

235. *Puissance d'un point par rapport à un cercle.* — Soient x_1, y_1 les coordonnées d'un point P. Menons par P une sécante dont la direction est définie par les paramètres principaux a, b, les axes étant quelconques. Considérons un cercle représenté par l'équation

$$f(x, y) = A\psi(x, y) + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0.$$

Les coordonnées d'un point commun à la sécante considérée et au cercle seront $x = x_1 + a\rho$, $y = y_1 + b\rho$, pourvu que ρ soit égal à l'une des racines de l'équation

$$f(x_1 + a\rho, y_1 + b\rho) = 0,$$

c'est-à-dire

$$A\psi(a, b)\rho^2 + \ldots + f(x_1, y_1) = 0.$$

Si l'on remarque que $\psi(a, b) = 1$, on voit que le produit des ra-

cines est égal à

$$\frac{f(x_1, y_1)}{A}.$$

Ce produit est indépendant de la direction de la sécante; on peut donc énoncer le théorème suivant :

Étant donnés un cercle C *et un point* P *dans son plan, le produit des distances de ce point aux points d'intersection du cercle et d'une sécante quelconque menée par le point* P *est constant, quelle que soit la direction de la sécante.*

Ce produit se nomme la *puissance* du point P par rapport au cercle C, et son expression s'obtient en substituant aux coordonnées courantes les coordonnées de P dans le premier membre de l'équation de C et divisant le résultat obtenu par le coefficient de x^2.

Il convient de remarquer que le calcul précédent s'applique à une sécante imaginaire, pourvu toutefois que cette sécante ne soit pas isotrope. Si (a, b) sont les paramètres d'une sécante isotrope, on a, en effet, $\psi(a, b) = 0$; on ne peut donc pas supposer le point directeur à l'unité de distance de l'origine. Mais si l'on pose $x = x_1 + a\rho$, $y = y_1 + b\rho$ et que l'un au moins des nombres a et b soit différent de zéro, le point (x, y) ne peut être à l'infini que si ρ est infini. Cela étant, dans le cas d'une droite isotrope, l'une des racines de l'équation en ρ que nous avons formée est infinie et l'autre aura une valeur finie si le point P ne coïncide pas avec le centre du cercle; par suite, si M, M' sont les points d'intersection de la sécante isotrope considérée et du cercle, l'un des facteurs PM, par exemple, est nul et l'autre est infini.

Remarquons encore que, dans le cas d'un cercle, $\eta = 2A\sin^2\theta$; donc, la puissance du point (x_1, y_1) par rapport au cercle ayant pour équation $f(x, y) = 0$ a pour expression algébrique

$$\frac{2f(x_1, y_1)\sin^2\theta}{\eta}.$$

Nous avons trouvé

$$f(x, y) \equiv A[\psi(x - x_0, y - y_0) - R^2],$$

donc

$$\frac{f(x_1, y_1)}{A} = d^2 - R^2,$$

d étant la distance du point P au centre (x_0, y_0) du cercle. La puissance d'un point P situé à une distance d du centre d'un cercle de rayon R a donc pour expression $d^2 - R^2$.

Donc la puissance de P est positive, nulle ou négative suivant que

P est extérieur au cercle, sur sa circonférence, ou intérieur; et réciproquement.

Intersection de deux cercles.

236. Soient $C = 0$, $C' = 0$ les équations de deux cercles, mises sous la forme *canonique,* c'est-à-dire les coefficients de x^2 et de y^2 étant égaux à l'unité.

Nous aurons les coordonnées des points communs à ces deux cercles en résolvant le système $C = 0$, $C' = 0$, ou le système équivalent $C = 0$, $C - C' = 0$.

Or la dernière équation, étant du premier degré, représente une droite. On est ainsi ramené à trouver l'intersection d'une droite et d'un cercle; par conséquent, deux cercles donnés se coupent en deux points. La droite que nous venons de trouver se nomme l'*axe radical* des deux cercles. Comme C et C' sont les puissances du point (x, y) par rapport aux deux cercles, on voit que l'axe radical peut être défini comme étant *le lieu des points ayant même puissance par rapport à ces deux cercles.*

237. *Points cycliques.* — Rendons les équations des cercles donnés homogènes :

$$C \equiv x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 + 2axz + 2byz + cz^2 = 0,$$
$$C' \equiv x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 + 2a'xz + 2b'yz + c'z^2 = 0.$$

En retranchant membre à membre, on obtient

$$C - C' \equiv z[2(a-a')x + 2(b-b')y + (c-c')z] = 0.$$

Donc aux solutions déjà trouvées et correspondant à $z = 1$, il convient d'ajouter les solutions du système

$$z = 0, \qquad x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 = 0.$$

On obtient ainsi deux points imaginaires conjugués que l'on désigne souvent pour abréger par les lettres I et J et qu'on nomme les *ombilics* du plan, ou encore les *points cycliques.* En supposant les axes rectangulaires, on peut dire que les coordonnées homogènes des points I et J sont

$$x = 1, \qquad y = i, \qquad z = 0;$$
$$x = 1, \qquad y = -i, \qquad z = 0.$$

Tout cercle du plan passe par ces deux points, qui sont indépendants des

axes de coordonnées comme les droites isotropes elles-mêmes. On voit, en effet, que les coordonnées de ces points vérifient l'équation d'un cercle quelconque. Réciproquement, une courbe du second degré qui passe par les deux points est un cercle. En effet, supposons les axes rectangulaires; en exprimant que l'équation du second degré est vérifiée pour $x=1$, $y=i$, $z=0$, et pour $x=1$, $y=-i$, $z=0$, on trouve

$$A+2Bi-C=0, \qquad A-2Bi-C=0;$$

ce qui donne $B=0$, $A=C$.

La tangente à un cercle quelconque au point I a pour équation

$$x+iy+D+Ei=0;$$

c'est la droite isotrope qui passe par le centre du cercle et le point I; résultat analogue pour le point J. Il en résulte que deux cercles concentriques sont tangents en I et en J; on peut également dire que deux cercles quelconques se coupent à angle droit en ces mêmes points.

Les coordonnées trilinéaires normales des points I et J sont

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos\varphi + i\sin\varphi, & \beta &= \cos\psi + i\sin\psi, & \gamma &= \cos\theta + i\sin\theta, \\ \alpha' &= \cos\varphi - i\sin\varphi, & \beta' &= \cos\psi - i\sin\psi, & \gamma' &= \cos\theta - i\sin\theta, \end{aligned}$$

ou

$$\alpha = e^{i\varphi}, \quad \beta = e^{i\psi}, \quad \gamma = e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \alpha' = e^{-i\varphi}, \quad \beta' = e^{-i\psi}, \quad \gamma' = e^{-i\theta},$$

de sorte que

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'.$$

Discussion de l'intersection de deux cercles.

238. Rapportons l'un des cercles à deux diamètres rectangulaires, l'axe des x passant par le centre du second cercle; les équations de ces cercles sont

$$x^2+y^2-R^2=0, \qquad (x-a)^2+y^2-R'^2=0,$$

a désignant la distance des centres; nous supposerons $a>0$, $R \geqq R'$.

L'axe radical de ces deux cercles a pour équation

$$x = \frac{R^2-R'^2+a^2}{2a},$$

ce qui montre que l'axe radical est perpendiculaire à la ligne des centres.

Pour que cette droite coupe le premier cercle en des points réels, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{R^2 - R'^2 + a^2}{2a} \leqq R,$$

ou

$$(R + R' - a)(R - R' - a) \leqq 0,$$

c'est-à-dire

$$R - R' \leqq a \leqq R + R'.$$

Si $a = R - R'$ ou $a = R + R'$ les deux cercles sont tangents.

239. Théorème. — *Les axes radicaux de trois cercles pris deux à deux ont un point commun, qu'on nomme le centre radical de ces trois cercles.*

En effet, soient, sous la forme canonique, $C = 0$, $C' = 0$, $C'' = 0$ les équations de trois cercles. Les axes radicaux de ces cercles, considérés deux à deux, ont pour équations

$$C' - C'' = 0, \qquad C'' - C = 0, \qquad C - C' = 0.$$

Ces trois droites se coupent évidemment au point défini par les équations $C = C' = C''$, et qui a même puissance par rapport aux trois cercles donnés.

240. Problème. *Trouver l'équation générale des cercles passant par les points communs à deux cercles donnés.* — Soient $C = 0$, $C' = 0$ les équations des deux cercles donnés. L'équation

(1) $$\alpha C + \alpha' C' = 0,$$

dans laquelle α et α' sont deux constantes arbitraires, représente une infinité de cercles passant par les points communs aux deux cercles. Je dis qu'elle peut représenter tout cercle passant par ces deux points. En effet, soit C'' un tel cercle; prenons sur ce cercle un point (x_1, y_1) différent des deux premiers; en désignant par C_1 et C'_1 ce que deviennent C et C' quand on y remplace les coordonnées courantes par x_1, y_1, on peut déterminer α et α' de façon que le cercle représenté par l'équation $C'' = 0$ passe par le point (x_1, y_1); il faut pour cela que $\alpha C_1 + \alpha' C'_1 = 0$, et, par suite, il suffit de prendre $\alpha = C'_1$, $\alpha' = -C_1$; de sorte que l'équation

$$CC'_1 - C'C_1 = 0$$

représente un cercle ayant avec C'' trois points communs et, par suite, confondu avec C''.

241. *Équation générale des cercles passant par les points d'intersection d'un cercle* C *et d'une droite* D. — On peut énoncer autrement le problème : il s'agit de former l'équation générale des cercles ayant avec le cercle donné C, pour axe radical, la droite donnée D.

Soient $C = 0$ et $C' = 0$ les équations, sous forme canonique, du cercle donné et de l'un des cercles cherchés. L'équation de l'axe radical de ces deux cercles est $C' - C = 0$. Cette droite devant coïncider avec la droite définie par l'équation $D = 0$, on doit avoir, λ étant une constante,

$$C' - C \equiv \lambda D,$$

et, par suite,

$$C' \equiv C + \lambda D.$$

L'équation demandée est donc de la forme

$$\alpha C + \beta D = 0,$$

α et β étant deux constantes arbitraires.

Réciproquement, l'équation précédente représente bien un cercle ayant avec le cercle donné pour axe radical la droite donnée. On a donc trouvé l'équation générale demandée.

Remarque. — Cette solution permet de résoudre le problème précédent, car si un cercle passe par les points communs aux cercles $C = 0$, $C' = 0$, il a avec l'un d'eux pour axe radical la droite représentée par $C - C' = 0$; donc l'équation demandée est $C + \lambda(C - C') = 0$. Cette équation est bien de la forme $\alpha C + \alpha' C' = 0$.

242. Application. *Équation générale des cercles tangents à un cercle donné.* — Soient $C = 0$ l'équation d'un cercle et $T = 0$ l'équation d'une tangente à ce cercle ; le cercle cherché et le cercle C ont pour axe radical une tangente au cercle C ; donc l'équation générale demandée est

$$C + \lambda T = 0.$$

Par exemple, les axes étant rectangulaires,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 + \lambda\left(\overline{x - a}\cos\varphi + \overline{y - b}\sin\varphi - R\right) = 0,$$

dans laquelle φ désigne un angle arbitraire, représente tous les cercles tangents au cercle ayant pour équation

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0.$$

On peut encore remarquer que l'équation

$$(1) \qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\lambda[y-y_0-m(x-x_0)]=0$$

est l'équation générale des cercles tangents au point (x_0, y_0) à la droite représentée par l'équation

$$y-y_0-m(x-x_0)=0;$$

car cette droite est l'axe radical du cercle de rayon nul ayant pour centre x_0, y_0 et de tout cercle représenté par l'équation (1).

Cercles orthogonaux.

243. Pour que deux cercles se coupent à angle droit en deux points réels, il faut que les rayons partant de l'un quelconque des deux points communs à ces cercles soient rectangulaires et, par suite, d, R, R′ désignant la distance des centres et les rayons, on doit avoir $d^2=R^2+R'^2$.

Réciproquement, si cette condition est vérifiée, on peut former un triangle rectangle ayant deux sommets confondus avec les centres, les côtés de l'angle droit étant égaux aux rayons, d'où il résulte évidemment que les deux cercles se coupent en des points réels et à angle droit.

On peut obtenir la condition précédente par le calcul. Soient en effet, les axes étant rectangulaires,

$$(1) \qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2-R^2=0,$$

$$(2) \qquad (x-x_1)^2+(y-y_1)^2-R'^2=0$$

les équations de deux cercles, et soient x, y les coordonnées de l'un de leurs points communs. Les tangentes en ces points ont pour équations, respectivement,

$$(X-x)(x-x_0)+(Y-y)(y-y_0)-R^2=0,$$
$$(X-x)(x-x_1)+(Y-y)(y-y_1)-R'^2=0.$$

La condition pour que ces droites se coupent à angle droit est

$$(3) \qquad (x-x_0)(x-x_1)+(y-y_0)(y-y_1)=0.$$

Les coordonnées (x, y) d'un point commun à ces deux cercles doivent donc vérifier les relations (1), (2), (3). En multipliant le premier membre de l'équation (3) par -2, et ajoutant aux deux premières, membre à membre, on

obtient la condition

$$(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 = R^2 + R'^2.$$

Cela étant, considérons les équations de deux cercles rapportés à deux axes quelconques

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0,$$
$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 + 2\alpha' x + 2\beta' y + \gamma' = 0,$$

et proposons-nous d'exprimer que ces deux cercles sont orthogonaux. La condition trouvée plus haut peut s'écrire ainsi

$$d^2 - R'^2 - R^2 = 0.$$

Elle exprime donc que la somme des puissances du centre du premier cercle, par exemple, par rapport aux deux cercles, est nulle, car la puissance de ce centre par rapport au premier cercle est égale à $d^2 - R'^2$ et, par rapport au second, à $-R^2$.

Si nous désignons par x et y les coordonnées du centre du premier cercle nous devons écrire, par suite, la condition

(4) $$2x^2 + 4xy\cos\theta + 2y^2 + 2(\alpha + \alpha')x + 2(\beta + \beta')y + \gamma + \gamma' = 0.$$

Mais les coordonnées x, y sont définies par les équations

(5) $$x + y\cos\theta + \alpha = 0,$$
(6) $$x\cos\theta + y + \beta = 0.$$

On aura la condition cherchée en éliminant x et y entre ces trois équations. Or on peut remplacer l'équation (4) par l'équation obtenue en retranchant du premier membre de cette équation les premiers membres des équations (5) et (6) multipliés respectivement par $-2x$ et $-2y$, ce qui donne cette nouvelle équation, linéaire comme les deux précédentes,

(7) $$2\alpha' x + 2\beta' y + \gamma + \gamma' = 0.$$

En éliminant x et y entre les équations (5), (6), (7), nous obtenons la condition suivante :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \alpha \\ \cos\theta & 1 & \beta \\ 2\alpha' & 2\beta' & \gamma + \gamma' \end{vmatrix} = 0,$$

et, si les axes sont rectangulaires, cette équation se simplifie et devient

$$2(\alpha\alpha' + \beta\beta') = \gamma + \gamma'.$$

Supposons maintenant les équations des deux cercles données sous forme

$$A\,(x^2 + 2xy\cos\theta + y^2) + 2D\,x + 2E\,y + F = 0,$$
$$A'(x^2 + 2xy\cos\theta + y^2) + 2D'x + 2E'y + F' = 0,$$

il faudra poser

$$\alpha = \frac{D}{A}, \quad \beta = \frac{E}{A}, \quad \gamma = \frac{F}{A}, \quad \alpha' = \frac{D'}{A'}, \quad \beta' = \frac{E'}{A'}, \quad \gamma' = \frac{F'}{A'}.$$

Si les axes sont rectangulaires, la condition prendra la forme suivante :

$$(8) \qquad 2(DD' + EE') = AF' + A'F$$

et, dans le cas général,

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & D \\ \cos\theta & 1 & E \\ 2D' & 2E' & AF' + FA' \end{vmatrix} = 0.$$

La condition trouvée est linéaire et homogène par rapport aux coefficients des équations de chacun des deux cercles. Réciproquement, si les coefficients A, D, E, F de l'équation d'un cercle variable sont liés linéairement par une équation de la forme

$$(10) \qquad A\lambda + 2D\mu + 2E\nu + F\rho = 0,$$

le cercle représenté par l'équation

$$A(x^2 + 2xy\cos\theta + y^2) + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

est orthogonal à un cercle fixe.

Supposons les axes rectangulaires et identifions l'équation (10) avec l'équation (9), ce qui donne

$$\frac{F'}{\lambda} = \frac{D'}{-\mu} = \frac{E'}{-\nu} = \frac{A'}{\rho},$$

et, par suite, le cercle représenté par l'équation

$$A(x^2 + y^2) + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

est orthogonal au cercle représenté par l'équation

$$\rho(x^2 + y^2) - 2\mu x - 2\nu y + \lambda = 0.$$

On voit que le coefficient ρ doit être différent de zéro. Si l'on suppose $\rho = 0$, la relation (10) exprime que le centre du cercle décrit une droite. On peut dire que le cercle orthogonal a dégénéré en ligne droite.

Si les axes sont obliques, la relation (9) peut s'écrire

$$2D(E'\cos\theta - D') + 2E(D'\cos\theta - E') + (AF' + A'F)\sin^2\theta = 0;$$

pour déterminer A′, D′, E′, F′, on devra résoudre les équations

$$\frac{F'\sin^2\theta}{\lambda} = \frac{E'\cos\theta - D'}{\mu} = \frac{D'\cos\theta - E'}{\nu} = \frac{A'\sin^2\theta}{\rho}.$$

Pour résoudre ce système, on peut poser $A' = \rho$, $F' = \lambda$; il en résulte

$$D' \cos\theta - E' = \nu \sin^2\theta, \qquad E' \cos\theta - D' = \mu \sin^2\theta,$$

d'où l'on tire

$$D' = -(\mu + \nu \cos\theta), \qquad E' = -(\nu + \mu \cos\theta),$$

et, par suite, le cercle fixe orthogonal au cercle considéré a pour équation

$$\rho(x^2 + 2xy\cos\theta + y^2) - 2(\mu + \nu\cos\theta)x - 2(\nu + \mu\cos\theta)y + \lambda = 0.$$

244. Problème. — *Trouver le lieu des centres des cercles qui coupent à angle droit deux cercles donnés.*

Soient, les axes étant rectangulaires,

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad x^2 + y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0$$

les équations des deux cercles donnés. Pour que le cercle

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$$

coupe à angle droit les deux premiers, il faut et il suffit que

$$2D\alpha + 2E\beta + F + \gamma = 0, \qquad 2D'\alpha + 2E'\beta + F' + \gamma = 0.$$

En retranchant les deux équations membre à membre, on obtient

$$2(D - D')\alpha + 2(E - E')\beta + F - F' = 0,$$

ce qui démontre que le lieu demandé est l'axe radical des deux cercles donnés, car α, β sont les coordonnées du centre du cercle variable considéré.

D'ailleurs, on voit géométriquement que tout point M de l'axe radical de deux cercles est le centre d'un cercle orthogonal à ces deux cercles. En effet, les puissances du point M par rapport aux deux cercles sont égales; si l'on suppose M extérieur aux deux cercles, les tangentes MT, MT', menées de M à ces deux cercles, sont égales, et le cercle ayant pour centre M et pour rayon MT les coupe à angle droit.

245. Problème. — *Trouver l'équation du cercle orthogonal à trois cercles donnés.*

Soient

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2D''x + 2E''y + F'' = 0$$

les équations de trois cercles rapportés à deux axes rectangulaires, et soit

(1) $$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$$

l'équation d'un quatrième cercle. Il s'agit de déterminer α, β, γ par les conditions

$$(2)\qquad 2D\alpha + 2E\beta - \gamma - F = 0,$$

$$(3)\qquad 2D'\alpha + 2E'\beta - \gamma - F' = 0,$$

$$(4)\qquad 2D''\alpha + 2E''\beta - \gamma - F'' = 0.$$

Ces équations ont une solution, pourvu que le déterminant du système ne soit pas nul, c'est-à-dire pourvu que les centres des cercles donnés ne soient pas en ligne droite. Cela étant admis, il faudra porter dans l'équation (1) les expressions de α, β, γ tirées des équations (2), (3), (4); on en conclut que l'équation du cercle cherché est

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ -F & D & E & -1 \\ -F' & D' & E' & -1 \\ -F'' & D'' & E'' & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut transformer cette équation. Ajoutons la première ligne du déterminant aux suivantes, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2-F & D+x & E+y \\ x^2+y^2-F' & D'+x & E'+y \\ x^2+y^2-F'' & D''+x & E''+y \end{vmatrix} = 0.$$

Enfin, en ajoutant aux éléments de la première colonne ceux de la deuxième multipliés par $-x$, et ceux de la troisième multipliés par $-y$, on obtient l'équation

$$\begin{vmatrix} D+x & E+y & Dx+Ey+F \\ D'+x & E'+y & D'x+E'y+F' \\ D''+x & E''+y & D''x+E''y+F'' \end{vmatrix} = 0,$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial C}{\partial x} & \frac{\partial C}{\partial y} & \frac{\partial C}{\partial z} \\ \frac{\partial C'}{\partial x} & \frac{\partial C'}{\partial y} & \frac{\partial C'}{\partial z} \\ \frac{\partial C''}{\partial x} & \frac{\partial C''}{\partial y} & \frac{\partial C''}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

C, C', C'' désignant les premiers membres des équations des trois cercles donnés.

On désigne le cercle trouvé sous le nom de *cercle orthotomique* des trois cercles donnés.

246. *Propriétés du cercle orthotomique.* — 1° Le centre du cercle orthotomique est le centre radical des cercles donnés. Cela résulte immédiatement de la proposition établie au n° 243.

2° *Le lieu des points tels que leurs polaires par rapport à trois cercles soient concourantes est le cercle orthotomique relatif à ces trois cercles.*

En effet, soient x, y, z les coordonnées d'un point; les polaires de ce point ont pour équations

$$X\frac{\partial C}{\partial x} + Y\frac{\partial C}{\partial y} + Z\frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$

$$X\frac{\partial C'}{\partial x} + Y\frac{\partial C'}{\partial y} + Z\frac{\partial C'}{\partial z} = 0,$$

$$X\frac{\partial C''}{\partial x} + Y\frac{\partial C''}{\partial y} + Z\frac{\partial C''}{\partial z} = 0;$$

donc la condition pour que ces droites soient concourantes est précisément l'équation (5). Il en résulte que cette équation représente encore le cercle orthotomique quand les axes sont obliques.

Le point de concours des polaires est sur le cercle orthotomique. En effet, les équations de ces polaires peuvent se mettre sous la forme

$$x\frac{\partial C}{\partial X} + y\frac{\partial C}{\partial Y} + z\frac{\partial C}{\partial Z} = 0,$$

$$x\frac{\partial C'}{\partial X} + y\frac{\partial C'}{\partial Y} + z\frac{\partial C'}{\partial Z} = 0,$$

$$x\frac{\partial C''}{\partial X} + y\frac{\partial C''}{\partial Y} + z\frac{\partial C''}{\partial Z} = 0,$$

et, si X, Y, Z sont les coordonnées de leur point de concours, les équations précédentes étant vérifiées par des valeurs x, y, z non toutes nulles, il en résulte que l'équation du cercle orthotomique est vérifiée quand on remplace x, y, z par X, Y, Z.

Soient M un point du cercle orthotomique, M′ le point de concours des polaires de M par rapport aux cercles donnés, je dis que M et M′ sont diamétralement opposés. En effet, rapportons le cercle orthotomique à deux diamètres rectangulaires, et soit

$$x^2 + y^2 - \rho^2 = 0$$

son équation. Les équations des trois cercles donnés, rapportés aux mêmes axes, seront

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + \rho^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 2D'x + 2E'y + \rho^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 2D''x + 2E''y + \rho^2 = 0,$$

puisque la condition d'orthogonalité se réduit à $F - \rho^2 = 0$ par rapport au premier cercle, par exemple. Cela étant, si x_0, y_0 sont les coordonnées du

point M, sa polaire, représentée par

$$xx_0 + yy_0 + D(x + x_0) + E(y + y_0) + \rho^2 = 0,$$

passe par le point $-x_0$, $-y_0$.

On voit en même temps que le centre du cercle orthotomique est le centre radical des trois cercles, et que le carré de son rayon est égal à la puissance du centre radical par rapport à ces cercles.

Ces résultats sont faciles à obtenir géométriquement. En effet, le centre d'un cercle orthogonal à trois cercles donnés est évidemment le centre radical de ces trois cercles, et le carré de son rayon est égal à la puissance du centre radical et réciproquement. Ensuite, on a vu que si deux cercles sont orthogonaux, tout diamètre de l'un d'eux est partagé harmoniquement par l'autre (140); donc deux points M, M' diamétralement opposés, du cercle orthotomique, sont conjugués par rapport à chacun des cercles donnés; les polaires de M passent donc par M'. Réciproquement, si l'on suppose que deux points M, M' soient conjugués par rapport à trois cercles C, C', C'', O étant le milieu de MM', les puissances de O par rapport aux trois cercles seront égales à OM^2; on en conclut que O est le centre radical, et que les points M et M' sont sur un cercle fixe, orthogonal aux trois cercles donnés.

247. Problème. — *Déterminer deux familles de cercles orthogonaux.* — Il s'agit de déterminer deux familles de cercles tels que deux cercles quelconques appartenant à la première et à la seconde famille soient orthogonaux. Soient C, C' deux cercles de la première famille; tout cercle de la seconde famille devant couper à angle droit les cercles C et C', on en conclut que les centres des cercles de la seconde famille sont sur l'axe radical des cercles C et C'. Cela étant, si C'' est un troisième cercle de la première famille, les centres des cercles de la seconde famille devant être aussi sur l'axe radical de C et C'', il en résulte que deux cercles quelconques de la première famille ont pour axe radical une droite déterminée, et il en est de même des cercles de la seconde famille; par suite, les centres des cercles des deux familles sont disposés sur deux droites rectangulaires.

Cela étant, nous prendrons deux axes rectangulaires et nous formerons d'abord une première famille de cercles ayant leurs centres sur Ox, et tels que deux quelconques de ces cercles aient pour axe radical l'axe des y.

Soit

$$x^2 + y^2 + 2ax + \lambda = 0$$

l'équation d'un cercle ayant son centre sur Ox. La puissance de l'origine par rapport à chacun des cercles d'une famille doit être la même; on en conclut que λ doit avoir une valeur constante. Supposons, pour fixer les idées, $\lambda = h^2$, h étant une constante réelle; l'équation

$$x^2 + y^2 + 2ax + h^2 = 0,$$

dans laquelle a est un paramètre variable, représentera la première famille.

L'équation générale des cercles de la seconde famille sera de la forme

$$x^2 + y^2 + 2by + k = 0;$$

la condition d'orthogonalité se réduit à $k = -h^2$; donc la seconde famille est définie par l'équation

$$x^2 + y^2 + 2by - h^2 = 0,$$

dans laquelle b est un paramètre variable. On voit que ces cercles sont toujours réels et coupent l'axe des x en deux points réels, ayant pour coordonnées $x = \pm h$, $y = 0$. Soient ω et ω' ces deux points.

L'équation d'un cercle de la première famille peut se mettre sous la forme

$$(x + a)^2 + y^2 = a^2 - h^2.$$

Pour que ce cercle soit réel, il faut et il suffit que $a^2 - h^2$ soit positif. Lorsque $a = h$, le cercle se réduit à un point $x = -a$, $y = 0$: c'est le point ω; pour $a = -h$ on obtient l'autre point. La puissance de l'origine étant égale à $+h^2$, et celle du point ω, par exemple, égale à $2h(a + h)$, on voit que si le centre du cercle a une abscisse positive, on aura $a + h < 0$ si ce cercle est réel; donc le point ω sera à l'intérieur du cercle considéré. Ces points ω et ω' se nomment *les points limites* de la première famille. Si l'on avait posé $\lambda = -h^2$, ces résultats auraient été renversés.

La polaire de l'un des points limites par rapport à l'un quelconque des cercles de la première famille passe par l'autre point limite et est perpendiculaire à la ligne qui les joint.

En effet, la polaire du point $(h, 0)$ par rapport au cercle

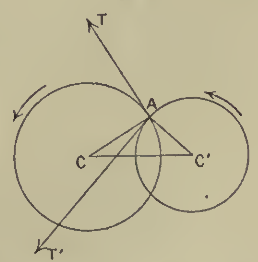
$$x^2 + y^2 + 2ax + h^2 = 0$$

a pour équation

$$(a + h)(x + h) = 0.$$

248. *Définition de l'angle de deux cercles.* — Considérons deux cercles (*fig.* 68) se coupant au point A, décrivons chacun de ces cercles dans le même sens et menons les demi-droites AT, AT', dirigées suivant la tangente et dans le sens de la vitesse du mobile décrivant chaque cercle; l'angle ainsi obtenu est égal à l'angle CAC'. Si nous désignons cet angle par V, on aura

Fig. 68.



$$d^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos V.$$

On peut conserver cette formule dans tous les cas en donnant des signes à r et à r'.

Si l'on décrit les cercles dans des sens contraires, on regardera r et r' comme ayant des signes contraires, et V désignera, dans ce cas, le supplément du premier angle que nous avons considéré.

249. Problème. — *Trouver le lieu des centres des cercles qui coupent trois cercles donnés sous un même angle.*

Soient
$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$
et
$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-\rho^2=0$$
les équations de deux cercles; φ étant l'angle de ces deux cercles, on a
$$(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2=r^2+\rho^2-2r\rho\cos\varphi.$$

En posant $a^2+b^2-r^2=c$, $\alpha^2+\beta^2-\rho^2=\gamma$ et $\rho\cos\varphi=\lambda$, on peut écrire
$$c+2r\lambda-2a\alpha-2b\beta+\gamma=0.$$
On aura de même pour deux autres cercles
$$c'+2r'\lambda-2a'\alpha-2b'\beta+\gamma=0,\qquad c''+2r''\lambda-2a''\alpha-2b''\beta+\gamma=0.$$

L'équation des cercles coupant sous l'angle φ les trois cercles donnés est donc de la forme
$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ c+2r\lambda & a & b & 1 \\ c'+2r'\lambda & a' & b' & 1 \\ c''+2r''\lambda & a'' & b'' & 1 \end{vmatrix}=0$$
ou
$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ c & a & b & 1 \\ c' & a' & b' & 1 \\ c'' & a'' & b'' & 1 \end{vmatrix}+2\lambda\begin{vmatrix} 0 & x & y & 1 \\ r & a & b & 1 \\ r' & a' & b' & 1 \\ r'' & a'' & b'' & 1 \end{vmatrix}=0,$$
équation de la forme
$$C+2\lambda D=0,$$
$C=0$ étant l'équation du cercle orthotomique des trois cercles donnés, et $D=0$ l'équation de l'un des axes de similitude.

Le lieu cherché est donc la perpendiculaire à cet axe menée par le centre radical des cercles donnés.

Inversion.

250. Soient Ox, Oy deux axes rectangulaires, et M un point ayant pour coordonnées (x,y). Si l'on prend sur OM un point M' tel que $\overline{OM}.\overline{OM'}=k$, on dit que M' est l'inverse de M, la puissance d'inversion étant égale à k. La puissance k est positive ou négative, suivant que $\overline{OM}$ et $\overline{OM'}$ ont le même sens ou des sens contraires. Pour obtenir une relation entre les coordonnées

de M et celles de $M'(x', y')$, remarquons que

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OM'}} = \frac{k}{x'^2+y'^2};$$

donc

$$x = \frac{kx'}{x'^2+y'^2}, \qquad y = \frac{ky'}{x'^2+y'^2}.$$

A la courbe $f(x, y) = 0$ correspond une courbe que nous nommerons *inverse* de la première et qui a pour équation

$$f\left(\frac{kx}{x^2+y^2}, \frac{ky}{x^2+y^2}\right) = 0.$$

Au cercle

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0$$

correspond un nouveau cercle ayant pour équation

$$c(x^2+y^2)+2k(ax+by)+k^2=0.$$

Si l'on suppose $c = 0$, c'est-à-dire si le cercle donné passe par le pôle d'inversion, l'inverse est une droite. Réciproquement, l'inverse d'une droite est un cercle. En effet, à $x - a = 0$ correspond

$$a(x^2+y^2) - kx = 0.$$

Le centre du cercle représenté par cette équation est sur la perpendiculaire abaissée du pôle sur la droite donnée.

On démontre en Géométrie que l'angle de deux courbes en un point M qui leur est commun est égal à l'angle des courbes inverses, au point correspondant M'; nous vérifierons plus loin cette proposition par le calcul. Il en résulte que si d est la distance des centres de deux cercles ayant pour rayons r, r', l'expression

$$\frac{d^2 - r^2 - r'^2}{2rr'}$$

reste invariable quand on transforme les deux cercles donnés par inversion; on peut le vérifier directement. Il en résulte que les expressions

$$\frac{d^2-(r+r')^2}{2rr'} \quad \text{et} \quad \frac{d^2-(r-r')^2}{2rr'}$$

restent invariables. Le carré d'une tangente commune extérieure a pour expression $d^2-(r-r')^2$ et le carré d'une tangente commune intérieure est égal à $d^2-(r+r')^2$. En désignant par T l'une des tangentes communes, on voit que $\frac{T}{\sqrt{rr'}}$ est invariable.

Considérons quatre cercles tangents à une droite aux points A, B, C, D; les

longueurs AB, AC, ..., CD sont des tangentes communes. De la relation

$$\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AD}.\overline{BC} = \overline{AC}.\overline{BD},$$

en désignant par (p, q) une tangente commune à deux cercles r_p, r_q, on déduit

$$\pm(1, 2)(3, 4) \pm (1, 4)(2, 3) \pm (1, 3)(2, 4) = 0.$$

Cette relation subsiste après l'inversion. Si le cercle (4) s'évanouit, son centre se place sur le cinquième cercle et les carrés des tangentes communes relatives à ce cercle deviennent les puissances d'un point d'un cercle tangent aux trois premiers. On en conclut que, si les équations de ces cercles sont $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$, l'équation d'un quelconque des cercles tangents aux trois premiers est

$$(2, 3)\sqrt{C_1} \pm (1, 3)\sqrt{C_2} \pm (1, 2)\sqrt{C_3} = 0$$ [Casey (1)].

Équation du cercle en coordonnées trilinéaires.

251. Nous savons déjà que si α, β, γ sont les coordonnées normales, le cercle circonscrit au triangle de référence a pour équation

$$a.\beta\gamma + b.\gamma\alpha + c.\alpha\beta = 0.$$

En ajoutant au premier membre de cette équation une fonction du premier degré arbitraire et rendant l'équation homogène, on obtient

$$a.\beta\gamma + b.\gamma\alpha + c.\alpha\beta + (u\alpha + v\beta + w\gamma)(a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0.$$

Cette équation, qui renferme trois paramètres arbitraires u, v, w, est l'équation générale du cercle, en coordonnées normales.

L'équation de la droite de l'infini étant, en coordonnées normales,

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,$$

devient, si l'on emploie des coordonnées quelconques,

$$\frac{a}{\lambda}\alpha + \frac{b}{\mu}\beta + \frac{c}{\nu}\gamma = 0;$$

cette équation devant être identique à

$$r\alpha + r'\beta + r''\gamma = 0,$$

on en conclut

$$\frac{a}{\lambda r} = \frac{b}{\mu r'} = \frac{c}{\nu r''}.$$

---

(1) *Voir* la *Géométrie analytique* de G. Salmon, traduction Vaucheret, t. I, p. 191.

Il en résulte que l'équation du cercle circonscrit au triangle de référence est

$$a\lambda\beta\gamma + b\mu\gamma\alpha + c\nu\alpha\beta = 0,$$

c'est-à-dire

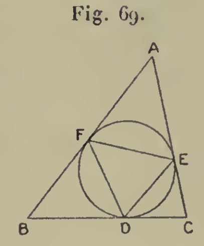
$$\lambda^2 r\beta\gamma + \mu^2 r'\gamma\alpha + \nu^2 r''\alpha\beta = 0,$$

et l'équation d'un cercle quelconque devient

$$\lambda^2 r\beta\gamma + \mu^2 r'\gamma\alpha + \nu^2 r''\alpha\beta + (u\alpha + v\beta + w\gamma)(r\alpha + r'\beta + r''\gamma) = 0.$$

232. *Équation du cercle inscrit au triangle de référence; cercles exinscrits.* — Soient (*fig.* 69) D, E, F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés du triangle ABC. On sait que les angles du triangle DEF ont pour valeurs $90^\circ - \frac{A}{2}$, $90^\circ - \frac{B}{2}$, $90^\circ - \frac{C}{2}$. En supposant l'origine des coordonnées à l'intérieur de DEF et appelant α', β', γ' les distances d'un point M aux côtés de ce triangle, le cercle circonscrit au triangle DEF a pour équation

Fig. 69.



$$\beta'\gamma' \cos\tfrac{1}{2}A + \gamma'\alpha' \cos\tfrac{1}{2}B + \alpha'\beta' \cos\tfrac{1}{2}C = 0.$$

Mais, en vertu d'une propriété connue du triangle isoscèle, on a pour tous les points de ce cercle

$$\alpha'^2 = \beta\gamma, \qquad \beta'^2 = \gamma\alpha, \qquad \gamma'^2 = \alpha\beta.$$

Si (α, β, γ) sont les coordonnées d'un point de l'arc sous-tendu par EF, β' et γ' sont positifs et α' négatif; donc

$$\alpha' = -\sqrt{\beta\gamma}, \qquad \beta' = \sqrt{\gamma\alpha}, \qquad \gamma' = \sqrt{\alpha\beta}.$$

on a donc pour cet arc

$$-\sqrt{\alpha}\cos\tfrac{1}{2}A + \sqrt{\beta}\cos\tfrac{1}{2}B + \sqrt{\gamma}\cos\tfrac{1}{2}C = 0.$$

On trouve de même pour les arcs DE et DF

$$\sqrt{\alpha}\cos\tfrac{1}{2}A - \sqrt{\beta}\cos\tfrac{1}{2}B + \sqrt{\gamma}\cos\tfrac{1}{2}C = 0,$$
$$\sqrt{\alpha}\cos\tfrac{1}{2}A + \sqrt{\beta}\cos\tfrac{1}{2}B - \sqrt{\gamma}\cos\tfrac{1}{2}C = 0.$$

Sous forme entière et rationnelle, l'équation du cercle inscrit à ABC est

$$\alpha^2\cos^2\tfrac{1}{2}A + \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}B + \gamma^2\cos^2\tfrac{1}{2}C$$
$$- 2\beta\gamma\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C - 2\gamma\alpha\cos\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}A - 2\alpha\beta\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B = 0.$$

On emploie la même méthode pour les cercles exinscrits. On trouve pour

le cercle exinscrit intérieur à l'angle A

$$\alpha^2\cos^2\tfrac{1}{2}A + \beta^2\sin^2\tfrac{1}{2}B + \gamma^2\sin^2\tfrac{1}{2}C$$
$$- 2\beta\gamma\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C + 2\gamma\alpha\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}A + 2\alpha\beta\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B = 0.$$

EXERCICES.

1. Former l'équation du cercle des neuf points relatif à un triangle donné.

2. Si l'on nomme x_0, y_0 les coordonnées du centre du cercle circonscrit à un triangle ABC, x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 les coordonnées des sommets de ce triangle, le centre du cercle des neuf points de ce triangle a pour coordonnées

$$\frac{x_1+x_2+x_3-x_0}{2}, \quad \frac{y_1+y_2+y_3-y_0}{2}.$$

3. On mène par un point A deux droites qui rencontrent un cercle fixe aux points B, C et B', C' respectivement. Prouver que les cercles ABC' et AB'C se coupent en un point situé sur le cercle décrit sur AO comme diamètre, O étant le centre du cercle donné.

4. Soient AB une corde, C le milieu de l'un des arcs qu'elle sous-tend dans un cercle donné et P un point quelconque pris sur la circonférence de ce cercle; on prend sur PC une longueur PM = PA + PB. Trouver le lieu de M.

5. Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point P du cercle circonscrit à un triangle sur les côtés de ce triangle sont en ligne droite et réciproquement. Déduire de là l'équation du cercle circonscrit au triangle de référence.

La droite obtenue (droite de Simson) passe à égale distance du point O et de l'orthocentre.

En prenant pour axes deux diamètres rectangulaires du cercle circonscrit au triangle ABC, et en appelant α, β, γ, φ les angles que les rayons OA, OB, OC, OP font avec l'axe des x, on peut déterminer l'axe des x de façon que $\alpha+\beta+\gamma = 2\pi$. La droite de Simson a alors pour équation

$$x\sin\frac{\varphi}{2} + y\cos\frac{\varphi}{2} = R\left(\sin\frac{3\varphi}{2} + 2\sin\frac{\alpha-\varphi}{2}\sin\frac{\beta-\varphi}{2}\sin\frac{\gamma-\varphi}{2}\right).$$

En transportant l'origine au centre du cercle des neuf points, la direction des axes étant conservée, cette équation devient

$$x\sin\frac{\varphi}{2} + y\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{R}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}$$ (BADOUREAU, *Nouvelles Annales*, 1879).

6. On donne un cercle S, un triangle ABC y inscrit et deux points P, P' sur la circonférence S. 1° Trouver le lieu du point de rencontre M des deux droites

de Simson qui correspondent à P, P′ quand le sommet C se déplace sur la circonférence S, A et B restant fixes. On trouve un cercle S′.

2° Trouver le lieu du centre de S′ quand A et B étant fixes, P et P′ se déplacent de manière que l'axe PP′ reste constant.

7. Démontrer que les cercles, ayant pour diamètres trois cordes appartenant à un même cercle et partant d'un même point de ce cercle, se coupent en trois points situés en ligne droite. *

8. Les cercles décrits sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet ont même axe radical.

9. Lieu des points tels que si l'on abaisse de chacun d'eux des perpendiculaires sur les côtés d'un triangle donné, le triangle formé par les pieds de ces perpendiculaires ait une aire constante $2k$.

— On trouve deux cercles concentriques au cercle circonscrit. R étant le rayon du cercle circonscrit, les carrés des rayons de ces cercles ont pour valeurs $R^2 \pm \dfrac{k}{\sin A \sin B \sin C}$.

10. En nommant d la distance des centres du cercle inscrit et du cercle circonscrit à un triangle et r, R les rayons de ces cercles, prouver que

$$d^2 = R(R - 2r).$$

2° En appelant r' le rayon du cercle exinscrit situé dans l'angle A, et d' la distance de son centre à celui du cercle circonscrit, on a

$$d'^2 = R(R + 2r').$$

Montrer que, si l'une de ces relations a lieu, il y a une infinité de triangles inscrits au cercle R et dont les côtés sont tangents au cercle r ou r'.

11. Trouver le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances à des points donnés soit constante, chacun des carrés étant multiplié par un coefficient constant. Cas où la somme des coefficients est nulle.

12. Lieu des centres des cercles qui sont vus de deux points donnés sous des angles donnés.

13. Démontrer que l'axe radical de deux cercles est équidistant des polaires de l'un quelconque des centres de similitudes.

— Prendre le centre de similitude considéré pour origine.

14. Soient $C = 0$, $C' = 0$, $C'' = 0$ les équations de trois cercles fixes. Le cercle ayant pour équation $\lambda C + \lambda' C' + \lambda'' C'' = 0$ est orthogonal à un cercle fixe.

— Appliquer le corollaire du n° 243.

15. Condition pour que quatre cercles soient coupés orthogonalement par un cinquième.

— En appelant A, B, C, D les centres des quatre cercles, S_1, S_2, S_3, S_4 les aires des triangles ACD, CDA, DAB, ABC; $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \varpi_4$ les puissances d'un point quelconque de l'origine, on a la condition

$$\varpi_1 S_1 - \varpi_2 S_2 + \varpi_3 S_3 - \varpi_4 S_4 = 0.$$

16. Calculer l'angle de deux cercles.

On écrit $d^2 - r^2 - r'^2 + 2rr' \cos V = 0$, et l'on suit la méthode du n° 242.

On trouve $2 \cos V \sqrt{\dfrac{\Delta\Delta'}{AA'_1}} = -M$, M désignant le déterminant (9).

17. Former les équations des cercles qui passent par deux points donnés et sont tangents à un cercle donné.

18. Déterminer les cercles tangents à trois cercles donnés.

(*Voir* G. Salmon, t. Ier, p. 185. Consulter : *Leçons de l'Agrégation classique,* par G. Kœnigs, Paris, Hermann.)

19. Déterminer tous les systèmes de deux familles de cercles tels que tout cercle de la première coupe tout cercle de la seconde sous un angle donné.

CHAPITRE VII.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

253. On nomme *lieu géométrique* l'ensemble des points qui jouissent d'une propriété particulière. Il arrive quelquefois que cette propriété est assez simple pour que l'on puisse en déduire immédiatement l'*équation* du lieu. C'est ainsi que nous avons pu déduire de leurs *définitions* les équations du cercle, de l'ellipse, de l'hyperbole ou de la parabole. Mais, le plus souvent, le lieu que l'on cherche est décrit par un point mobile dont les positions successives dépendent des valeurs attribuées à un *paramètre variable.* Par exemple,

on peut chercher l'équation de la courbe décrite par un point mobile M, dont les coordonnées rectilignes x, y sont liées à un paramètre variable a par les équations

$$x = f(a), \qquad y = f_1(a),$$

f et f_1 désignant des fonctions continues de a. A chaque valeur a_0, attribuée au paramètre a, correspond une position bien déterminée de M, dont les coordonnées sont $x_0 = f(a_0)$, $y_0 = f_1(a_0)$, en admettant que chacune des fonctions données n'ait qu'une seule détermination. Plus généralement, le point M peut être défini comme étant l'un quelconque des points communs à deux courbes variables, dont les équations

$$(1) \qquad f(x, y, a) = 0, \qquad f_1(x, y, a) = 0$$

renferment le paramètre variable a. A chaque valeur a_0, attribuée au paramètre a, correspondent deux courbes, une de chaque famille, qui se coupent en un ou plusieurs points, dont les coordonnées vérifient les équations

$$f(x, y, a_0) = 0, \qquad f_1(x, y, a_0) = 0.$$

Soit M l'un de ces points. Si l'on fait varier a d'une manière continue, M se déplacera, en général, d'une manière continue, et l'ensemble de tous ces points décrira une courbe dont il s'agit d'obtenir l'équation.

Je dis qu'on obtiendra l'équation du lieu défini par les équations (1), en éliminant a entre ces deux équations.

En effet, soient x_0, y_0 les coordonnées d'un point du lieu, c'est-à-dire d'un point commun aux courbes définies par les équations

$$(2) \qquad f(x, y, a_0) = 0, \qquad f_1(x, y, a_0) = 0,$$

de sorte que

$$f(x_0, y_0, a_0) = 0, \qquad f_1(x_0, y_0, a_0) = 0.$$

Les équations

$$(3) \qquad f(x_0, y_0, a) = 0, \qquad f_1(x_0, y_0, a) = 0$$

ont au moins une solution commune a_0. Par suite, en désignant par

$R(x_0, y_0)$ le *résultant* des fonctions de a : $f(x_0, y_0, a)$, $f_1(x_0, y_0, a)$, on a

$$(4) \qquad R(x_0, y_0) = 0;$$

ce qui signifie que le point (x_0, y_0) appartient à la courbe représentée par l'équation

$$(5) \qquad R(x, y) = 0.$$

Réciproquement, si (x_0, y_0) sont les coordonnées d'un point de cette courbe, la condition (4) est vérifiée; par suite, les équations (3) ont au moins une solution commune a_0; en d'autres termes, le point (x_0, y_0) est l'un des points communs aux courbes (2) et, par suite, ce point est bien un point du lieu.

Il ne reste plus qu'à remarquer que l'équation (5) est la résultante des deux équations (1).

254. *Généralisation.* — Il arrive le plus souvent que l'on est obligé de faire intervenir plus d'un paramètre variable. Par exemple, on peut considérer des courbes variables définies par les équations

$$(6) \qquad f(x, y, a, b) = 0,$$

$$(7) \qquad f_1(x, y, a, b) = 0,$$

dans lesquelles a, b désignent deux paramètres variables liés par une équation

$$(8) \qquad \varphi(a, b) = 0.$$

On aura l'équation du lieu du point (x, y) en éliminant a et b entre ces trois équations.

Effectivement, soit

$$R(x, y) = 0$$

la résultante des équations précédentes, dans lesquelles on regarde a et b comme seules variables.

Si x_0, y_0 sont les coordonnées d'un point M du lieu, il existe un système de valeurs, a_0, b_0 satisfaisant à l'équation (8) et auxquelles correspondent deux courbes définies par les équations

$$f(x, y, a_0, b_0) = 0, \qquad f_1(x, y, a_0, b_0) = 0$$

qui passent par le point M, de sorte que l'on peut écrire

$$f(x_0, y_0, a_0, b_0) = 0, \qquad f_1(x_0, y_0, a_0, b_0) = 0, \qquad \varphi(a_0, b_0) = 0.$$

Il en résulte que les équations

$$f(x_0, y_0, a, b) = 0, \tag{9}$$

$$f_1(x_0, y_0, a, b) = 0, \tag{10}$$

$$\varphi(a, b) = 0 \tag{11}$$

ont au moins une solution a_0, b_0, et, par conséquent,

$$R(x_0, y_0) = 0.$$

Réciproquement, si cette dernière condition est remplie, les équations (9), (10), (11) ont au moins une solution commune; ce qui démontre que le point x_0, y_0 est un point du lieu.

D'une manière générale, l'équation de la courbe décrite par un point dont les coordonnées x, y vérifient $n+1$ équations

$$(12) \quad \begin{cases} f(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \\ f_1(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles figurent n paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, s'obtient en éliminant ces n paramètres entre les $n+1$ équations précédentes.

En effet, si

$$R(x, y) = 0$$

est la résultante de ces équations, la condition

$$R(x_0, y_0) = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que les équations

$$\begin{aligned} &f(x_0, y_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \\ &f_1(x_0, y_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &f_n(x_0, y_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0 \end{aligned}$$

admettent au moins une solution

$$a_1 = a'_1, \qquad a_2 = a'_2, \qquad \ldots, \qquad a_n = a'_n,$$

c'est-à-dire pour que le point (x_0, y_0) soit commun aux courbes définies par les équations (12), dans lesquelles les paramètres ont les valeurs particulières $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$, ou, en définitive, pour que le point M (x_0, y_0) soit un point du lieu.

255. La proposition que nous venons d'établir est générale; mais elle appelle quelques observations.

Supposons en effet, pour plus de simplicité, que les conditions géométriques définissant la position d'un point M du lieu cherché soient exprimées au moyen des équations (1), renfermant un seul paramètre variable a et soit $R(x, y) = 0$ la résultante de ces équations. Soit M un point de la courbe (5). Nous avons dit qu'à ce point, ayant pour coordonnées x_0, y_0, il correspond au moins une valeur a_0 du paramètre a, telle que les courbes définies par les équations $f(x, y, a_0) = 0$, $f_1(x, y, a_0) = 0$ passent toutes les deux par le point M. Or il peut se faire que ces courbes ne répondent pas véritablement aux conditions géométriques de l'énoncé du problème pour toutes les valeurs de a; par exemple, il peut arriver que a doive être réel et même en outre compris entre certaines limites. Il est clair dès lors que si a_0 ne vérifie pas ces conditions, le point M ne fait pas partie géométriquement du lieu; c'est ainsi que certaines parties de la courbe, représentée par l'équation (5), peuvent être des parties parasites.

En second lieu, si l'une des courbes (1) passe par un point fixe A, ayant pour coordonnées x_1, y_1, et cela *quelle que soit la valeur de* a, le point A sera nécessairement un point de la courbe $R(x, y) = 0$. En effet, supposons que $f(x_1, y_1, a) \equiv 0$, cette identité étant supposée vérifiée pour toutes les valeurs de a. On peut, en général, trouver une ou plusieurs solutions de l'équation

$$f_1(x_1, y_1, a) = 0.$$

Soit a_0 l'une de ces solutions. On aura $f(x_1, y_1, a_0) = 0$, $f_1(x_1, y_1, a_0) = 0$. Ce qui prouve que $R(x_1, y_1) = 0$.

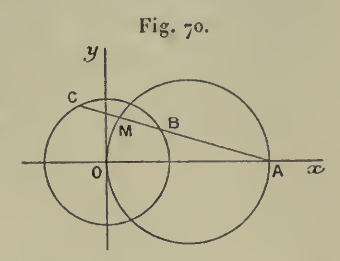
D'après ce que nous avons dit plus haut, le point A ne fera véritablement partie du lieu que si l'on peut trouver une solution a_0 telle que les courbes représentées par les équations $f(x, y, a_0) = 0$, $f_1(x, y, a_0) = 0$ répondent aux conditions géométriques données. S'il n'en est pas ainsi, le point A sera un point parasite.

Nous allons éclaircir ces considérations par quelques exemples simples.

256. Problème. — *Trouver le lieu des milieux des cordes d'un cercle qui passent par un point fixe.*

Nous prendrons (*fig.* 70) pour axe des x le diamètre du cercle donné passant par le point fixe A, l'axe des y étant le diamètre perpendiculaire. Soit $x^2+y^2-R^2=0$ l'équation du cercle. Si l'on désigne par d l'abscisse du point A, l'équation d'une sécante passant par A est de la forme

Fig. 70.



$$(1) \qquad y=a(x-d).$$

Cette sécante coupe le cercle en deux points B, C; proposons-nous de déterminer les coordonnées du milieu M de la corde BC. L'équation aux abscisses des points d'intersection du cercle et de la sécante étant

$$(2) \qquad x^2+a^2(x-d)^2-R^2=0,$$

l'abscisse du point M est égale à la demi-somme des racines de cette équation; en appelant x cette abscisse, on a, par suite,

$$(3) \qquad x=\frac{a^2 d}{1+a^2}.$$

Nous sommes ainsi conduits à éliminer a entre les équations (1) et (3); cette élimination ne présente aucune difficulté, et l'on trouve immédiatement

$$x[(x-d)^2+y^2]-dy^2=0$$

ou

$$(x-d)[x(x-d)+y^2]=0.$$

Cette équation se décompose en deux, savoir

$$x^2+y^2-dx=0 \qquad \text{et} \qquad x-d=0.$$

La première représente le cercle décrit sur OA comme diamètre et la seconde la perpendiculaire à OA menée par le point A.

Il est évident que la seconde solution ne répond pas au problème;

il s'agit d'expliquer pourquoi la méthode que nous avons suivie nous a donné cette solution. Nous avons remarqué que l'abscisse du milieu d'une corde BC passant par A est égale à la demi-somme des racines de l'équation (2); la réciproque n'est pas vraie : un point situé sur une sécante passant par A et dont l'abscisse est égale à la demi-somme des abscisses des points d'intersection du cercle avec la sécante n'est pas nécessairement le milieu de la corde que cette sécante détermine dans le cercle; cela n'est vrai que si la sécante n'est pas perpendiculaire à OA. En effet, si l'on suppose que a grandisse indéfiniment, l'équation (2), que l'on peut écrire

$$\frac{1}{a^2}(x^2 - R^2) + (x - d)^2 = 0,$$

devient, à la limite,

$$(x - d)^2 = 0,$$

de sorte que l'abscisse d'un point quelconque de cette sécante, et non pas seulement du milieu de la corde qu'elle détermine dans le cercle, est bien égale à la demi-somme des racines de l'équation précédente. En un mot, nous avions transformé le problème proposé en cet autre problème, qui ne lui est pas équivalent :

Trouver le lieu du point de la sécante représentée par l'équation (1), *dont l'abscisse est égale à la demi-somme des abscisses des points d'intersection de cette sécante et du cercle donné.*

La solution $x - d = 0$ convient à ce nouveau problème, mais c'est *une solution étrangère* pour le premier problème.

En second lieu, lorsque le point A est extérieur au cercle, toutes les sécantes ne le coupent pas en des points réels. Les racines de l'équation (2) sont réelles quand on suppose

$$a^2 \leqq \frac{R^2}{d^2 - R^2}$$

et imaginaires si

$$a^2 > \frac{R^2}{d^2 - R^2}.$$

Mais, quand ces racines sont imaginaires, leur demi-somme est réelle et, par suite, le point milieu de la corde BC est encore réel quand les points B et C sont imaginaires conjugués. On peut distinguer

sur le cercle trouvé les arcs qui correspondent à des cordes réelles de ceux qui correspondent à des cordes imaginaires. Remarquons d'abord que si A est intérieur au cercle, ou sur sa circonférence, tous les points du cercle décrit sur OA sont des milieux de cordes réelles. Dans le cas où le point A est extérieur, la seule partie du cercle décrit sur OA qui correspond aux cordes réelles est celle qui est à l'intérieur du cercle donné.

On aurait pu résoudre le problème proposé d'une autre manière, en remarquant que, le milieu de la corde BC étant sur le diamètre perpendiculaire à cette corde, le point M est à l'intersection de la droite définie par l'équation (1) et de la droite représentée par l'équation

$$ay + x = 0. \tag{4}$$

En éliminant a entre les équations (1) et (4), on obtient immédiatement l'équation du lieu

$$y^2 + x(x - d) = 0.$$

Ici encore nous avons transformé le problème en celui-ci, qui est indépendant du cercle donné :

Trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point O *sur les droites menées par le point* A.

Quand le point A est intérieur au cercle donné, les deux problèmes sont absolument équivalents; mais si le point A est extérieur à ce cercle, et que l'on ne considère que les cordes réelles, le point d'intersection d'une sécante passant par A avec la perpendiculaire abaissée du point O ne convient au premier problème que si la sécante coupe le cercle en des points réels.

Remarquons enfin que, les sécantes considérées passant toutes par A, le lieu trouvé passe aussi par ce point, qui d'ailleurs n'est parasite que s'il est extérieur au cercle donné.

257. Problème. — *Étant donné un angle* xOy, *on mène par un point fixe des sécantes coupant les côtés de l'angle aux points* P, Q *que l'on joint à deux points fixes* B, C *pris sur les côtés; trouver le lieu des points d'intersection des droites* BQ, PC.

Prenons (*fig.* 71) les deux côtés de l'angle donné pour axes et soient α, β les coordonnées du point A. Si l'on désigne par b et p les abscisses des points B et P et par c, q les ordonnées des points C, Q, on voit que le point M est le point de rencontre des droites définies par les équations

Fig. 71.

$$(1) \qquad \frac{x}{p} + \frac{y}{c} - 1 = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{x}{b} + \frac{y}{q} - 1 = 0.$$

Mais, la droite PQ passant par le point A, les deux paramètres p, q sont liés par la relation

$$(3) \qquad \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} - 1 = 0.$$

L'équation du lieu de M s'obtiendra donc en éliminant p et q entre les équations (1), (2) et (3). En portant dans l'équation (3) les valeurs de $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$ tirées des deux premières, on obtient

$$\beta\frac{x^2}{b} + \alpha\frac{y^2}{c} + xy - (\beta x + \alpha y) = 0.$$

Le lieu est donc une courbe du second degré qui se décompose en deux droites si le discriminant du premier membre est nul. La condition pour qu'il en soit ainsi, savoir

$$\beta\frac{\alpha^2}{b} + \alpha\frac{\beta^2}{c} - \alpha\beta = 0,$$

exprime que $\beta x + \alpha y$ divise $\beta\frac{x^2}{b} + \alpha\frac{y^2}{c} + xy$.

Si l'on suppose $\alpha\beta \neq 0$, cette condition se réduit à

$$\frac{\alpha}{b} + \frac{\beta}{c} - 1 = 0.$$

Donc, si le point A est sur la droite BC, l'équation du lieu peut s'écrire

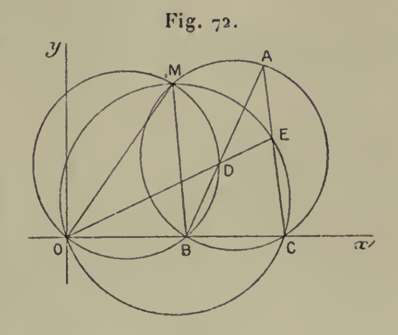
$$(\beta x + \alpha y)\left(\frac{x}{b} + \frac{y}{c} - 1\right) = 0.$$

Dans ce cas, le lieu se compose de la droite BC elle-même et de la polaire du point A par rapport à l'angle donné.

Lorsque la sécante est confondue avec BC, les droites PC et BQ sont aussi confondues avec BC, et le point M est un point quelconque de la droite BC qui devait ainsi faire partie du lieu.

258. Problème. — *Par un point* O (*fig.* 72) *pris sur l'un des côtés d'un triangle* ABC, *on mène une sécante variable, coupant les côtés* AB *et* AC *en* D *et* E. *On demande le lieu des points de rencontre des cercles circonscrits aux triangles* OBD, OCE.

Fig. 72.



Prenons pour axes des x le côté BC et pour axe des y la perpendiculaire à ce côté menée par le point O. Soient β et γ les coefficients angulaires des droites AB, AC et b, c les abscisses des sommets B, C. Si M est un point du cercle circonscrit au triangle OBD, l'angle de BM avec OM est égal à l'angle de BD avec OD; par suite, l'équation de ce cercle est

$$\frac{\frac{y}{x-b}-\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x(x-b)}}=\frac{\beta-m}{1+m\beta},$$

m désignant le coefficient angulaire de la sécante OD. En développant l'équation précédente, on obtient

$$(1) \qquad m(x^2+y^2-bx+b\beta y)+b\beta x+by-\beta(x^2+y^2)=0;$$

de même, l'équation du cercle circonscrit au triangle OCE sera

$$(2) \qquad m(x^2+y^2-cx+c\gamma y)+c\gamma x+cy-\gamma(x^2+y^2)=0.$$

On aura l'équation du lieu en éliminant le paramètre m. On trouve

$$(x^2+y^2)\left[x^2+y^2-(b+c)x+(c-b)\frac{1+\beta\gamma}{\beta-\gamma}y+bc\right]=0.$$

Le second facteur égalé à zéro représente un cercle; on vérifie facilement que c'est le cercle circonscrit au triangle ABC, ce que l'on peut démontrer *a priori* par des considérations géométriques élémentaires.

Le second facteur donne les droites isotropes menées par l'origine. On se rend compte facilement de ce résultat. En effet, si l'on pose, par exemple,

$y = ix$, l'équation (1) devient

$$(m - i)(\beta + i) = 0,$$

et l'équation (2)

$$(m - i)(\gamma + i) = 0.$$

Comme β et γ sont supposés réels, on en conclut que $m = i$; or, si l'on suppose $m = i$, l'équation (1) se met sous la forme

$$(i - \beta)[x^2 + y^2 - b(x + iy)] = 0,$$

ou, en supprimant le facteur $i - \beta$ qui n'est pas nul,

$$(x + iy)(x - iy - b) = 0,$$

le cercle dégénère en deux droites, dont l'une $x + iy = 0$ ou $y - ix = 0$ est la sécante isotrope menée par le point O, et la seconde, une droite isotrope menée par B et ayant pour coefficient $-i$. D'ailleurs, si l'on veut faire passer un cercle par le point O et par le point de rencontre d'une sécante isotrope issue de l'origine avec la droite AB, cette droite isotrope aura encore avec le cercle un point commun à l'infini, le point I ou le point J; par conséquent, cette droite, rencontrant le cercle cherché en trois points, ce cercle se décomposera nécessairement en deux droites isotropes, l'une de ces droites étant la sécante et l'autre la droite isotrope de direction conjuguée à la première et menée par le point B. De même, l'équation (2) prendra la forme

$$(x + iy)(x - iy - c) = 0.$$

La droite $x + iy = 0$ fait donc partie de l'intersection de ces cercles.

Remarque. — On peut faire l'élimination de m de la manière suivante. En posant $\beta = \operatorname{tang} B$, $\gamma = \operatorname{tang} C$, $m = \operatorname{tang} M$, on a

$$\frac{\dfrac{\beta - m}{1 + m\beta} - \dfrac{\gamma - m}{1 + m\gamma}}{1 + \dfrac{(\beta - m)(\gamma - m)}{(1 + m\beta)(1 + m\gamma)}} = \operatorname{tang}[B - M - (C - M)] = \operatorname{tang}(B - C) = \frac{\beta - \gamma}{1 + \beta\gamma};$$

donc

$$\frac{\dfrac{by}{x^2 + y^2 - bx} - \dfrac{cy}{x^2 + y^2 - cx}}{1 + \dfrac{bcy^2}{(x^2 + y^2 - bx)(x^2 + y^2 - cx)}} = \frac{\beta - \gamma}{1 + \beta\gamma},$$

ou, en simplifiant,

$$\frac{(b - c)(x^2 + y^2)y}{(x^2 + y^2)^2 - (b + c)x(x^2 + y^2) + bc(x^2 + y^2)} = \frac{\beta - \gamma}{1 + \beta\gamma}$$

et, sous forme entière,

$$(x^2+y^2)\left[x^2+y^2-(b+c)x+(c-b)\frac{1+\beta\gamma}{\beta-\gamma}y+bc\right]=0.$$

259. Problème. — *Une corde variable* PQ *d'un cercle* (*fig.* 73) *est vue d'un point fixe* A *pris dans le plan du cercle, sous un angle droit. Trouver le lieu du pôle de* PQ *par rapport au cercle.*

Fig. 73.

Prenons pour axe des x le diamètre qui passe par le point A, le diamètre perpendiculaire au premier étant pris pour axe des y. Soit a l'abscisse du point A et soient x_0, y_0 les coordonnées du point M, pôle d'une corde PQ répondant à la question.

Le cercle donné ayant pour équation

$$x^2+y^2-R^2=0,$$

la polaire de M est définie par l'équation $xx_0+yy_0-R^2=0$.

Il reste à exprimer que l'angle BAQ est droit. Pour cela, nous allons former l'équation du faisceau des droites AP, AQ, ou, plus exactement, celle du faisceau des parallèles à AP et AQ menées par le centre du cercle. Soient α, β les paramètres directeurs d'une droite passant par le point A; les coordonnées d'un point de cette droite sont $x=a+\alpha\rho$, $y=\beta\rho$; exprimons que cette droite passe par l'un des points communs au cercle et à la droite PQ; il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que les équations en ρ, $(a+\alpha\rho)^2+\beta^2\rho^2-R^2=0$, $x_0(a+\alpha\rho)+\beta y_0\rho-R^2=0$ aient une racine commune. L'élimination de ρ entre ces deux équations donne

$$\begin{aligned}&(\alpha^2+\beta^2)(ax_0-R^2)^2\\&\quad-2a\alpha(ax_0-R^2)(\alpha x_0+\beta y_0)+(a^2-R^2)(\alpha x_0+\beta y_0)^2=0.\end{aligned}$$

Si l'on regarde α et β comme des coordonnées courantes, cette équation représente le faisceau des parallèles à AP et AQ menées par l'origine; pour que AP et AQ soient rectangulaires, il faut et il suffit que la somme des coefficients de α^2 et β^2 soit nulle, c'est-à-dire

$$-2R^2(ax_0-R^2)+(a^2-R^2)(\alpha^2x_0+\beta^2y_0)=0.$$

On a ainsi trouvé l'équation du lieu, qui est, en remplaçant x_0, y_0 par des coordonnées courantes,

$$(a^2-R^2)(x^2+y^2)-2aR^2x+2R^4=0.$$

Ce lieu est un cercle.

Remarque. — Nous avons procédé dans cet exemple autrement que dans

les exemples précédents; la marche régulière eût été celle-ci : Mener par le point A deux droites rectangulaires définies par les équations

$$y - m(x - a) = 0, \qquad my + x - a = 0.$$

Chacune de ces droites coupe le cercle en deux points, ce qui donne quatre cordes correspondant à chaque valeur de m. Les coordonnées de l'un des points d'intersection de la première sécante, par exemple, avec le cercle, étant calculées, puis de même celles de l'un des points d'intersection du cercle et de la seconde sécante; on pourra former l'équation de la droite joignant ces deux points; cette équation sera irrationnelle, elle contiendra deux radicaux affectés chacun d'un double signe. Cela fait, en identifiant l'équation ainsi obtenue avec celle de la polaire d'un point (x_0, y_0), on obtiendra deux équations entre m, x_0, y_0 et il restera à éliminer m entre ces deux équations. On voit combien il est souvent utile de chercher une méthode particulière au problème proposé pour en obtenir simplement la solution.

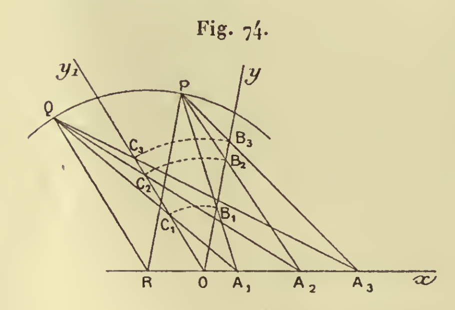
260. Voici un exemple d'artifice dispensant de tout calcul pour obtenir un lieu géométrique.

Étant donnés (*fig.* 74) *un angle* xOy *et un point* P *par lequel on mène des sécantes* PA_1B_1, PA_2B_2, PA_3B_3, ... *rencontrant les côtés de l'angle aux points* A_1, A_2, A_3, ... *et* B_1, B_2, B_3, ...; *on prend sur une droite* Oy_1 *des points* C_1, C_2, C_3, ... *tels que*

$$OC_1 = OB_1, \quad OC_2 = OB_2, \quad \ldots.$$

Prouver que les droites A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3, ... *sont concourantes et trouver le lieu de leur point de concours quand on suppose que* Oy_1 *tourne autour du point* O.

Fig. 74.



Posons $OA_n = a_n$, $OB = b_n = OC_n$. Si l'on prend pour axes les côtés de l'angle donné, les droites issues de P ont pour équations

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} - 1 = 0, \qquad \frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} - 1 = 0, \qquad \frac{x}{a_3} + \frac{y}{b_3} - 1 = 0, \qquad \ldots.$$

Ces droites se coupent en un point P dont les coordonnées sont α, β. Si nous prenons pour axes les droites Ox et Oy_1 les mêmes équations représentent les droites A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3, ... Donc ces droites se coupent au point (α, β).

Pour construire le point qui a pour coordonnées α, β dans le nouveau système, menons PR parallèle à Oy et RQ parallèle à Oy_1 et enfin prenons

$\overline{RQ} = \overline{RP}$; le point Q est le point cherché. Le point R étant fixe et la longueur RQ invariable, le lieu du point Q est le cercle décrit de R comme centre avec RP pour rayon.

261. La principale difficulté dans la résolution des problèmes de Géométrie analytique réside le plus souvent dans l'*élimination* des paramètres. Voici un exemple d'élimination ingénieuse, que nous empruntons à la *Nouvelle Correspondance* (t. I, p. 117) :

Trouver le lieu décrit par le point de contact mutuel de deux cercles variables tangents à deux cercles fixes.

Soient R, R' les rayons des cercles donnés, d la distance de leurs centres O, O', l'axe des x étant la droite OO' et l'axe des y la perpendiculaire à OO' menée par le point O. Nommons α, β les coordonnées du centre du cercle variable C, et ρ son rayon. Soient α', β', ρ' les quantités analogues relatives au cercle C', enfin soient x, y les coordonnées du point de contact M de C et C'. Nous aurons, en supposant les cercles deux à deux extérieurs l'un à l'autre,

(1) $$\alpha^2 + \beta^2 = (R + \rho)^2,$$

(2) $$(d - \alpha)^2 + \beta^2 = (R' + \rho)^2,$$

(3) $$\alpha'^2 + \beta'^2 = (R + \rho')^2,$$

(4) $$(d - \alpha')^2 + \beta'^2 = (R' + \rho')^2,$$

(5) $$(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 = (\rho + \rho')^2,$$

(6) $$\frac{x - \alpha}{\alpha' - x} = \frac{\rho}{\rho'},$$

(7) $$\frac{y - \beta}{\beta' - y} = \frac{\rho}{\rho'}.$$

Il s'agit d'éliminer α, β, α', β', ρ, ρ' entre ces équations.

Posons

$$x - \alpha = \rho\cos\varphi, \qquad y - \beta = \rho\sin\varphi, \qquad \alpha' - x = \rho'\cos\varphi, \qquad \beta' - y = \rho'\sin\varphi,$$

les équations (5), (6), (7) seront vérifiées; quant aux autres équations, elles deviennent par ces substitutions

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 - 2\rho(x\cos\varphi + y\sin\varphi) = R^2 + 2R\rho, \\ d^2 - 2d(x - \rho\cos\varphi) = (R' - R)(R' + R + 2\rho), \\ x^2 + y^2 + 2\rho'(x\cos\varphi + y\sin\varphi) = R^2 + 2R\rho', \\ d^2 - 2d(x + \rho'\cos\varphi) = (R' - R)(R' + R + 2\rho'). \end{gathered}$$

Entre ces quatre équations, combinées deux à deux, éliminons ρ et ρ'; on

trouve

$$(x^2+y^2-R^2)(R'-R-d\cos\varphi) = (d^2-2dx+R^2-R'^2)(R+x\cos\varphi+y\sin\varphi),$$
$$(x^2+y^2-R^2)(R'-R+d\cos\varphi) = (d^2-2dx+R^2-R'^2)(R-x\cos\varphi-y\sin\varphi).$$

Ajoutant membre à membre,

$$(R'-R)(x^2+y^2-R^2) = R(d^2-2dx+R^2-R'^2),$$

ou enfin

$$x^2+y^2-2\frac{Rd}{R-R'}x+RR'+\frac{R}{R-R'}d^2=0.$$

Le lieu est donc un cercle dont le centre est le centre de similitude directe S des deux cercles O, O'. On vérifie que le rayon est moyen proportionnel entre les distances de S aux deux cercles donnés.

Cette solution est due à M. E. Catalan.

Remarque. — Le choix des axes joue naturellement un grand rôle dans la résolution des problèmes. On peut arriver à la solution du problème précédent en prenant pour origine un centre de similitude des deux cercles, l'axe des x étant la ligne des centres et les axes étant rectangulaires.

Les cercles donnés ont pour équations

$$(x-a)^2+y^2=R^2, \qquad (x-a')^2+y^2=R'^2,$$

avec les conditions $a'=ka$, $R'=kR$.

Soient α, β les coordonnées du centre et ρ le rayon d'un cercle C tangent aux deux premiers; α', β', ρ' les quantités analogues relatives à un cercle C', tangent aux deux premiers cercles et au cercle C.

Nous avons

$$(1) \qquad (\alpha-a)^2+\beta^2=(R+\rho)^2,$$
$$(2) \qquad (\alpha-a')^2+\beta^2=(R'+\rho)^2,$$
$$(3) \qquad (\alpha'-a)^2+\beta'^2=(R+\rho')^2,$$
$$(4) \qquad (\alpha'-a')^2+\beta'^2=(R'+\rho')^2.$$

Enfin, si x, y sont les coordonnées du point de contact des cercles C, C',

$$(5) \qquad x=\frac{\alpha\rho'+\alpha'\rho}{\rho+\rho'},$$

$$(6) \qquad y=\frac{\beta\rho'+\beta'\rho}{\rho+\rho'},$$

les contacts étant supposés extérieurs.

Les équations (1) et (2) développées donnent

$$\alpha^2+\beta^2-\rho^2=2a\alpha+R^2+2R\rho-a^2,$$
$$\alpha^2+\beta^2-\rho^2=2a'\alpha+R'^2+2R'\rho-a'^2,$$

d'où l'on tire, en ajoutant membre à membre, après avoir multiplié par k et -1,

$$(\alpha^2+\beta^2-\rho^2)(k-1) = k\mathrm{R}^2 - k^2\mathrm{R}^2 + k^2a^2 - ka^2 = k(k-1)(a^2-\mathrm{R}^2),$$

d'où

$$\alpha^2+\beta^2-\rho^2 = k(a^2-\mathrm{R}^2).$$

En traitant de la même façon les équations (3) et (4), on trouvera

$$\alpha'^2+\beta'^2-\rho'^2 = k(a^2-\mathrm{R}^2).$$

Les équations des cercles C, C′ sont donc de la forme

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+k(a^2-\mathrm{R}^2)=0,$$
$$x^2+y^2-2\alpha' x-2\beta' y+k(a^2-\mathrm{R}^2)=0.$$

Mais les coordonnées x, y du point de contact vérifiant ces deux équations, on a aussi

$$(x^2+y^2)(\rho+\rho')-2x(\alpha\rho'+\alpha'\rho)-2y(\beta\rho'+\beta'\rho)+k(a^2-k^2)(\rho+\rho')=0,$$

ou, en vertu des équations (5) et (6),

$$x^2+y^2-k(a^2-\mathrm{R}^2)=0.$$

Le lieu cherché est donc un cercle ayant pour centre le centre de similitude directe des deux cercles fixes.

L'axe radical des cercles variables C, C′ a pour équation

$$(\alpha'-\alpha)x+(\beta'-\beta)y=0;$$

il passe par l'origine. Ces résultats sont évidents géométriquement.

262. Il peut arriver, quand on cherche à éliminer un paramètre entre deux équations, que l'on parvienne à une équation indépendante du paramètre et qui soit une conséquence des deux équations proposées; il importe de ne pas oublier qu'une équation ainsi obtenue n'est pas nécessairement la résultante des équations proposées.

Voici un exemple. Il s'agit d'éliminer m entre les deux équations

(1) $$y+mx+(m\alpha-\beta)\frac{1-m^2}{1+m^2}=0,$$

(2) $$my-x+(\alpha+m\beta)\frac{1-m^2}{1+m^2}=0.$$

Ces équations se présentent dans un problème donné aux examens de l'École Polytechnique (année 1887). Posons $m=\tan\varphi$; les équations deviennent

(3) $$x\sin\varphi+y\cos\varphi=\cos2\varphi(\beta\cos\varphi-\alpha\sin\varphi),$$

(4) $$x\cos\varphi-y\sin\varphi=\cos2\varphi(\beta\sin\varphi+\alpha\cos\varphi).$$

Faisons la somme des carrés

$$(5) \qquad x^2+y^2=(\alpha^2+\beta^2)\cos^2 2\varphi.$$

Les équations (3) et (4) donnent

$$(6) \qquad x=(\beta\sin 2\varphi+\alpha\cos 2\varphi)\cos 2\varphi,$$

$$(7) \qquad y=(\beta\cos 2\varphi-\alpha\sin 2\varphi)\cos 2\varphi;$$

on en tire

$$\frac{y}{x}=\frac{\beta\cos 2\varphi-\alpha\sin 2\varphi}{\alpha\cos 2\varphi+\beta\sin 2\varphi}$$

ou

$$(8) \qquad \frac{\cos 2\varphi}{\alpha x+\beta y}=\frac{\sin 2\varphi}{\beta x-\alpha y}=\frac{1}{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Tirant de cette équation $\cos 2\varphi$ et portant sa valeur dans l'équation (5), on trouve

$$(x^2+y^2)^2=(\alpha x+\beta y)^2,$$

équation qui représente *deux cercles*. Mais la méthode que l'on vient de suivre n'est pas correcte. L'équation (5) est une conséquence des équations (3) et (4), mais si l'on avait remplacé ces équations par les suivantes

$$(3)' \qquad x\sin\varphi+y\cos\varphi=-(\beta\cos\varphi-\alpha\sin\varphi)\cos 2\varphi,$$

$$(4)' \qquad x\cos\varphi-y\sin\varphi=-(\beta\sin\varphi+\alpha\cos\varphi)\cos 2\varphi,$$

on aurait obtenu encore les équations (5) et (8), et par suite on a introduit des solutions étrangères. Or, en se servant des équations (6) et (7), qui sont équivalentes aux équations (3) et (4), on obtient

$$\beta y+\alpha x=(\alpha^2+\beta^2)\cos^2 2\varphi=x^2+y^2;$$

le lieu est donc *le cercle* représenté par l'équation

$$x^2+y^2-\alpha x-\beta y=0.$$

263. Soit encore à éliminer l'angle φ entre les équations

$$P\cos\varphi+Q\sin\varphi+R=0, \qquad P'\cos\varphi+Q'\sin\varphi+R'=0.$$

Il y a deux cas à distinguer : 1° $PQ'-QP'\neq 0$. Dans ce cas, en résolvant par rapport à $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ et portant dans la relation fondamentale

$$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1,$$

on obtient l'équation du lieu cherché sous la forme

$$(QR'-RQ')^2+(RP'-PR')^2=(PQ'-QP')^2.$$

2° $PQ'-QP'=0$. Pour que les équations proposées soient compatibles, il

faut qu'elles se réduisent à une seule; donc on doit avoir

$$PR' - RP' = 0 \quad \text{et} \quad QR' - RQ' = 0.$$

Ces deux équations se réduisent à une seule, puisque, si l'on regarde R et R' comme des inconnues, le déterminant des coefficients de ces inconnues dans les deux dernières équations est nul. Le lieu sera, dans ce cas, représenté par l'une ou l'autre des équations précédentes; mais, en général, *les points réels* du lieu n'occuperont qu'une partie de la courbe représentée par l'équation $PR' - RP' = 0$; en effet, pour que la première des équations données détermine un angle φ, il faut, comme on sait, que l'on ait

$$R^2 < P^2 + Q^2.$$

On ne devra donc conserver que les points de la courbe obtenue, dont les coordonnées vérifient cette inégalité.

Considérons, par exemple, les droites représentées par les équations

$$(x-a)\cos\varphi + y\sin\varphi - R = 0, \qquad y\cos\varphi - (x+a)\sin\varphi - R' = 0.$$

Ce sont deux droites rectangulaires tangentes à deux cercles fixes de rayons R, R'.

Le lieu du point commun à ces tangentes a pour équation

$$(x^2+y^2-a^2)^2 = (R'x - Ry - R'a)^2 + (Rx + R'y + Ra)^2.$$

Remarquons que les droites représentées par

$$R'x - Ry - R'a = 0, \qquad Rx + R'y + Ra = 0$$

sont rectangulaires; le second membre est donc égal à

$$(R^2 + R'^2)[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2],$$

x_0, y_0 étant les coordonnées du point commun à ces deux droites; d'ailleurs $x_0^2 + y_0^2 = a^2$. L'équation du lieu est donc

$$(x^2+y^2-a^2)^2 = (R^2+R'^2)[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]:$$

elle représente une courbe du quatrième degré que nous étudierons plus tard, et dont la définition géométrique est facile, car si l'on désigne par P le point (x_0, y_0) et par M un point du lieu, la droite PM coupe le cercle décrit sur la ligne des centres des deux cercles donnés comme diamètre, en un second point Q, et l'équation du lieu exprime que

$$\overline{PM}^2 \cdot \overline{QM}^2 = (R^2 + R'^2)\,\overline{PM}^2,$$

d'où

$$QM = \sqrt{R^2 + R'^2}.$$

264. Enfin, considérons les droites représentées par les équations

$$Ax + By = A\cos\varphi + B\sin\varphi, \qquad A'x + B'y = A'\cos\varphi + B'\sin\varphi;$$

ces droites se coupent évidemment au point $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$; le lieu de leur point d'intersection est donc le cercle $x^2 + y^2 = 1$. Mais, si l'on suppose $AB' - BA' = 0$, les deux équations se réduisent à une seule qui représente, quand φ varie, une infinité de droites parallèles à une direction fixe. Cependant tous les points du plan ne conviennent pas à la question, car φ n'est réel que si $(Ax + By)^2 < A^2 + B^2$, ce qui exige que le point (x, y) soit compris entre les deux droites ayant pour équations

$$Ax + By - \sqrt{A^2 + B^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad Ax + By + \sqrt{A^2 + B^2} = 0.$$

On voit d'ailleurs que, dans le dernier cas, le problème revient à celui-ci : trouver la condition pour que la droite ayant pour équation $Ax + By = h$ coupe en des points réels le cercle ayant pour équation $x^2 + y^2 = 1$.

EXERCICES.

1. Par un point commun à deux cercles donnés, on mène une sécante : lieu du milieu de la corde commune.

Plus généralement, lieu du point qui partage cette corde commune dans un rapport donné.

2. Une corde d'un cercle est vue d'un point fixe A, pris dans son plan, sous un angle droit. Lieu du milieu de cette corde et lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point A. Montrer directement que ces deux lieux sont identiques.

3. Dans un triangle ABC, A et B restent fixes et C se déplace de façon que $AC \pm BC = \text{const.}$ Lieu du point de rencontre des bissectrices des angles en C avec la perpendiculaire menée par B au côté BC.

4. Étant donné un triangle, trouver le lieu du point M, tel que si l'on mène par ce point des parallèles aux côtés du triangle, la somme des rectangles des segments déterminés par le point M et les côtés du triangle sur chacune de ces parallèles soit constante.

5. Dans un parallélogramme, on mène des cordes AB et CD parallèles aux côtés; lieu du point de concours des droites AD, BC ou AC, BD.

6. Par l'un des points communs à deux cercles, on mène une corde commune PQ sur laquelle on construit un triangle PQM semblable à un triangle donné. Lieu du point M.

7. Une corde AB comprise entre deux droites parallèles est vue d'un point fixe P sous un angle droit. Lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de P sur AB.

8. Étant donné un triangle ABC, on prend sur le côté BC des points D, E

tels que $\frac{\overline{DB}}{\overline{EC}} = k$, et l'on mène des droites DD′, EE′ parallèles à une direction fixe; D′ et C′ étant les points de rencontre avec AB et AC. Trouver le lieu du point de rencontre des droites BE′, CD′ quand les points D et E se déplacent, le rapport k demeurant constant.

9. Les données étant les mêmes que dans le problème précédent, trouver le lieu du point de concours des droites DE′, ED′.

10. Généraliser le problème 7 en remplaçant les deux parallèles par deux droites concourantes.

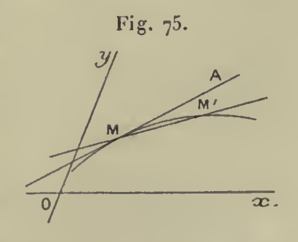
CHAPITRE VIII.

COURBES DU SECOND DEGRÉ.

Classification des courbes du second degré.

265. Avant de nous occuper de la classification des courbes du second degré, nous allons donner la définition et la détermination de la tangente en un point d'une courbe. Soit M un point appartenant à un arc de courbe (*fig.* 75) x et y étant les coordonnées du point M et $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ les coordonnées d'un second point M′ appartenant au même arc. Nous supposerons que l'ordonnée y soit une fonction bien déterminée de x, pourvue d'une dérivée y', pour toutes les valeurs de x auxquelles correspondent les points de l'arc considéré. Puisque y est supposé fonction continue de x, quand Δx tend vers zéro, il en est de même de Δy et, par suite, le point M′ s'approche indéfiniment de M, sans cesser d'appartenir à l'arc considéré; on dit, pour abréger, que M′ est un point infiniment voisin

Fig. 75.



de M. Le coefficient angulaire de MM', c'est-à-dire $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, a pour limite y'_x quand Δx tend vers zéro. Par conséquent, si l'on mène par le point M une droite MA ayant pour coefficient angulaire y', l'angle que la sécante MM' fait avec MA a pour limite zéro; on dit que MA est *la tangente en* M. Si, au point M, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ grandit indéfiniment, la droite MM' tend à devenir parallèle à Oy et, par suite, si, pour le point M, y' est infini, la tangente en ce point est parallèle à l'axe des y. En résumé, *le coefficient angulaire* de la tangente en un point M d'un arc de courbe est égal à la dérivée de l'ordonnée, prise par rapport à l'abscisse.

266. *Construction de la courbe représentée par l'équation à coefficients réels*

$$(1) \qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Supposons l'un des coefficients des carrés A ou C différent de zéro. Soit, par exemple, $C\neq 0$. L'équation ordonnée par rapport à y peut s'écrire

$$Cy^2+2(Bx+E)y+Ax^2+2Dx+F=0,$$

d'où l'on tire

$$y=-\frac{Bx+E}{C}\pm\frac{1}{C}\sqrt{(Bx+E)^2-C(Ax^2+2Dx+F)}.$$

Il s'agit de savoir entre quelles limites on doit faire varier x pour que l'ordonnée y soit réelle. Le trinome placé sous le radical a pour expression

$$T\equiv(B^2-AC)x^2+2(BE-CD)x+E^2-CF;$$

les coefficients de ce trinome sont des mineurs du discriminant Δ du polynome

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2,$$

et, en vertu d'une propriété bien connue des déterminants adjoints, on a l'identité, facile d'ailleurs à vérifier directement :

$$(BE-CD)^2-(B^2-AC)(E^2-CF)\equiv-C\Delta.$$

Le coefficient de x^2 est d'ailleurs égal à $-\delta$, puisque nous avons

posé $AC - B^2 = \delta$. Nous sommes ainsi amenés à distinguer plusieurs cas.

1° $\delta > 0$. Ce cas se subdivise en trois autres.

(a) $C\Delta < 0$. Les racines de l'équation $T = 0$ sont réelles et inégales ; désignons-les par x' et x'' et soit, pour fixer les idées, $x' < x''$. On peut poser

$$T = -\delta(x - x')(x - x'');$$

soit

$$Y = \frac{1}{C}\sqrt{-\delta(x - x')(x - x'')},$$

on aura

$$y = -\frac{Bx + E}{C} \pm |Y|.$$

Pour que y soit réel, il faut et il suffit que Y le soit ; par suite, x doit être compris entre x' et x''.

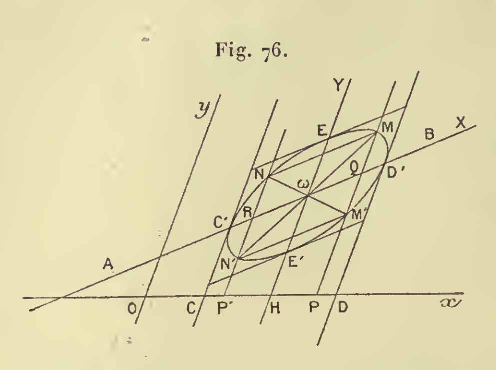
Remarquons maintenant que, si x croît de x' à $\frac{x' + x''}{2}$, le trinome T croît depuis zéro jusqu'à un maximum égal à $\frac{\delta(x'' - x')^2}{4}$; puis, quand x croît depuis $\frac{x' + x''}{2}$ jusqu'à x'', T décroît depuis son maximum jusqu'à zéro ; donc, dans les mêmes conditions $|Y|$ croît depuis zéro jusqu'à un maximum déterminé et décroît ensuite jusqu'à zéro. D'après cela, construisons la droite AB (*fig.* 76) ayant pour équation $y = -\frac{Bx + E}{C}$, et construisons les segments $\overline{OC} = x'$, $\overline{OD} = x''$, puis menons par leurs extrémités les parallèles à Oy, qui coupent la droite AB aux points C' et D'. Il résulte de ce qui précède que la courbe est entièrement comprise entre CC' et DD'. D'autre part, à chaque valeur de x comprise entre x' et x'', correspondent deux valeurs de y qu'on obtient en augmentant et diminuant l'ordonnée $-\frac{Bx + E}{C}$ de la droite AB d'une longueur égale à $|Y|$, ce qui donne, pour chaque valeur de x, deux points M, M' situés sur une parallèle à l'axe des y et tels que le milieu de la corde MM' se trouve sur la droite AB. On obtient ainsi une courbe fermée (*fig.* 76). La droite AB, qui est, comme on vient de le voir, le lieu des milieux des cordes MM' parallèles à l'axe des y, se nomme le *diamètre conjugué à l'axe des* y.

Faisons un changement de coordonnées et prenons pour axes la droite AB et la parallèle à l'axe des y menée par le milieu de $C'D'$;

Q étant le milieu de MM′, les coordonnées du point M, par exemple, seront $\overline{\omega Q} = X$, $\overline{QM} = Y$. Or, si l'on pose

$$x = \frac{x' + x''}{2} + \xi,$$

Fig. 76.



on peut remarquer qu'il y a entre le segment $\overline{\omega Q}$ et sa projection HP sur l'axe Ox, faite parallèlement à l'axe des y, un rapport constant k, de sorte que

$$x = \frac{x' + x''}{2} + kX.$$

Par cette substitution, on obtient

$$Y = \frac{1}{C}\sqrt{\delta(h^2 - k^2 X^2)},$$

en posant $x'' - x' = h$. L'équation de la courbe rapportée à ces nouveaux axes est donc

$$\frac{k^2}{h^2}X^2 + \frac{C^2}{\delta h^2}Y^2 = 1$$

ou

$$(2) \qquad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

en posant $a^2 = \frac{h^2}{k^2}$, $b^2 = \frac{\delta h^2}{C^2}$.

Sous cette forme très simple de l'équation (2), on reconnaît qu'à deux valeurs égales et de signes contraires de X, correspondent les mêmes valeurs de Y, ce qui prouve que les cordes telles que MN, parallèles à ωX, ont leur milieu sur ωY; de même que, comme nous le savons déjà, le milieu d'une corde MM′ parallèle à ωY est sur ωX. Par suite, chacune des droites ωX, ωY partage en deux parties égales les cordes qui sont parallèles à l'autre. Les quatre points M, M′, N, N′ qui correspondent à $X = \overline{\omega Q}$ et $X' = \overline{\omega R} = -\overline{\omega Q}$ sont les sommets d'un parallélogramme dont les diagonales se coupent au point ω situé sur AB. Les points de la courbe, tels que M, N′, sont donc deux à deux symétriques par rapport à ω. Ce point est un *centre*.

On peut remarquer encore que

$$Y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - X^2),$$

c'est-à-dire

$$\overline{QM}^2 = \frac{b^2}{a^2}\,\overline{C'Q}.\overline{QD'}.$$

Enfin, en remarquant que

$$YY'_x = -\frac{b^2}{a^2}X,$$

on reconnaît que les tangentes en C′ et D′ sont parallèles à l'axe des Y et que les tangentes en E et E′ sont parallèles à l'axe des X.

La courbe que nous avons tracée se nomme *ellipse*. Nous verrons plus loin qu'elle ne diffère pas de la courbe que nous avons désignée déjà par le même nom.

(*b*) $\Delta = 0$. Le trinome T est carré parfait, $x' = x''$ et, par suite,

$$y = -\frac{Bx + E}{C} \pm \frac{x - x'}{C}\sqrt{-\delta};$$

l'équation représente évidemment deux droites imaginaires conjuguées. C'est d'ailleurs ce que nous avons déjà établi.

Remarque. — Supposons les coefficients de l'équation (1) tous constants à l'exception de F; donnons à F des valeurs telles que $C\Delta$ soit négatif, δ étant toujours supposé positif; l'équation $f(x, y) = 0$ représentera une série d'ellipses; la droite AB et le point ω resteront invariables, toutes ces ellipses auront même centre; si Δ devient nul, l'ellipse dégénère en deux droites imaginaires conjuguées; elle n'a plus qu'un seul point réel qui est le point ω.

(*c*) $C\Delta > 0$. Les racines de l'équation $T = 0$ sont imaginaires et le coefficient de x^2 dans le trinome T est négatif; donc, quelle que soit la valeur réelle attribuée à x, ce trinome est négatif et, par suite, y est imaginaire; l'équation donnée ne représente plus rien de réel. On convient de dire qu'elle représente alors une ellipse imaginaire. Le point ω est encore réel et, en prenant ωX et ωY pour axes, on pourra mettre l'équation sous la forme

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + 1 = 0.$$

Il convient de remarquer que, si δ est positif, A et C sont nécessairement différents de zéro et ont le même signe.

2° $\delta < 0$.

Remarquons tout d'abord que, comme dans les cas précédents, la droite AB, ayant pour équation

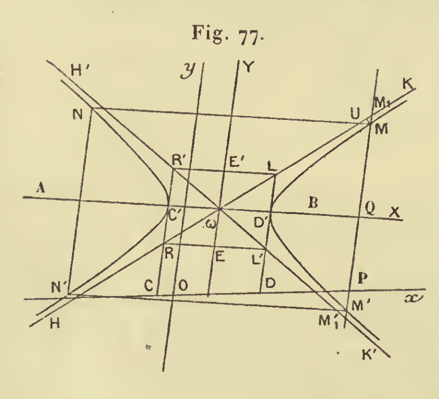
$$y = -\frac{Bx + E}{C},$$

est le *diamètre* des cordes parallèles à l'axe des y. Cela étant, nous avons encore trois cas à considérer :

(a) $C\Delta < 0$. Les racines x', x'' du trinome T sont réelles et inégales.

Supposons $x' < x''$; pour que y soit réel, il faut et il suffit que x soit compris entre $-\infty$ et x' ou entre x'' et $+\infty$. La courbe n'aura donc aucun point compris entre les droites CC′, DD′ parallèles à l'axe des y et ayant respectivement pour équations $x = x'$ et $x = x''$ (*fig.* 77). Lorsque x croît indéfiniment en valeur absolue, il en est de même de y et l'on en conclut que la courbe a des branches infinies. D'ailleurs, pour étudier ces branches avec plus de précision, posons

Fig. 77.



$$T = -\delta x^2 + 2Px + Q.$$

Ayant égard à l'identité

$$Q + \frac{P^2}{\delta} = \frac{P^2 + \delta Q}{\delta} = -\frac{C\Delta}{\delta},$$

on voit que

$$T = \left[x\sqrt{-\delta} + \frac{P}{\sqrt{-\delta}}\right]^2 - \frac{C\Delta}{\delta}.$$

Supposons que l'on donne à x des valeurs supérieures à x''; dans ce cas, en remarquant que l'inégalité $x > \frac{x' + x''}{2}$ ou $x > \frac{P}{\delta}$ est véri-

fiée, et que, par suite, on a

$$x\sqrt{-\delta}+\frac{P}{\sqrt{-\delta}}>0,$$

considérons la droite HK qui a pour équation

$$y_1=-\frac{Bx+E}{C}+\frac{1}{|C|}\left[x\sqrt{-\delta}+\frac{P}{\sqrt{-\delta}}\right],$$

y_1 désignant, pour éviter toute confusion, l'ordonnée d'un point de cette droite. Revenant à la courbe qu'il s'agit de construire, considérons la détermination de y donnée par la formule

$$y=-\frac{Bx+E}{C}+\frac{1}{|C|}\sqrt{-\delta x^2+2Px+Q}.$$

On tire des formules précédentes

$$y-y_1=\frac{1}{|C|}\left\{\sqrt{-\delta x^2+2Px+Q}-\left(x\sqrt{-\delta}+\frac{P}{\sqrt{-\delta}}\right)\right\}$$

ou

$$y-y_1=\frac{1}{|C|}\,\frac{-\dfrac{C\Delta}{\delta}}{\sqrt{-\delta x^2+2Px+Q}+x\sqrt{-\delta}+\dfrac{P}{\sqrt{-\delta}}}.$$

Quand x croît indéfiniment par valeurs positives, le dénominateur croît indéfiniment; donc $y-y_1$ tend vers zéro et a le signe de $\frac{-C\Delta}{\delta}$, c'est-à-dire le signe $-$.

On peut arriver encore à ce résultat en remarquant que

$$\sqrt{-\delta x^2+2Px+Q}=x\sqrt{-\delta}+\frac{P}{\sqrt{-\delta}}+\frac{1}{x}\left[\frac{-C\Delta}{2\sqrt{-\delta}}+\alpha\right],$$

α ayant pour limite zéro quand x grandit indéfiniment.

D'après cela, ayant construit le diamètre AB et la droite HK, dont l'ordonnée y_1 est supérieure à l'ordonnée de AB qui correspond à une même valeur de x, dès que l'on suppose $x>\frac{x'+x''}{2}$; donnons à x une valeur représentée par le segment $\overline{OP}$ et menons par l'extrémité P de ce segment une parallèle à l'axe des y. Cela fait, à partir du point Q où cette parallèle rencontre AB, nous portons un seg-

ment $\overline{QM}$ et un segment $\overline{QM_1}$ ayant respectivement pour valeurs :

$$\overline{QM} = \frac{1}{|C|}\sqrt{-\delta x^2 + 2Px + Q},$$

$$\overline{QM_1} = \frac{1}{|C|}\left[x\sqrt{-\delta} + \frac{P}{\sqrt{-\delta}}\right].$$

Il résulte de ce qui précède que le segment $\overline{MM_1}$ est positif et tend vers zéro quand x grandit indéfiniment par valeurs positives; donc, la distance MU du point M à la droite HK tend vers zéro. Pour cette raison, on dit que la droite HK est *asymptote* à la branche que décrit le point M.

On appelle, en effet, *asymptote d'une branche infinie de courbe* une droite telle que la distance d'un point M de la branche considérée à cette droite tende vers zéro quand le point M s'éloigne indéfiniment sur la courbe donnée.

On verrait de la même façon que la droite HK est asymptote, du côté des x négatifs, à la branche de courbe définie par l'équation

$$y = -\frac{Bx + E}{C} - \frac{1}{|C|}\sqrt{-\delta x^2 + 2Px + Q}.$$

Enfin la droite H′K′ représentée par l'équation

$$y = -\frac{Bx + E}{C} - \frac{1}{|C|}\left[x\sqrt{-\delta} + \frac{P}{\sqrt{-\delta}}\right],$$

et qui coupe HK au point ω de la droite AB qui a pour abscisse $\frac{P}{\delta}$ ou $\frac{x' + x''}{2}$ est asymptote aux deux autres branches infinies, ce qui est d'ailleurs évident en remarquant que, si l'on construit les points M′ et M'_1, tels que Q soit le milieu commun de MM′ et de $M_1M'_1$, le point M′ appartient à la courbe et M'_1 à la droite H′K′.

Si l'on prend pour axes la droite ωX, dirigée suivant ωB et ωY parallèle à $y'y$, et que l'on fasse les mêmes calculs que pour l'ellipse, on obtiendra l'équation de la courbe rapportée à ces nouveaux axes. En premier lieu, si nous posons $x = \frac{x' + x''}{2} + \xi$, nous obtiendrons, en remarquant que ξ est proportionnel à X,

$$Y^2 = \frac{-\delta}{C^2}(k^2X^2 - h^2),$$

ou

$$\frac{k^2}{h^2}X^2 - \frac{C^2}{-\delta h^2}Y^2 = 1,$$

et, en posant $\frac{h^2}{k^2} = a^2$, $-\frac{\delta h^2}{C^2} = b^2$,

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Dans ce système, les asymptotes ont pour équations

$$Y = \frac{b}{a}X \qquad \text{et} \qquad Y = -\frac{b}{a}X.$$

On voit que $a = \omega D'$. Les droites CC' et DD' rencontrent les asymptotes en des points L, L', R, R' qui sont les sommets d'un parallélogramme dont les côtés ont pour longueurs $2a$ et $2b$. Les asymptotes sont les diagonales de ce parallélogramme. Les axes ωX et ωY sont deux diamètres conjugués ; ω est le centre de la courbe. Cette courbe a reçu le nom d'*hyperbole*.

(b) $\Delta = 0$. Dans ce cas, $x' = x''$ et, par suite,

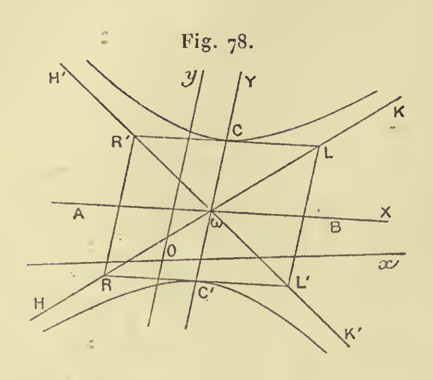
$$y = -\frac{Bx + E}{C} \pm \frac{\sqrt{-\delta}}{C}(x - x');$$

l'équation (1) représente alors deux droites réelles. Supposons que le coefficient F de $f(x, y)$ soit seul variable et conservons les hypothèses $\delta < 0$, $C\Delta < 0$. En donnant à F différentes valeurs, la courbe représentée par l'équation $f(x, y) = 0$ sera toujours une hyperbole ayant pour asymptotes les droites HK et H'K'. Soit F_1 la valeur qu'il faut attribuer à F pour que $\Delta = 0$; lorsque F devient égal à F_1, la courbe se réduit à ses deux asymptotes.

(c) $C\Delta > 0$. Les racines du trinome T sont alors imaginaires et, par suite, $|Y|$ est toujours réel ; si x varie de $-\infty$ à $+\infty$, le trinome T décroît de $+\infty$ à un minimum qu'il atteint quand $x = \frac{P}{\delta}$, puis croît ensuite jusqu'à $+\infty$. Il en résulte que la courbe représentée par l'équation $f(x, y) = 0$ a encore des branches infinies. Si l'on suppose que F varie seul et prenne des valeurs telles que $C\Delta$, d'abord négatif, devienne positif, on verra, par le même calcul que plus haut, que les droites HK et H'K' sont encore des asymptotes ; mais le

signe de $y - y_1$ ayant changé, les arcs infinis ne seront plus situés dans les mêmes angles formés par les asymptotes considérés plus haut, mais dans les deux autres. On obtient ainsi la courbe représentée par la *fig.* 78.

Fig. 78.



En faisant les mêmes calculs que plus haut et en prenant pour axes la droite AB et la parallèle à l'axe des y menée par ω, l'équation de la courbe aura, dans ce cas, la forme suivante :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = -1.$$

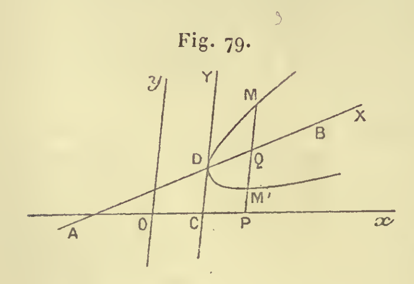
b^2 est précisément le minimum de Y^2; les asymptotes sont toujours les diagonales du parallélogramme R, L, R', L' construit comme plus haut. La courbe a donc la même forme, sinon la même position par rapport aux axes, que dans le cas précédent; on lui donne encore le nom d'*hyperbole*.

3° $\delta = 0$. Le trinome T se réduit à un binome du premier degré

$$T = 2Px + Q = 2P(x - a)$$

en posant $a = -\frac{Q}{2P}$. D'ailleurs, dans ce cas, $C\Delta = -P^2$. Soit d'abord $P > 0$. Alors, pour que y soit réel, il faut supposer $x \geqq a$ et, par suite, si l'on construit la droite CD ayant pour équation $x = a$, la courbe n'aura de points que d'un côté de cette droite, du côté des x positifs. Quand x croît de a à $+\infty$, $|Y|$ croît de 0 à $+\infty$. La droite AB est toujours le diamètre conjugué à l'axe des y. La courbe a donc deux arcs infinis partant de D situés sur AB et s'étendant du côté des x positifs et de part et d'autre de AB; on obtient ainsi la courbe représentée par la *fig.* 79.

Fig. 79.



En D, la tangente est parallèle à l'axe des y.

En prenant pour axes DX, dirigé suivant AB et DY parallèle

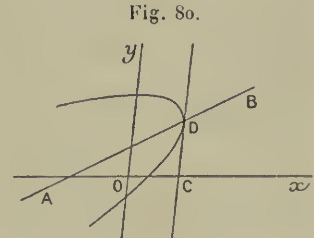
à $y'y$, l'équation sera de la forme

$$Y^2 = 2PX,$$

comme on s'en assure aisément.

Si l'on suppose $P < o$, on devra prendre $x \leqq a$; on aura une courbe ayant encore la même forme, mais tournée en sens contraire (*fig.* 80).

Fig. 80.



Enfin si $P = o$, c'est-à-dire si $\Delta = o$, l'équation se réduit à

$$y = -\frac{Bx+E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{E^2 - CF};$$

elle représente deux droites parallèles à AB et équidistantes de AB; réelles ou imaginaires ou confondues avec AB, suivant que l'on suppose $E^2 - CF > o$, $< o$ ou $= o$.

Remarque. — En supposant $C \neq o$, on voit que l'équation donnée peut se mettre sous la forme

$$(Cy + Bx + E)^2 + \delta\left(x - \frac{P}{\delta}\right)^2 + \frac{C\Delta}{\delta} = o,$$

si $\delta \neq o$; et quand $\delta = o$

$$(Cy + Bx + E)^2 - (2Px + Q) = o.$$

Cas où $C = o$.

Si l'on suppose $C = o$, on peut, si A est différent de zéro, discuter l'équation du second degré en x, en prenant y comme variable indépendante. Il convient seulement de remarquer que δ se réduit à $-B^2$ et, par conséquent, on ne trouvera plus d'*ellipse*, mais seulement une *hyperbole* ou une *parabole*. Mais, si $A = o$ et $C = o$, la méthode ne convient plus. Nous allons montrer que l'on obtient encore des courbes du même genre que celles que nous avons obtenues dans les cas précédents.

1° $B \neq o$. Remarquons que l'équation (1) est alors du premier degré en y et peut être mise sous la forme

$$y = -\frac{Ax^2 + 2Dx + F}{2(Bx + E)}.$$

Effectuons la division; on obtient

$$-(Ax^2+2Dx+F)=2(Bx+E)(mx+h)+R,$$

R désignant le reste. Or,

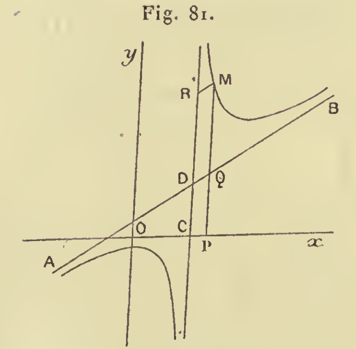
$$R=-\left(A\frac{E^2}{B^2}-2\frac{DE}{B}+F\right)=\frac{\Delta}{B^2},$$

et par suite, en posant $a=-\frac{E}{B}$, $Y=\frac{\Delta}{2B^3(x-a)}$,

$$y=mx+h+Y.$$

Construisons (*fig.* 81) les droites AB et CD représentées par les équations

Fig. 81.



$$y=mx+h \quad \text{et} \quad x=a,$$

et supposons, pour fixer les idées, $\frac{\Delta}{B^3}>0$. A chaque valeur de x correspond une valeur de y qui est égale à l'ordonnée de AB augmentée de Y; donc les points qui correspondent à $x>a$ seront situés par rapport à AB du côté des y positifs, et ceux qui correspondent à $x<a$ seront du côté des y négatifs. Remarquons enfin que, si x croît de $-\infty$ à a, Y décroît de 0 à $-\infty$; si x croît de a à $+\infty$, Y décroît de $+\infty$ à 0; on obtient donc deux branches infinies asymptotes à AB et à CD. En effet, soit $x=\overline{OP}$, de sorte que $y=\overline{PM}=\overline{PQ}+\overline{QM}$ soit l'ordonnée correspondante et supposons $\overline{OP}>\overline{OC}$. Si l'on suppose que $\overline{CP}$ tende vers zéro, $\overline{QM}$ grandit indéfiniment. La parallèle à AB menée par M rencontre CD en un point R; MR tendant vers zéro, le point M s'approche indéfiniment de la droite $\overline{CD}$. Si, au contraire, $\overline{OP}$ grandit indéfiniment, QM tend vers zéro et, par suite, M s'approche indéfiniment de AB. On fera un raisonnement analogue pour les points situés de l'autre côté de la droite CD.

La courbe obtenue a donc la même forme que celle que nous avons

trouvée en supposant $\delta < 0$, $C \neq 0$; c'est encore une *hyperbole*.

Si $\Delta = 0$, le reste R étant nul, on a identiquement

$$-(Ax^2 + 2Dx + F) = 2(Bx + E)(mx + h),$$

et, par conséquent, l'équation proposée est de la forme

$$(2Bx + E)(y - mx - h) = 0.$$

En supposant que F varie seul de façon que Δ devienne nul, on voit que la courbe se réduira à ses deux asymptotes.

Lorsque $A = 0$, on a $h = 0$ et $m = -\frac{D}{B}$; les asymptotes sont parallèles aux deux axes de coordonnées et représentées par les équations

$$Bx + E = 0, \qquad By + D = 0.$$

2° $C = 0$, $B = 0$.

L'équation se réduit alors à

$$Ax^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Dans ce cas $\Delta = -AE^2$. Supposons $A \neq 0$, $\Delta \neq 0$. L'équation précédente peut s'écrire

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + 2E\left(y + \frac{AF - D^2}{2AE}\right) = 0,$$

et, en posant

$$x + \frac{D}{A} = X, \qquad y + \frac{AF - D^2}{2AE} = Y,$$

on obtient

$$AX^2 + 2EY = 0.$$

C'est la forme trouvée dans l'hypothèse $\delta = 0$, $C \neq 0$. La courbe est donc encore une parabole.

Si l'on suppose $\Delta = 0$, l'équation se réduit à

$$Ax^2 + 2Dx + F = 0,$$

et représente deux droites parallèles à l'axe des y.

En résumé, nous pouvons faire le Tableau suivant :

$\delta > 0$.	$-C\Delta > 0$,	ellipse réelle.			
	$\Delta = 0$,	deux droites imaginaires conjuguées, concourant en un point réel.			
	$-C\Delta < 0$,	ellipse imaginaire.			
$\delta < 0$.	$\Delta \neq 0$,	hyperbole.			
	$\Delta = 0$,	deux droites réelles concourantes.			
$\delta = 0$.	$\Delta \neq 0$,	parabole.			
	$\Delta = 0$,	deux droites parallèles,	$E^2 - CF > 0$	$D^2 - AF > 0$,	réelles et distinctes.
			$E^2 - CF = 0$ ou	$D^2 - AF = 0$,	confondues.
			$E^2 - CF < 0$	$D^2 - AF < 0$,	imaginaires conjuguées.

267. *Remarques.* — Nous avons trouvé que l'hyperbole a deux asymptotes; nous verrons plus loin qu'elle n'en a pas d'autres.

La parabole n'a pas d'asymptotes. En effet, nous avons ramené l'équation de la parabole à la forme $Y^2 - 2pX = 0$.

Une parallèle à l'axe des X, ayant pour équation $Y = a$, coupe la courbe en un seul point à distance finie et la distance d'un point de la courbe à cette droite grandit indéfiniment quand M s'éloigne à l'infini.

Soit maintenant $X = aY + b$ l'équation d'une droite non parallèle à l'axe des X. La distance d'un point X, Y de la parabole à cette droite a pour expression

$$\frac{\left(\frac{Y^2}{2p} - aY - b\right)\sin\theta}{\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\theta}};$$

elle grandit indéfiniment avec Y, quel que soit a. Donc la parabole n'a pas d'asymptote.

268. *Équation du faisceau des asymptotes d'une hyperbole.* — Si l'équation $f(x, y) = 0$ représente une hyperbole, nous avons vu que, en faisant varier le terme constant seul, les asymptotes ne changent pas et, de plus, si l'on donne à F une valeur F_1 telle que $\Delta = 0$, l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F_1 = 0$$

sera précisément l'équation des deux asymptotes. Il en résulte que

$$f(x, y) + h = 0$$

sera l'équation cherchée si l'on détermine h de façon que le discriminant de

$f(x, y, z) + hz^2$ soit nul, c'est-à-dire si

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F+h \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on tire

$$h = -\frac{\Delta}{\delta};$$

l'équation du faisceau des asymptotes de l'hyperbole représentée par l'équation du second degré $f(x, y) = 0$ est donc

$$f(x, y) - \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

On voit que les parallèles aux asymptotes menées par l'origine sont définies par l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0.$$

Application de la théorie des formes quadratiques à la classification des coniques et à la réduction de l'équation du second degré.

269. Nous posons

$$f(x, y, z) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2,$$
$$\varphi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

et nous appelons, comme plus haut, Δ et δ les discriminants des formes f et φ; enfin nous supposons les coefficients réels.

Premier cas : $\delta \neq 0$. — Dans ce cas, $\varphi(x, y)$ est la somme algébrique de deux carrés distincts. Posons, d'une manière générale,

$$\varphi(x, y) = \varepsilon(\alpha x + \beta y)^2 + \varepsilon'(\alpha' x + \beta' y)^2, \qquad \varepsilon = \pm 1, \qquad \varepsilon' = \pm 1.$$

Les deux polynomes $\alpha x + \beta y$ et $\alpha' x + \beta' y$ étant indépendants, nous poserons $\mu = \alpha\beta' - \beta\alpha' \neq 0$.

On sait que $\delta = \varepsilon\varepsilon'.\mu^2$.

Je dis que l'on peut toujours déterminer trois constantes γ, γ', F_1 telles que

$$\varepsilon(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + \varepsilon'(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)^2 + F_1 z^2 \equiv f(x, y, z).$$

Il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que

$$\varepsilon.\alpha\gamma + \varepsilon'.\alpha'\gamma' = D, \qquad \varepsilon.\beta\gamma + \varepsilon'.\beta'\gamma' = E, \qquad \varepsilon\gamma^2 + \varepsilon'\gamma'^2 + F_1 = F.$$

Les deux premières équations, dont le déterminant, égal à $\varepsilon\varepsilon'\mu$, est différent de zéro, déterminent γ et γ'; la troisième donnera F_1.

Au moyen de la substitution

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = X, \qquad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = Y, \qquad z = Z,$$

dont le module est égal à μ, on obtient l'identité

$$f(x, y, z) \equiv \varepsilon X^2 + \varepsilon' Y^2 + F_1 Z^2$$

et, par suite,

$$\Delta = \varepsilon\varepsilon' F_1 \mu^2 = \delta F_1,$$

ce qui donne

$$F_1 = \frac{\Delta}{\delta}.$$

On obtient d'ailleurs ce résultat en remarquant que

$$f(x, y, z) - F_1 z^2 \equiv \varepsilon X^2 + \varepsilon' Y^2$$

et que, par suite, le discriminant du premier membre devant être nul, on a

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F - F_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous avons ainsi obtenu l'identité

$$f(x, y, z) \equiv \varepsilon X^2 + \varepsilon' Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} Z^2,$$

de sorte que, en posant $z = Z = 1$, il vient

$$f(x, y) \equiv \varepsilon X_1^2 + \varepsilon' Y_1^2 + \frac{\Delta}{\delta},$$

X_1 et Y_1 étant deux polynomes linéaires distincts en x et y; par suite, les équations $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$ représentent deux droites concourantes. Cela étant, nous subdiviserons le premier cas en plusieurs autres.

1° $\delta > 0$. La fonction $\varphi(x, y)$ est la somme de deux carrés de même signe, autrement dit, $\varepsilon = \varepsilon'$. D'ailleurs $A = \varepsilon(\alpha^2 + \alpha'^2)$, $C = \varepsilon(\beta^2 + \beta'^2)$; par suite, ε, A et C ont le même signe. Il faut encore distinguer plusieurs cas.

(a) $C\Delta < 0$. Alors Δ et ε ont des signes contraires; on peut donc poser

$$\frac{\Delta}{\delta} = -\varepsilon h^2,$$

h désignant une constante réelle, et, par suite,

$$f(x, y) \equiv \varepsilon(X_1^2 + Y_1^2 - h^2) \equiv \varepsilon h^2 \left[\left(\frac{X_1}{h}\right)^2 + \left(\frac{Y_1}{h}\right)^2 - 1\right],$$

et si enfin on pose $\frac{X_1}{h} = P$, $\frac{Y_1}{h} = Q$, l'équation $f(x, y) = 0$ se trouve ramenée à la forme

$$P^2 + Q^2 - 1 = 0.$$

(b) $\Delta = 0$. L'équation se ramène à la forme

$$P^2 + Q^2 = 0.$$

(c) $C\Delta > 0$. Nous poserons alors $\frac{\Delta}{\delta} = \varepsilon h^2$ et nous obtiendrons l'équation

$$P^2 + Q^2 + 1 = 0.$$

2° $\delta < 0$. Dans ce cas, ε et ε' ont des signes contraires. Donc l'équation prendra la forme

$$P^2 - Q^2 - 1 = 0,$$

si $\Delta \neq 0$, et la forme

$$P^2 - Q^2 = 0,$$

si $\Delta = 0$.

Second cas : $\delta = 0$ — Le polynome $\varphi(x, y)$ est un carré parfait, et, par suite,

$$f(x, y) \equiv \varepsilon(\alpha x + \beta y)^2 + 2Dx + 2Ey + F.$$

Or on a, dans ce cas,

$$\Delta = \varepsilon(\alpha E - \beta D)^2,$$

et, par suite, il faut faire plusieurs hypothèses.

(a) $\Delta \neq 0$. Les polynomes $\alpha x + \beta y$ et $2Dx + 2Ey + F$ sont distincts; l'équation donnée est donc de la forme

$$P^2 - Q = 0,$$

$P = 0$ et $Q = 0$ représentant deux droites distinctes.

(b) $\Delta = 0$. Alors, $Dx + Ey \equiv \varepsilon\gamma(\alpha x + \beta y)$, γ étant une constante; l'équation a donc la forme

$$f(x, y) \equiv \varepsilon(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 + F_1 = 0.$$

Supposons $\alpha \neq 0$ et, par suite, $A \neq 0$. On a identiquement

$$A x^2 + 2Dx + F \equiv \varepsilon(\alpha x + \gamma)^2 + F_1,$$

ce qui montre que $AF - D^2$ a le signe de εF_1.

Donc :

1° $AF - D^2 > 0$. Dans ce cas, on peut poser $F_1 = \varepsilon h^2$.
2° $AF - D^2 < 0$. On posera $F_1 = -\varepsilon h^2$.
3° $AF - D^2 = 0$. On a $F_1 = 0$.

Si enfin on pose $\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{h} = P$, l'équation prendra respectivement les formes $P^2 + 1 = 0$, $P^2 - 1 = 0$, $P^2 = 0$.

En résumé, l'équation $f(x, y) = 0$ peut prendre les formes indiquées dans

le Tableau suivant :

$$\delta > 0 \begin{cases} C\Delta < 0 & P^2 + Q^2 - 1 = 0, & (1) \\ C\Delta > 0 & P^2 + Q^2 + 1 = 0, & (2) \\ \Delta = 0 & P^2 + Q^2 \quad = 0; & (3) \end{cases}$$

$$\delta < 0 \begin{cases} \Delta \neq 0 & P^2 - Q^2 - 1 = 0, & (4) \\ \Delta = 0 & P^2 - Q^2 \quad = 0; & (5) \end{cases}$$

$$\delta = 0 \begin{cases} \Delta \neq 0 \quad P^2 - 2Q \quad = 0, & & (6) \\ \Delta = 0 \quad A \neq 0 \begin{cases} D^2 - AF > 0 & P^2 - 1 = 0, \\ D^2 - AF < 0 & P^2 + 1 = 0, \\ D^2 - AF = 0 & P^2 \quad = 0. \end{cases} & \begin{matrix} (7) \\ (8) \\ (9) \end{matrix} \end{cases}$$

270. Cela posé, soient

$$P \equiv \alpha x + \beta y + \gamma, \qquad Q \equiv \alpha' x + \beta' y + \gamma'$$

deux polynomes distincts. Prenons pour axes les droites définies par les équations $P = 0$, $Q = 0$. Les formules de transformation étant linéaires, si l'on désigne par X, Y les nouvelles coordonnées, on obtiendra identiquement

$$P \equiv lX + mY + n.$$

Mais, si l'on suppose que l'équation $P = 0$ représente le nouvel axe des y, l'équation $X = 0$ devant représenter la même droite que $P = 0$, ou, ce qui revient au même, que $lX + mY + n = 0$, on a $m = n = 0$ et, par suite, $P \equiv lX$; on trouvera de même $Q \equiv l'Y$.

271. Il est évident que l'équation $P^2 + Q^2 + 1 = 0$ n'a aucune solution réelle; l'équation (3) représente deux droites imaginaires conjuguées. L'équation (5) représente deux droites concourantes réelles; l'équation (7), deux droites parallèles réelles; l'équation (8), deux droites parallèles imaginaires, et enfin l'équation (9) deux droites confondues en une seule.

Occupons-nous de l'équation (1). En prenant pour axes de coordonnées les droites $P = 0$, $Q = 0$, nous poserons

$$P = \frac{X}{a}, \qquad Q = \frac{Y}{b},$$

ce qui donne l'équation

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

En discutant cette équation, comme on l'a déjà fait plus haut, on voit qu'elle représente une courbe fermée; c'est *une ellipse*.

Nous dirons que l'équation (2) représente une ellipse imaginaire. L'équa-

tion (4) se ramène à la forme

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

elle représente *une hyperbole*.

L'équation (6) peut se ramener à la forme

$$Y^2 = 2pX,$$

elle représente *une parabole*.

On retrouve les conclusions déjà obtenues.

272. *Remarque.* — On peut déterminer autrement la forme de la courbe représentée par l'une quelconque des équations précédentes. Pour cela, remarquons d'abord que $P = 0$ étant l'équation d'une droite donnée, les équations $P = h$ et $P = -h$ définissent deux droites parallèles et équidistantes de la première. Si h varie de 0 à $+\infty$, $P - h = 0$ représente une droite variable qui reste constamment parallèle à la première, mais s'en éloigne indéfiniment.

Cela étant, soit à construire la courbe définie par l'équation

$$P^2 + Q^2 = 1.$$

En écrivant

$$P^2 = 1 - Q^2,$$

on voit que Q doit rester compris entre $+1$ et -1; donc la courbe est entièrement comprise entre les deux droites ayant pour équations

$$Q = 1 \quad \text{et} \quad Q = -1,$$

et aussi entre les droites ayant pour équations

$$P = 1, \qquad P = -1;$$

elle est donc tout entière à l'intérieur du parallélogramme formé par ces quatre droites. A chaque valeur de Q comprise entre -1 et $+1$ correspondent deux points situés à l'intersection des droites représentées par les équations

$$Q = h, \qquad P = \pm\sqrt{1 - h^2} \qquad (-1 < h < 1).$$

On en conclut que les droites $P = 0$, $Q = 0$ sont deux diamètres conjugués. Si $h = 0$, $P = \pm 1$ et si h croît de 0 à 1 la valeur absolue de P décroît de 1 à 0; on retrouve ainsi évidemment la forme déjà obtenue.

L'équation $P^2 = Q$ montre que Q ne doit prendre que des valeurs positives; donc la courbe est tout entière d'un même côté de la droite $Q = 0$.

EXERCICES.

Construire les courbes représentées par les équations suivantes :

1. $5x^2 - 4xy + y^2 + 2x - y = 0,$

2. $3x^2 - 4xy + y^2 + 2x - y = 0,$

3. $3x^2 - 4xy + y^2 + 15x - 6y + 7 = 0,$

4. $2x^2 - 7xy + 3y^2 - 9x + 7y + 4 = 0,$

5. $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 4x - 5y + 3 = 0,$

6. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8x + 12y - 7 = 0.$

7. Discuter la nature de la conique représentée par l'équation

$$(\alpha - 1)x^2 + 2\beta xy - (\alpha + 1)y^2 + 2\alpha x + 2\beta y - (\alpha + 1) = 0,$$

α et β désignant les coordonnées d'un point M variable dans ce plan.

8. On donne dans un plan un angle ROR′, un point A sur la bissectrice Ox de cet angle et deux points fixes B, B′ symétriques par rapport à Ox.

On mène par le point A une droite quelconque qui rencontre OR en C et OR′ en C′; on mène les droites BC, B′C′ qui se coupent en M. Lieu de M quand la droite CAC′ tourne autour de A. On discutera le lieu en laissant fixes les droites OR, OR′ et le point A, et en déplaçant B et, par suite, B′. On indiquera dans quelle région doit être le point B pour que le lieu soit une ellipse, une hyperbole, une parabole ou l'une de leurs variétés (École Centrale, 1876).

9. Par les extrémités d'une corde AB inscrite dans un cercle, on mène des parallèles à des directions données. Lieu de leur point de rencontre : 1° quand la corde AB a une direction fixe; 2° quand elle a une longueur constante.

10. Un polygone de $n+1$ côtés varie de manière que n de ses sommets restent constamment sur une circonférence donnée et que ses côtés soient respectivement parallèles à des directions fixes. Trouver le lieu du $(n+1)^{\text{ième}}$ sommet.

Directions asymptotiques d'une courbe algébrique.

273. Soit

$$(1) \qquad f(x,y) \equiv \varphi_m(x,y) + \varphi_{m-1}(x,y) + \ldots + \varphi_1(x,y) + \varphi_0 = 0$$

l'équation d'une courbe algébrique C. Soient x_0, y_0 les coordonnées

d'un point A et α, β celles d'un point D; nous savons que les formules

$$(2) \qquad x = x_0 + \alpha\rho, \qquad y = y_0 + \beta\rho$$

représentent les coordonnées d'un point M situé sur la droite AB, parallèle à OD; ce point sera l'un des points d'intersection de la courbe C et de la sécante AB, si l'on remplace ρ par l'une quelconque des racines de l'équation

$$f(x_0 + \alpha\rho, y_0 + \beta\rho) = 0,$$

ou, en développant,

$$(3) \qquad \rho^m \varphi_m(\alpha, \beta) + \rho^{m-1}\left[x_0 \frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha} + y_0 \frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta} + \varphi_{m-1}(\alpha, \beta)\right] + \ldots = 0.$$

Pour que le point M soit à distance finie, il faut et il suffit que ρ ait une valeur finie; au contraire, si la valeur de ρ grandit indéfiniment, l'un au moins des paramètres α ou β, étant différent de zéro, l'une au moins des coordonnées de M grandit indéfiniment et, par suite, le point M s'éloigne indéfiniment du point A. Cela étant, pour que l'équation (3) ait une racine infinie, il faut et il suffit que $\varphi_m(\alpha, \beta) = 0$, c'est-à-dire que la sécante AB soit parallèle à l'une quelconque des droites du faisceau ayant pour équation

$$(4) \qquad \varphi_m(x, y) = 0.$$

L'équation (4) représente m droites passant par l'origine, réelles ou imaginaires, distinctes ou non. Si, par un point quelconque A, on mène une sécante parallèle à l'une quelconque de ces droites, cette sécante ne coupera la courbe C qu'en $m - 1$ points, au plus, à distance finie; tandis qu'une sécante qui n'est parallèle à aucune de ces droites rencontre C en m points situés tous à distance finie de A.

Les directions singulières, définies par l'équation (4), ont reçu le nom de *directions asymptotiques*. Toute courbe algébrique de degré m possède m directions asymptotiques; on obtient l'équation du faisceau des directions asymptotiques en égalant à zéro l'ensemble homogène des termes du plus haut degré de l'équation de la courbe.

Considérons une solution simple α, β de l'équation (4), c'est-à-dire une so-

lution telle que les dérivées $\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}$ ne soient pas nulles toutes les deux, l'équation

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+\varphi_{m-1}(\alpha,\beta)=0$$

représente une droite Δ déterminée et parallèle à la direction (α, β), car

$$\alpha\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}=m\varphi(\alpha,\beta)=0.$$

Si le point A est sur cette droite, la parallèle à la direction (α, β) menée par A sera la droite Δ elle-même; l'équation (3) sera au plus du degré $m-2$, et, par suite, la droite Δ coupe la courbe C au plus en $m-2$ points à distance finie.

Considérons une droite Δ' infiniment voisine de Δ; cette droite Δ' coupe la courbe C en $m-1$ points à distance finie; lorsque Δ' coïncide avec Δ, le nombre des points d'intersection à distance finie diminue encore, au moins d'une unité; cela revient à dire qu'un point M de la courbe C disparaît à l'infini; la distance de M à la droite Δ, égale à la distance des droites Δ et Δ', tend vers zéro; la droite Δ est donc une *asymptote*. Cette remarque justifie le nom de *directions asymptotiques* donné aux directions singulières définies par l'équation (4).

274. *Application aux courbes du second degré.* — Considérons en particulier une courbe du second degré représentée par l'équation

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Le faisceau des directions asymptotiques est défini par l'équation

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=0,$$

qui représente deux droites, dont la nature est caractérisée par le signe de l'invariant $AC-B^2$. Il y a trois cas à distinguer :

1° $\delta>0$ (genre ellipse) : Les directions asymptotiques sont imaginaires conjuguées.

2° $\delta<0$ (genre hyperbole) : Deux directions asymptotiques, réelles et distinctes. Ces directions sont celles des *asymptotes*.

3° $\delta=0$ (genre parabole) : Deux directions asymptotiques confondues. Si $A\neq 0$, la direction asymptotique est définie par l'équation $Ax+By=0$; quand $C\neq 0$, on peut la définir par l'équation $Bx+Cy=0$.

Réciproquement, si l'on connaît la nature des directions asym-

ptotiques d'une courbe du second degré, on sait à quel genre elle appartient.

Nombre des points communs à deux courbes algébriques.

275. Soient

$$f(x, y) = 0, \qquad g(x, y) = 0 \tag{1}$$

les équations de deux courbes algébriques de degrés m et p. Les coordonnées des points communs à ces deux courbes sont les solutions du système formé par leurs équations.

En éliminant l'une des inconnues, x par exemple, entre les équations (1), on obtient une équation de degré mp en y,

$$R(y) = 0, \tag{2}$$

que l'on appelle l'*équation aux ordonnées des points communs aux deux courbes*. A chaque racine simple y_0 de l'équation (2) correspond une seule racine x_0, commune aux équations

$$f(x, y_0) = 0, \qquad g(x, y_0) = 0$$

et, par suite, un seul point (x_0, y_0) commun aux deux courbes.

Si les coefficients des polynomes $f(x, y)$, $g(x, y)$ ont des valeurs arbitraires, l'équation (2) n'aura que des racines simples, puisque la condition pour que cette équation ait des racines égales s'obtient en égalant à zéro le discriminant du polynome $R(y)$ rendu homogène, et cette condition établit une relation entre les coefficients des polynomes f et g. De même, pour que le coefficient de y^{mp} dans $R(y)$ soit nul, il faut que le résultant des groupes homogènes de degrés m et p respectivement, appartenant aux polynomes $f(x, y)$ et $g(x, y)$, soit nul; dans ce cas, ces groupes homogènes ont un diviseur commun $\alpha x + \beta y$ et l'équation $\alpha x + \beta y = 0$ définit une direction asymptotique commune aux courbes données. Pour qu'il en soit ainsi, il faut encore qu'il existe une relation entre les coefficients de f et de g. On peut donc conclure de ce qui précède que : deux courbes algébriques de degrés m et p ont, en général, mp points communs, à distances finies.

Lorsque les deux courbes données ont des directions asymptotiques communes, quelques-uns de leurs points communs peuvent

être à l'infini. Il peut arriver encore, en attribuant aux coefficients des valeurs particulières, que deux ou un plus grand nombre de points communs se réunissent. Enfin, il peut se faire que les polynomes f et g se décomposent et aient un facteur commun; dans ce cas, le nombre des points communs aux courbes représentées par les équations (1) est infini.

276. *Cas de deux courbes du second degré.* — Nous avons discuté complètement le système de deux équations du second degré à deux inconnues x, y (*Cours d'Algèbre*, t. II, p. 317). Il résulte de cette discussion que deux courbes du second degré distinctes ont *quatre points communs* au plus, à moins qu'elles ne se décomposent chacune en un système de deux droites et que, de plus, une même droite fasse partie des deux systèmes. Dans ce dernier cas, l'intersection des deux coniques se compose de tous les points de la droite commune et, en outre, du point commun aux deux autres droites.

La proposition précédente peut d'ailleurs être établie d'une manière directe.

Soient

$$f(x,y) \equiv A\,x^2 + 2B\,xy + C\,y^2 + 2D\,x + 2E\,y + F = 0,$$
$$f_1(x,y) \equiv A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0$$

les équations des deux coniques données, et (x_0, y_0) les coordonnées d'un point A qui leur soit commun. Les quantités $x_0 + \alpha\rho$, $y_0 + \beta\rho$ seront les coordonnées d'un point commun aux deux coniques, si l'on remplace ρ par une racine commune aux deux équations

$$f(x_0 + \alpha\rho, y_0 + \beta\rho) = 0, \qquad g(x_0 + \alpha\rho, y_0 + \beta\rho) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\rho^2(A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2) \\ &\quad + 2\rho\,[\alpha(Ax_0 + By_0 + D) + \beta(Bx_0 + Cy_0 + E)] = 0, \\ &\rho^2(A'\alpha^2 + 2B'\alpha\beta + C'\beta^2) \\ &\quad + 2\rho\,[\alpha(A'x_0 + B'y_0 + D') + \beta(B'x_0 + C'y_0 + E')] = 0. \end{aligned}$$

Ces équations ont une solution commune $\rho = 0$, qui correspond au point A; pour qu'elles en aient une autre, il faut et il suffit que α, β vérifient l'équation

$$\varphi(\alpha,\beta)\left(\alpha\frac{\partial f_1}{\partial x_0} + \beta\frac{\partial f_1}{\partial y_0}\right) = \varphi_1(\alpha,\beta)\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x_0} + \beta\frac{\partial f}{\partial y_0}\right).$$

Cette équation est du troisième degré; si l'on y remplace α et β par des coordonnées courantes, elle représente un faisceau de trois droites passant par l'origine D_1, D_2, D_3. Si l'on mène par le point A une sécante qui rencontre la première conique aux points A, M et la seconde aux points A, M', les deux points M, M' se confondront en un seul si la sécante est parallèle à l'une des trois droites D_1, D_2, D_3; ce qui montre que les coniques proposées ont en commun, outre le point A, trois autres points M_1, M_2, M_3.

Mais il peut arriver que l'équation précédente se réduise à une identité, de sorte que toute sécante menée par A coupe les deux coniques en un point commun, généralement différent de A : s'il en est ainsi, le facteur

$$\alpha \frac{\partial f_1}{\partial x_0} + \beta \frac{\partial f_1}{\partial y_0},$$

qui divise le premier membre, doit diviser le second; il peut arriver deux cas : 1° Ce facteur divise le facteur de même nature

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial x_0} + \beta \frac{\partial f}{\partial y_0};$$

dans ce cas, on le voit immédiatement, les coefficients des polynomes f et f_1 sont proportionnels et les deux coniques sont confondues; écartons ce cas. 2° On a identiquement

$$\varphi_1(\alpha, \beta) \equiv \left(\alpha \frac{\partial f_1}{\partial x_0} + \beta \frac{\partial f_1}{\partial y_0}\right)(m\alpha + n\beta)$$

et

$$\varphi\,(\alpha, \beta) \equiv \left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x_0} + \beta \frac{\partial f}{\partial y_0}\right)(m\alpha + n\beta).$$

On en conclut que

$$f(x_0 + \mathrm{X}, y_0 + \mathrm{Y}) \equiv (m\mathrm{X} + n\mathrm{Y} + 1)\left(\mathrm{X} \frac{\partial f}{\partial x_0} + \mathrm{Y} \frac{\partial f}{\partial y_0}\right),$$

et, par suite, l'équation $f(x, y) = 0$ est de la forme

$$(mx + ny + h)(ax + by + c) = 0,$$

et, pareillement, l'équation $f_1(x, y) = 0$ est

$$(mx + ny + h)(a'x + b'y + c') = 0.$$

Les deux coniques se composent donc alors de droites, l'une des droites leur étant commune.

277. Quand les équations des deux courbes données ont leurs *coefficients réels,* à toute solution $x_1 = a + bi$, $y_1 = a' + b'i$, correspond la solution conjuguée $x_2 = a - bi$, $y_2 = a' - b'i$.

Donc, quand deux courbes algébriques, dont les équations sont à coefficients réels, ont un point imaginaire commun, elles ont aussi en commun le point imaginaire conjugué.

278. *Former l'équation du faisceau des droites joignant un point donné aux points communs à deux courbes algébriques.* — Soient

$$f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0$$

les équations de deux courbes algébriques; (a, b, c) les coordonnées d'un point donné P; (x, y, z) celles d'un point variable M. Les coordonnées d'un point de la droite PM sont proportionnelles à $x + \lambda a$, $y + \lambda b$, $z + \lambda c$. Pour que PM passe par l'un quelconque des points communs aux deux courbes données, il faut et il suffit que λ soit une racine commune aux deux équations

$$f(x + \lambda a, y + \lambda b, z + \lambda c) = 0, \qquad g(x + \lambda a, y + \lambda b, z + \lambda c) = 0.$$

On obtiendra donc l'équation du faisceau des droites joignant le point P aux points d'intersection des deux courbes, en éliminant λ entre les deux équations précédentes.

En particulier, supposons que le point P soit l'origine des coordonnées (ou, s'il s'agit de coordonnées trilinéaires, que P soit le point commun aux deux côtés $x = 0$, $y = 0$ du triangle de référence); en posant $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$, les équations précédentes deviennent

$$f(x, y, z + \lambda) = 0, \qquad g(x, y, z + \lambda) = 0;$$

on devra éliminer λ entre ces deux équations; cela revient évidemment à éliminer z entre les équations des deux courbes.

En particulier, si l'on considère la droite ayant pour équation

$$ux + vy = z,$$

l'équation

$$f(x, y, ux + vy) = 0$$

est celle du faisceau des droites joignant l'origine aux points d'intersection de la droite considérée avec la courbe f.

On peut dire que l'équation $\varphi_m(x, y) = 0$, qui détermine les di-

rections asymptotiques de la courbe f, représente le faisceau des droites joignant l'origine aux points d'intersection de la courbe avec la droite de l'infini.

CHAPITRE IX.

THÉORIE DU CENTRE.

279. On appelle *centre* d'une courbe plane un point fixe P situé dans le plan de la courbe et tel que, M étant un point quelconque de la courbe, le point M', symétrique de M par rapport à P, soit encore un point de la même courbe.

280. *Conditions pour que l'origine des coordonnées soit centre d'une courbe représentée par l'équation* $f(x,y)=0$. — Si le point M a pour coordonnées x_0, y_0, le point M' symétrique de M par rapport à l'origine a pour coordonnées $-x_0$, $-y_0$; donc, pour que l'origine soit un centre de la courbe représentée par l'équation $f(x,y)=0$, il faut et il suffit que les deux équations

$$f(x,y)=0 \quad \text{et} \quad f(-x,-y)=0$$

soient identiques.

Ainsi, par exemple, l'origine est un centre de la courbe ayant pour équation $y=\sin x$.

Supposons qu'il s'agisse d'une courbe algébrique ayant pour équation

$$\varphi_m(x,y)+\varphi_{m-1}(x,y)+\ldots+\varphi_1(x,y)+\varphi_0=0, \tag{1}$$

et considérons une droite quelconque passant par l'origine, ayant pour paramètres directeurs α, β. Les points de rencontre de cette droite et de la courbe sont définis par les équations $x=\alpha\rho$, $y=\beta\rho$,

où l'on remplace ρ par chacune des racines de l'équation

$$(2) \qquad \rho^m \varphi_m(\alpha, \beta) + \rho^{m-1} \varphi_{m-1}(\alpha, \beta) + \ldots + \rho \varphi_1(\alpha, \beta) + \varphi_0 = 0.$$

Pour qu'à chaque point d'intersection M corresponde un point d'intersection M′ symétrique du premier par rapport à l'origine, il faut et il suffit que les racines de l'équation (2) soient deux à deux égales et de signes contraires, et cela doit avoir lieu quelles que soient les valeurs de α et β. (Il convient de remarquer que, si l'un des points M s'éloigne indéfiniment quand la sécante tourne autour de l'origine, le point symétrique M′ doit aussi s'éloigner indéfiniment et, par suite, deux racines de l'équation en ρ, égales et de signes contraires, grandissent indéfiniment.) Cela posé, pour qu'à toute racine de l'équation (2) corresponde une racine égale et de signe contraire, il est nécessaire et suffisant que le premier membre ne contienne que des puissances de ρ de même parité, et, par suite, de la même parité que m; en d'autres termes, il faut que

$$\varphi_{m-1}(\alpha, \beta) \equiv 0, \qquad \varphi_{m-3}(\alpha, \beta) \equiv 0, \qquad \ldots,$$

ce qui revient à poser

$$\varphi_{m-1}(x, y) \equiv 0, \qquad \varphi_{m-3}(x, y) \equiv 0, \qquad \ldots,$$

de sorte que l'équation de la courbe sera de la forme

$$\varphi_m(x, y) + \varphi_{m-2}(x, y) + \varphi_{m-4}(x, y) + \ldots = 0.$$

En second lieu, il est évident que l'origine est un centre de toute courbe dont l'équation est de cette forme.

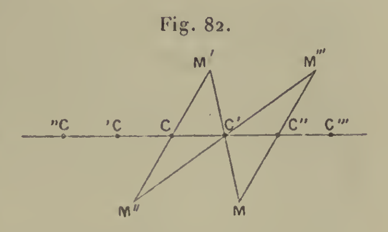
Il résulte de là que, si m est impair, l'équation ne contiendra pas de terme constant. Donc, *tout centre d'une courbe de degré impair est un point de cette courbe.*

281. Théorème. — *Si une courbe plane a deux centres* C, C′, *elle en a une infinité situés sur la droite* CC′; *si une courbe a trois centres non en ligne droite, elle en a une infinité formant un réseau de parallélogrammes.*

Soient C, C′ deux centres d'une même courbe (*fig.* 82) et M un point quelconque de cette courbe. Construisons le point M′, symétrique de M par rapport à C′, et le point M″, symétrique de M′ par rapport au centre C, et enfin M‴, symétrique de M″ par rapport à C′. Le point M‴ appartient à la

courbe donnée; or, on voit aisément que le milieu de MM‴ s'obtient en construisant le segment $\overline{C'C''}$ égal au segment $\overline{CC'}$, de sorte que le point C″ est un point fixe. Or, à tout point M de la courbe correspond un point M‴ symétrique de M par rapport à C″ et appartenant à la même courbe; donc, C″ est un centre. Il résulte de là que la courbe donnée a une infinité de centres situés sur CC′ et distribués uniformément sur cette ligne.

Fig. 82.



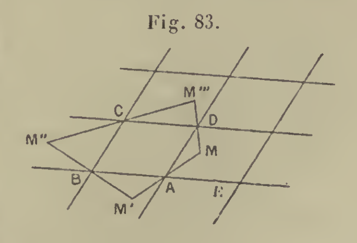
Supposons maintenant trois centres en ligne droite rangés dans l'ordre suivant : C, C′, C″. Si les segments CC′ et CC″ ont une commune mesure, ce cas se ramène au précédent et la courbe a une infinité de centres distribués uniformément sur CC′, la distance de deux centres consécutifs étant égale à la plus grande commune mesure de CC′ et CC″.

Soit, en effet, a la plus grande commune mesure des deux longueurs CC′, CC″ et supposons $CC' = ma$, $CC'' = na$; m et n sont premiers entre eux. En prenant sur la droite CC′ un nombre x de segments égaux à CC′ et un nombre y de segments égaux à CC″, on obtient deux centres P et Q dont la distance est égale à $|xma - yna|$; or on peut déterminer deux entiers x et y tels que $mx - ny = \pm 1$; donc les points P et Q correspondants se trouveront à une distance égale à a et, par suite, les centres donnés feront partie d'une suite de points distribués uniformément et tels que la distance de deux points consécutifs sera égale à a; tous ces points seront des centres.

Supposons maintenant que CC′ et CC″ n'aient aucune commune mesure; posons $CC' = a$ et $CC'' = b$. On peut trouver deux entiers x et y tels que $ax - by$ soit moindre qu'une longueur donnée aussi petite qu'on veut; en portant, à partir du point C, une longueur $CP = ax$ et une longueur $CQ = by$, on aura donc deux centres P, Q aussi près qu'on voudra l'un de l'autre. On en conclut que, dans ce cas, en général, tous les points de la droite CC′ sont des centres.

Considérons enfin (*fig.* 83) trois centres A, B, C appartenant à une même courbe et non situés en ligne droite. Soit M un point de la courbe; si l'on construit successivement le point M′ symétrique de M par rapport à A; M″ symétrique de M′ par rapport à B, et M‴ symétrique de M″ par rapport à C, on reconnaît aisément que le quatrième sommet D du parallélogramme construit sur BA et BC est le milieu de MM‴; d'où l'on conclut que D est un quatrième centre. Cela étant, si l'on prend AE = BA, E est un centre; donc, le quatrième sommet du parallélogramme construit sur AE et AD est un nouveau centre et, par suite, en continuant indéfiniment

Fig. 83.



ce raisonnement, on voit que la courbe a une infinité de centres distribués dans le plan aux sommets d'un réseau de parallélogrammes.

282. *Recherche du centre.* — Pour chercher si une courbe donnée a un centre, on transporte l'origine des coordonnées en un point inconnu (x_0, y_0) en posant $x = x_0 + X$, $y = y_0 + Y$, et l'on cherche si l'on peut déterminer x_0 et y_0 de manière que la nouvelle origine soit un centre, c'est-à-dire, si la courbe est algébrique et de degré m, de manière que les degrés des termes de la nouvelle équation en X et Y soient de la même parité que m; pour cela, on égalera à zéro les coefficients de tous les termes dont les degrés sont respectivement égaux à $m-1$, $m-3$, ...

Les équations obtenues ainsi sont généralement incompatibles si l'on suppose $m > 2$; en effet, soit $m = 2\mu$; en annulant les coefficients des termes de degrés $1, 3, \ldots, 2\mu - 1$, on forme $\mu(\mu+1)$ équations entre x_0, y_0 et les coefficients de l'équation proposée; il y aura donc, en général, $\mu(\mu+1) - 2$ ou $\frac{m^2+2m-8}{4}$ conditions. Si $m = 2$, ce nombre se réduit à zéro.

Soit, en second lieu, $m = 2\mu + 1$; il faut alors annuler les termes de degrés $0, 2, \ldots, 2\mu$; ce qui donne

$$1 + 3 + \ldots + (2\mu + 1) = (\mu + 1)^2$$

équations et, par suite, $(\mu+1)^2 - 2$ ou $\frac{(m+1)^2 - 8}{4}$ conditions. Si $m = 3$, il faut deux conditions. Ainsi, en général, les courbes de degré supérieur à 2 n'ont pas de centre.

Recherche du centre dans les courbes du second degré.

283. Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une conique. Transportons les axes parallèlement à eux-mêmes en prenant pour origine le point (x_0, y_0); on a identiquement

$$f(x_0 + X, y_0 + Y) \equiv \varphi(X, Y) + X\frac{\partial f}{\partial x_0} + Y\frac{\partial f}{\partial y_0} + f(x_0, y_0).$$

Pour que la nouvelle origine soit un centre, il faut et il suffit que les termes du premier degré manquent dans l'équation de la courbe

rapportée aux nouveaux axes; donc, on doit poser

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y_0} = 0.$$

Tout point commun aux droites définies par les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

est un centre.

Discussion. — Développons les équations précédentes :

$$(1) \qquad Ax + By + D = 0,$$

$$(2) \qquad Bx + Cy + E = 0,$$

1° $\delta \neq 0$. Les droites représentées par les équations (1) et (2) sont concourantes. Donc, *les courbes du genre ellipse ou du genre hyperbole ont un centre unique à distance finie.*

Les coordonnées sont

$$x = \frac{BE - CD}{AC - B^2}, \qquad y = \frac{BD - AE}{AC - B^2}.$$

Si l'on désigne par a, b, c, ..., f les mineurs du discriminant Δ, de sorte que

$$a = CF - E^2, \qquad b = DE - BF, \qquad \ldots, \qquad f = AC - B^2 = \delta,$$

les coordonnées homogènes du centre sont d, e, δ.

2° $\delta = 0$. Ce cas se partage en deux autres. Nous savons que l'un au moins des coefficients A ou C est différent de zéro. Supposons $A \neq 0$; alors le déterminant caractéristique du système (1), (2) est $AE - BD$.

(*a*) $AE - BD \neq 0$. Les droites (1) et (2) sont parallèles; donc, *la parabole n'a pas de centre*. Mais, comme les équations qui déterminent le centre définissent, dans ce cas, deux droites parallèles, on convient de dire que *la parabole a un centre unique à l'infini.* D'ailleurs, les coordonnées homogènes du centre de la parabole sont d, e, o. Le centre est à l'infini dans la direction asymptotique; toute droite menée par le centre, c'est-à-dire toute parallèle à la direction asymptotique, ne coupe la parabole qu'en un seul point à distance finie.

Il convient de remarquer que la droite représentée par l'équation (2) peut être à l'infini; ce qui arrive si $B = C = 0$.

(*b*) $AE - BD = 0$. Dans ce cas, les droites représentées par les équations (1) et (2) sont confondues en une seule et, par suite, tous les points de la droite

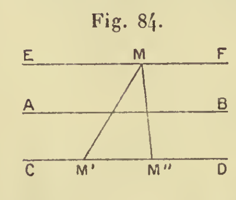
$$Ax + By + D = 0$$

sont des centres. Dans ce cas, on sait que $\Delta = 0$; l'équation $f(x, y) = 0$ représente deux droites parallèles équidistantes de la droite (1).

Il convient de remarquer que l'équation (2) peut disparaître identiquement, car on peut supposer $B = C = E = 0$; ces conditions donnent en effet : $AC - B^2 = 0$ et $AE - BD = 0$.

On peut vérifier par la Géométrie le résultat que nous venons d'obtenir. En effet, supposons que tous les points de la droite AB (*fig.* 84) soient des centres et soit M un point de la conique représentée par l'équation $f(x, y) = 0$; le lieu des symétriques de M par rapport aux différents points de AB est une droite CD parallèle à AB; la droite CD fait partie de la conique. Soit M' un point de CD; le lieu des symétriques de M' par rapport aux différents points de AB est une parallèle à AB qui passe d'ailleurs par le point M. On en conclut que l'équation $f(x, y) = 0$ représente le système des deux droites parallèles CD, EF.

Fig. 84.



D'ailleurs on a, par hypothèse, $AC - B^2 = 0$, $AE - BD = 0$, $A \neq 0$; donc, si l'on pose $B = \lambda A$, on en déduit $C = \lambda^2 A$, $E = \lambda D$ et, par suite,

$$f(x, y) \equiv A(x^2 + 2\lambda xy + \lambda^2 y^2) + 2D(x + \lambda y) + F.$$

L'équation donnée est donc la suivante :

$$A(x + \lambda y)^2 + 2D(x + \lambda y) + F = 0,$$

ce qui donne

$$x + \lambda y = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - AF}}{A}.$$

On a donc bien deux parallèles équidistantes de la droite ayant pour équation

$$Ax + By + D = 0.$$

284. *Résumé.* — Les courbes du second degré peuvent être rangées en trois classes :

1° $\delta \neq 0$. *Courbes ayant un centre unique à distance finie.* — Ellipse, hyperbole et leurs variétés.

2° $\delta = 0$, $A \neq 0$, $AE - BD \neq 0$. *Courbes ayant un centre unique à l'infini.* — Parabole proprement dite.

3° $\delta = 0$. *Coniques ayant une ligne de centres.* — Système de deux droites parallèles ou une droite double.

285. Problème. — *Une courbe du second degré à centre étant rapportée à deux axes quelconques, la rapporter à deux axes parallèles aux premiers et passant par son centre (ou par l'un des centres).*

1° Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une courbe à centre unique; x_0, y_0 étant les coordonnées du centre nous avons trouvé, en posant $x = x_0 + X$, $y = y_0 + y$,

$$f(x, y) \equiv \varphi(X, Y) + f(x_0, y_0),$$

puisque la nouvelle origine est un *centre*. Il s'agit de calculer $f(x_0, y_0)$ que nous désignerons par F_1 pour abréger l'écriture.

L'identité d'Euler

$$2f(x, y, z) = xf'_x + yf'_y + zf'_z,$$

dans laquelle on pose $x = x_0$, $y = y_0$, $z = 1$, donne

$$F_1 = f(x_0, y_0) = Dx_0 + Ex_0 + F.$$

Pour obtenir F_1 en fonction des coefficients, considérons le système linéaire

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + D \qquad &= 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E \qquad &= 0, \\ Dx_0 + Ey_0 + F - F_1 &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F - F_1 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$F_1 = \frac{\Delta}{\delta}.$$

On arrive au même résultat en remarquant que le discriminant de $f(x, y, z) - F_1 z^2$ doit être nul.

L'équation transformée est donc

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

On n'oubliera pas que les termes du second degré ont les mêmes coefficients que dans l'équation primitive. La relation

$$\Delta = \delta(Dx_0 + Ey_0 + F)$$

permet souvent de calculer Δ d'une manière commode.

2° Supposons maintenant que l'équation $f(x, y) = 0$ représente deux droites parallèles. Le calcul précédent est en défaut, car Δ et δ sont nuls; mais la formule

$$F_1 = Dx_0 + Ey_0 + F$$

subsiste, x_0, y_0 étant les coordonnées de l'un des centres, que l'on prend pour nouvelle origine. On peut, dans ce cas, procéder ainsi : l'identité

$$f(x, y, z) \equiv \varphi(X, Y) + F_1$$

ou, sous forme homogène,

$$f(x, y, z) - F_1 z^2 \equiv \varphi(X, Y)$$

montre que le premier membre est un carré parfait, puisque $\delta = 0$.

Donc, tous les mineurs du discriminant du premier membre sont nuls, ce qui donne les conditions suivantes

$$AF_1 = \frac{\partial\Delta}{\partial C}, \qquad CF_1 = \frac{\partial\Delta}{\partial A}, \qquad BF_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial\Delta}{\partial B},$$

d'où

$$(A + C - 2B\cos\theta)\,F_1 = \frac{\partial\Delta}{\partial A} + \frac{\partial\Delta}{\partial C} + \frac{\partial\Delta}{\partial B}\cos\theta.$$

Le coefficient de F_1 est différent de zéro quand les coefficients sont réels; donc

$$F_1 = \frac{\dfrac{\partial\Delta}{\partial A} + \dfrac{\partial\Delta}{\partial C} + \dfrac{\partial\Delta}{\partial B}\cos\theta}{r_1}.$$

286. *Généralisation de la théorie du centre.* — Étant donnée une équation de degré supérieur à 2, $f(x, y) = 0$, il est naturel de se demander si les points communs aux courbes définies par les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

jouissent de quelque propriété remarquable.

Si par le point (x_0, y_0) on mène une droite dont la direction est définie par

les deux paramètres α, β, les points communs à cette sécante et à la courbe donnée sont déterminés par l'équation $f(x_0 + \alpha\rho, y_0 + \beta\rho) = 0$, ou, en développant,

$$f(x_0, y_0) + \rho\left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x_0} + \beta \frac{\partial f}{\partial y_0}\right) + \ldots + \rho^m \varphi(\alpha, \beta) = 0;$$

par conséquent, si l'on suppose $\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y_0} = 0$, la somme des inverses des racines de l'équation en ρ est nulle quels que soient α, β. Donc, si l'on désigne par A le point (x_0, y_0) et par P_1, P_2, ..., P_m les points d'intersection d'une sécante quelconque menée par A avec la courbe, on aura

$$\frac{1}{AP_1} + \frac{1}{AP_2} + \ldots + \frac{1}{AP_m} = 0,$$

ce qui exprime que le point A est le conjugué harmonique du point à l'infini sur la sécante, par rapport aux points d'intersection de cette sécante avec la courbe, et cela, quelle que soit la direction de cette sécante.

Quand la courbe est du second degré, dire que la somme $\frac{1}{AP_1} + \frac{1}{AP_2} = 0$ revient à dire que A est le milieu de P_1P_2.

EXERCICES.

1. Trouver les centres de la courbe ayant pour équation $a \sin x = b \sin y$.

2. Trouver les centres de la courbe ayant pour équation $a \cos x + b \cos y = 0$.

3. Trouver le lieu des centres des coniques ayant pour équation

$$(4x - 3y)(y - 3) + m(x - 3)(2y - 3x) = 0,$$

lorsqu'on fait varier m. (École Centrale, 1872.)

4. Lieu des centres des coniques représentées par l'équation

$$x^2 - k(1 - k)xy + k^2y^2 - ak^2y = 0$$

quand on fait varier k. (École Centrale, 1864.)

5. On donne un triangle ABC. D'un point quelconque P pris sur le côté AB, on abaisse PQ perpendiculaire sur AC; on mène les droites BQ et CP qui se coupent en M.

1° On demande le lieu du point M quand le point P parcourt la droite indéfinie AB.

2° Les droites indéfinies AB et AC restant fixes, on fait tourner la droite BC autour d'un point fixe H pris sur cette droite, et on demande le lieu du centre du lieu précédent. (École Centrale, 1866.)

CHAPITRE X.

THÉORIE DES DIAMÈTRES.

---

287. On nomme *diamètre conjugué à une direction donnée* le lieu des milieux des cordes d'une courbe donnée, qui sont parallèles à cette direction.

Supposons la courbe algébrique et de degré m; une sécante la coupera, en général, en m points distincts et, en combinant ces points deux à deux, on obtient $\frac{m(m-1)}{2}$ cordes; il y aura donc, sur une droite parallèle à la direction donnée, $\frac{m(m-1)}{2}$ points du lieu; le diamètre est donc, en général, une courbe de degré $\frac{m(m-1)}{2}\cdot$ Dans le cas du second degré, ce sera une droite.

288. *Méthode générale.* — Soient (x, y) les coordonnées d'un point M, (α, β) les paramètres de la direction donnée; les coordonnées d'un point pris sur la sécante menée par M parallèlement à la direction (α, β), ont pour valeurs $x+\alpha\rho$, $y+\beta\rho$; pour que ce point appartienne à la courbe ayant pour équation

$$f(x, y) = 0,$$

il faut et il suffit que

$$f(x+\alpha\rho, y+\beta\rho) = 0.$$

[Nous appellerons désormais, pour abréger, cette équation : *l'équation aux* ρ *des points d'intersection de la courbe* f *et de la sécante issue du point* (x, y) *et de direction* (α, β)].

L'équation précédente étant mise sous la forme

$$\varphi(\rho^2) + \rho\psi(\rho^2) = 0, \tag{1}$$

soient ρ', ρ'' deux racines auxquelles correspondent les points d'intersection P', P''; pour que M soit le milieu de P'P'', il faut et il suffit que $\rho' + \rho'' = 0$. Il s'agit donc d'exprimer que l'équation (1) a deux racines égales et de signes contraires.

Or, des égalités

$$\varphi(\rho'^2) + \rho'\psi(\rho'^2) = 0,$$
$$\varphi(\rho'^2) - \rho'\psi(\rho'^2) = 0,$$

on tire

$$\varphi(\rho'^2) = 0, \qquad \rho'\psi(\rho'^2) = 0$$

et, en supposant $\rho' \neq 0$,

$$\psi(\rho'^2) = 0.$$

Donc, en posant $\rho^2 = t$, les deux polynomes $\varphi(t)$, $\psi(t)$ doivent avoir un diviseur commun. On est ainsi conduit à éliminer t entre les deux équations

(2) $$\varphi(t) = 0, \qquad \psi(t) = 0.$$

289. Exemples. — 1° *La courbe a pour équation*

$$y = x^3.$$

L'équation (1) en ρ est

$$\alpha^3\rho^3 + 3\alpha^2 x\rho^2 + (3\alpha x^2 - \beta)\rho + x^3 - y = 0;$$

les équations (2) sont donc les suivantes

$$\alpha^3 t + 3\alpha x^2 - \beta = 0, \qquad 3\alpha^2 x t + x^3 - y = 0,$$

et, en éliminant t, on obtient l'équation

$$8\alpha^3 x^3 - 3\alpha^2\beta x + \alpha^3 y = 0.$$

2° *Lieu des milieux des cordes parallèles à la droite*

$$x + y = 0$$

dans la courbe ayant pour équation

$$x^3 + y^3 - x = 0.$$

Nous ferons $\alpha = 1$, $\beta = -1$; l'équation (1) devient ainsi

$$3\rho^2(x + y) + \rho(3x^2 - 3y^2 - 1) + x^3 + y^3 - x = 0.$$

Dans ce cas particulier, nous pouvons procéder autrement. Supposons d'abord $x + y \neq 0$. La condition pour que l'équation précédente ait ses racines égales et de signes contraires est

(3) $$3x^2 - 3y^2 - 1 = 0.$$

Si l'on considère en second lieu un point pris sur la sécante particulière ayant pour équation

(4) $$x + y = 0,$$

l'équation en ρ s'abaisse au premier degré; cette sécante coupe donc la courbe

proposée en un seul point à distance finie et en deux points à l'infini; le milieu du segment formé par ces deux points étant indéterminé, cette sécante peut être considérée comme faisant partie du lieu.

On peut donc dire que le lieu se compose de l'hyperbole représentée par l'équation (3) et de la droite représentée par l'équation (4).

Remarquons que toute sécante parallèle à la direction donnée ne rencontre la courbe proposée qu'en deux points à distance finie et en un point à l'infini. Il n'y a donc qu'un point du lieu à distance finie sur cette sécante. C'est ce que l'on vérifie en remarquant que l'hyperbole trouvée a une asymptote parallèle à la direction donnée.

Diamètres des courbes du second degré.

290. Soient (α, β) les paramètres d'une direction OD et M (x, y) un point; l'équation aux ρ des points d'intersection de la sécante menée par M parallèlement à la direction donnée et de la conique représentée par l'équation $f(x, y) = 0$ est

$$\rho^2\varphi(\alpha, \beta) + \rho(\alpha f'_x + \beta f'_y) + f(x, y) = 0. \tag{1}$$

1° $\varphi(\alpha, \beta) \neq 0$. *La direction donnée n'est pas une direction asymptotique de la conique.* — Pour que le point M (x, y) soit le milieu de la corde parallèle à la direction donnée et passant par M, il faut et il suffit que les racines de l'équation (1) soient égales et de signes contraires et, par suite, que x et y vérifient l'équation

$$\alpha f'_x + \beta f'_y = 0. \tag{2}$$

Je dis que l'équation précédente, dans laquelle x et y sont regardées comme des coordonnées courantes, définit une droite déterminée et à distance finie. En effet, cette équation peut s'écrire ainsi

$$\alpha\varphi'_x + \beta\varphi'_y + 2D\alpha + 2E\beta = 0,$$

ou encore

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + 2D\alpha + 2E\beta = 0. \tag{3}$$

On ne peut supposer

$$\varphi'_\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'_\beta = 0,$$

car on en déduirait

$$\alpha\varphi'_\alpha + \beta\varphi'_\beta = 0$$

ou

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

ce qui est contraire à notre hypothèse. L'un au moins des coefficients de x ou de y étant différent de zéro, la droite représentée par l'équation (3) est à distance finie. D'où cette proposition :

Dans une courbe du second degré, à toute direction *non asymptotique* correspond un diamètre déterminé.

2° $\varphi(\alpha, \beta) = 0$. *Les cordes sont parallèles à une direction asymptotique.* — L'ellipse n'ayant que des directions asymptotiques imaginaires, laissons de côté le cas où la conique serait une ellipse et supposons que ce soit *une hyperbole*. Je dis d'abord que l'équation (2) représente encore une droite à distance finie. En effet, pour qu'il en soit autrement, il faut que l'on ait

$$A\alpha + B\beta = 0, \qquad B\alpha + C\beta = 0,$$

ce qui ne peut avoir lieu, puisque l'on suppose $AC - B^2 \neq 0$ et que l'on attribue à α et β des valeurs non toutes deux nulles.

Cela posé, il s'agit d'interpréter géométriquement l'équation (2). Soit M un point de la droite qu'elle représente; l'équation en ρ qui correspond à ce point se réduit à son terme constant $f(x, y)$; d'ailleurs, ce terme constant ne saurait être nul, sans quoi, l'équation en ρ disparaissant, tous les points de la sécante considérée appartiendraient à la conique qui se décomposerait en deux droites et cela est contraire à notre hypothèse. La droite Δ représentée par l'équation (2) est donc le lieu des points M tels que toute sécante MM′ menée par M parallèlement à la direction (α, β) rencontre l'hyperbole en deux points à l'infini. Il en résulte immédiatement que la droite Δ est parallèle à la direction asymptotique (α, β), car tout point M′ de la sécante MM′ jouit évidemment de la même propriété que le point M et, par suite, se trouve sur Δ, ce qui exige que cette droite se confonde avec MM′. C'est ce que l'on vérifie par le calcul, car la condition pour que la droite Δ soit parallèle à la direction (α, β), est $\alpha\varphi'_\alpha + \beta\varphi'_\beta = 0$, ou $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, et cette condition est remplie par hypothèse.

En résumé, l'équation (2) représente, dans le cas qui nous occupe, une droite de direction (α, β) qui ne rencontre l'hyperbole qu'à l'infini; cette droite n'est pas autre chose qu'une asymptote.

Il est facile d'expliquer comment une asymptote peut être regardée comme le lieu des milieux des cordes de l'hyperbole, qui lui sont parallèles. En effet,

une sécante parallèle à cette asymptote coupe la courbe en un point situé à distance finie et en un point à l'infini; le milieu de la corde correspondante est donc à l'infini : c'est le point à l'infini de l'asymptote considérée. Supposons maintenant que la sécante vienne se confondre avec l'asymptote : ses deux points d'intersection avec l'hyperbole sont à l'infini; le milieu de la corde est alors indéterminé et l'on peut dire que tout point de l'asymptote est un point du lieu. Pour s'en assurer, il suffit de mener par un point quelconque A de l'asymptote une sécante qui rencontre l'hyperbole aux deux points P, Q et la seconde asymptote au point R; nous savons (266, 2°) que le milieu de PQ est confondu avec le milieu de AR. Cela étant, si la sécante tourne autour du point A et vient se confondre avec l'asymptote OA, le milieu de AR aura pour limite le milieu M de OA, O étant le centre de l'hyperbole; A étant un point arbitraire, le point M peut aussi être considéré comme arbitraire et la proposition est établie.

Si l'équation $f(x, y) = 0$ représente deux droites concourantes, on vérifiera facilement que, si (α, β) sont les paramètres directeurs de l'une de ces droites, l'équation (2) représentera précisément cette droite elle-même.

291. *Cas de la parabole.* — L'équation d'une parabole peut se mettre sous la forme

$$(ax + by)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

les paramètres de la direction asymptotique sont déterminés par l'équation

$$a\alpha + b\beta = 0.$$

Supposons d'abord $a\alpha + b\beta \neq 0$. Le diamètre conjugué à la direction (α, β) a pour équation

$$(ax + by)(a\alpha + b\beta) + D\alpha + E\beta = 0;$$

donc, *dans la parabole, tous les diamètres sont parallèles à la direction asymptotique.*

Supposons, en second lieu, $a\alpha + b\beta = 0$; la droite représentée par l'équation précédente est rejetée à l'infini; ce qui s'explique, car toute sécante parallèle à la direction considérée ne coupe la parabole qu'en un seul point à distance finie : le milieu de la corde est donc aussi à l'infini.

Nous dirons donc que le diamètre conjugué à la direction asymptotique d'une parabole est entièrement à l'infini.

292. *Cas de deux droites parallèles.* — L'équation du système des deux droites étant

$$(ax+by)^2+2h(ax+by)+k=0,$$

le diamètre conjugué à la direction (α, β) a pour équation

$$(a\alpha+b\beta)(ax+by+h)=0.$$

Tous les diamètres sont donc confondus avec la ligne des centres; mais, si l'on suppose $a\alpha+b\beta=0$, le diamètre est indéterminé. Ces résultats sont évidents par la Géométrie.

293. Théorème. — *Dans une courbe du second degré à centre, tout diamètre passe par le centre et réciproquement.*

L'équation d'un diamètre étant

$$\alpha f'_x+\beta f'_y=0,$$

ce diamètre passe bien par le centre. Réciproquement, toute droite passant par le centre a une équation de la forme précédente et, par suite, est le diamètre conjugué à la direction (α, β). Les asymptotes sont regardées comme étant des diamètres singuliers.

Les équations $f'_x=0$ et $f'_y=0$ qui déterminent le centre représentent : la première, le diamètre conjugué à la direction de l'axe des x; la seconde, le diamètre conjugué à la direction de l'axe des y. Dans le cas de la parabole, ces deux droites sont parallèles et, comme ce résultat est indépendant de la direction des axes, on voit par là même que tous les diamètres de la parabole sont parallèles; on peut encore dire qu'ils passent par le centre de la parabole, puisque cela revient à dire que ce sont des droites parallèles à la direction asymptotique de la parabole et la réciproque est vraie; toute parallèle à cette direction est un diamètre de la parabole.

294. Corollaire. — *Si deux cordes d'une courbe du second degré se coupent mutuellement en parties égales, leur point d'intersection est le centre de la courbe.*

En effet, le point d'intersection de ces deux cordes est, par hypothèse, le point de rencontre des diamètres qui leur sont respectivement conjugués; c'est donc bien le centre de la conique.

295. Théorème. — *La tangente en un point commun à une conique et à l'un de ses diamètres est parallèle aux cordes que ce diamètre divise en deux parties égales.*

En effet, les coordonnées (x, y) du point M considéré vérifient les deux équations

$$f(x, y) = 0, \qquad \alpha f'_x + \beta f'_y = 0.$$

Or, la tangente en M a pour coefficient angulaire y'_x, c'est-à-dire, en vertu de l'équation de la courbe, $-\frac{f'_x}{f'_y}$; d'autre part, la seconde équation donne $\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{f'_x}{f'_y}$, ce qui démontre la proposition.

296. *Former l'équation du diamètre conjugué aux cordes perpendiculaires à la direction* (α, β). — Si les axes sont rectangulaires, les paramètres de la droite perpendiculaire à la direction (α, β) sont proportionnels à β et $-\alpha$; le diamètre demandé a donc pour équation

$$\beta f'_x - \alpha f'_y = 0,$$

ou encore

$$\frac{f'_x}{\alpha} = \frac{f'_y}{\beta}.$$

Si les axes sont obliques, les paramètres α', β' de la direction perpendiculaire à la direction (α, β) sont déterminés par l'équation

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + (\alpha\beta' + \beta\alpha')\cos\theta = 0;$$

le diamètre cherché a pour équation

$$\alpha' f'_x + \beta' f'_y = 0;$$

en éliminant α' et β' entre ces deux équations, on obtient donc

$$\frac{f'_x}{\alpha + \beta\cos\theta} = \frac{f'_y}{\alpha\cos\theta + \beta}.$$

297. *Relation entre les paramètres directeurs d'un diamètre et ceux des cordes qu'il partage en parties égales.* — Le diamètre conjugué à la direction (α, β) est parallèle à la droite ayant pour équation

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta = 0.$$

Les paramètres directeurs α', β' de ce diamètre sont donc définis par la relation

$$\alpha'\varphi'_\alpha + \beta'\varphi'_\beta = 0$$

ou, en développant,

$$A\alpha\alpha' + B(\alpha\beta' + \beta\alpha') + C\beta\beta' = 0.$$

En posant $\alpha = \alpha' = 1$, $\beta = m$, $\beta' = m'$, cette relation prend la forme

$$Cmm' + B(m + m') + A = 0.$$

Si m est infini, on doit supposer $\alpha = 0$; dans ce cas

$$B\alpha' + C\beta' = 0$$

ou

$$B + Cm' = 0.$$

Dans le cas de la parabole, on peut poser

$$A = \varepsilon a^2, \qquad B = \varepsilon ab, \qquad C = \varepsilon b^2$$

et l'on obtient

$$(a\alpha' + b\beta')(a\alpha + b\beta) = 0,$$

ce qui donne

$$a\alpha' + b\beta' = 0.$$

On retrouve bien la propriété des diamètres de la parabole.

Diamètres conjugués.

298. *On nomme* DIAMÈTRES CONJUGUÉS *deux diamètres tels que chacun d'eux divise en parties égales les cordes parallèles à l'autre.*

Il est évident qu'une parabole n'admet pas de diamètres conjugués. Au contraire, comme nous allons le voir, toute conique à centre unique possède une infinité de systèmes de diamètres conjugués.

En effet, les paramètres directeurs (α', β') du diamètre conjugué aux cordes parallèles à la direction (α, β) sont définis par l'équation

$$(1) \qquad \alpha'\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \beta'\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = 0.$$

Les paramètres (α'', β'') du diamètre conjugué à la direction (α', β')

sont définis par l'équation

$$(2) \qquad \alpha'' \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha'} + \beta'' \frac{\partial \varphi}{\partial \beta'} = 0.$$

L'équation (1) peut s'écrire

$$(3) \qquad \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha'} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \beta'} = 0.$$

On ne peut supposer $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha'} = 0$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta'} = 0$, c'est-à-dire

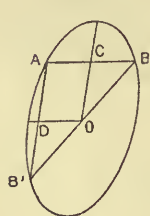
$$A\alpha' + B\beta' = 0, \qquad B\alpha' + C\beta' = 0,$$

car on suppose $AC - B^2 \neq 0$ et l'on n'a pas $\alpha' = \beta' = 0$.

Il en résulte que le déterminant des équations (2) et (3) est nécessairement nul, c'est-à-dire que $\alpha\beta'' - \beta\alpha'' = 0$: ce qui prouve que la direction (α'', β'') coïncide avec la direction (α, β). En d'autres termes, les paramètres (α, β) et (α', β'), vérifiant la relation (1), sont les paramètres directeurs de deux diamètres conjugués, et, comme on peut prendre α et β arbitrairement, il est ainsi prouvé qu'il y a une infinité de systèmes de diamètres conjugués.

On arrive d'ailleurs à cette conclusion par la Géométrie. Considérons en effet (*fig.* 85), par exemple, une ellipse ayant pour centre le point O et soit AB une corde quelconque appartenant à cette ellipse. On obtient le diamètre conjugué à AB en joignant le centre O de l'ellipse au milieu C de la corde AB. Soit B' le point diamétralement opposé à B; la corde AB' est parallèle à OC. Le diamètre OD conjugué à AB' s'obtient de même en joignant le centre au milieu D de la corde AB'; or la droite OD est parallèle à AB, donc OC et OD sont deux diamètres conjugués. Il existe donc une infinité de systèmes de diamètres conjugués dans toute conique à centre unique, car la construction précédente s'applique aussi à l'hyperbole.

Fig. 85.



299. *Cordes supplémentaires.* — On nomme ainsi deux cordes AB, AB' (*fig.* 85) obtenues en joignant un point A pris sur une conique aux deux extrémités d'un diamètre BB'.

1° *Deux cordes supplémentaires ont des directions conjuguées;* en effet, les cordes AB, AB′ sont respectivement parallèles aux diamètres OC, OD qui passent par leurs milieux, et nous venons de voir que ces diamètres sont conjugués.

2° *Réciproquement, si les directions des deux cordes* AB, AB′ *sont conjuguées,* BB′ *est un diamètre,* car la corde AB″, obtenue en joignant le point A au point B″ diamétralement opposé à B, a une direction conjuguée à AB; donc elle se confond avec AB′. B″ coïncide donc avec B′ et, par suite, BB′ est un diamètre.

3° *Deux cordes menées par les extrémités* B, B′ *d'un diamètre d'une conique, parallèlement à deux directions conjuguées par rapport à cette conique, se coupent sur cette même conique.* En effet, soit BA l'une de ces cordes, A le second point où elle coupe la conique (*fig.* 85); la droite B′A ayant une direction conjuguée à celle de la corde BA est la seconde corde, ce qui démontre la proposition.

Ces théorèmes se démontrent facilement par le calcul.

Réduction de l'équation d'une conique (axes obliques).

300. *Coniques à centre unique, rapportées à deux diamètres conjugués.* — Prenons pour axes de coordonnées deux diamètres conjugués; l'équation de la courbe sera de la forme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0,$$

puisque l'origine est le centre. Le diamètre conjugué à l'axe des x a pour équation

$$Ax + By = 0;$$

or ce diamètre doit être l'axe des y; donc $B = 0$; par suite, l'équation a la forme simple

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0.$$

Réciproquement, quels que soient les coefficients A, C, F, pourvu que A et C soient différents de zéro, cette équation représente une conique à centre unique rapportée à deux diamètres conjugués pris pour axes de coordonnées : cela est évident. Il y a une infinité de manières d'opérer cette réduction.

L'invariant δ se réduit à AC; donc la courbe représentée par cette équation est une *ellipse si* A *et* C *ont le même signe,* une *hyperbole quand* A *et* C *ont des signes contraires.* Dans le cas de l'ellipse, pour que la courbe soit réelle il faut que A et F aient des signes contraires. Si cette condition est remplie, les deux diamètres conjugués coupent l'ellipse en des points réels. Dans le cas de l'hyperbole, un seul des deux diamètres coupe la courbe en des points réels.

301. *Équation d'une conique rapportée à un diamètre et à la tangente à l'une de ses extrémités.* — Prenons pour origine des coordonnées un point O de la conique, le diamètre passant par O étant pris pour axe des x et la tangente au même point O étant l'axe des y. Le diamètre conjugué à l'axe des y a pour équation

$$Bx + Cy + E = 0.$$

Mais la tangente en O ayant une direction conjuguée à celle du diamètre qui passe par le point O, l'équation précédente doit se réduire à $y = 0$; donc $B = 0$, $E = 0$. Enfin, la courbe passant par l'origine : $F = 0$. Son équation est donc réduite à la forme

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx = 0.$$

Réciproquement, si l'équation d'une conique a la forme précédente, l'axe des x est le diamètre conjugué à la direction de l'axe des y et, comme la courbe passe par l'origine, la tangente en ce point est précisément l'axe des y.

Pour que l'équation précédente représente une parabole, il faut et il suffit que $AC = 0$; on ne peut supposer $C = 0$, car l'équation représenterait alors deux droites parallèles; donc on doit prendre $A = 0$, et l'équation d'une parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à l'extrémité de ce diamètre est de la forme

$$Cy^2 + 2Dx = 0.$$

La réduction précédente peut s'effectuer d'une infinité de manières.

Axes dans les courbes du second degré.

302. On appelle *axe* d'une courbe du second degré tout diamètre perpendiculaire aux cordes qu'il divise en deux parties égales. Un axe est donc un *axe de symétrie* et réciproquement.

La réciproque est en défaut dans le cas d'un système de deux droites rectangulaires; car chacune de ces droites est un axe de symétrie et n'est pas le diamètre des cordes parallèles à l'autre.

303. *Équation aux coefficients angulaires des axes d'une conique.* — Pour que m soit le coefficient angulaire d'un axe de la conique ayant pour équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

il faut et il suffit qu'il existe un nombre m' satisfaisant aux deux équations

$$A + B(m + m') + Cmm' = 0,$$
$$1 + (m + m')\cos\theta + mm' = 0,$$

θ désignant l'angle des axes de coordonnées; car, en vertu de ces équations, m et m' sont les coefficients angulaires de deux directions conjuguées par rapport à la conique donnée et rectangulaires. En éliminant m' entre les deux équations précédentes on obtient

$$(1) \qquad (B - C\cos\theta)m^2 + (A - C)m + A\cos\theta - B = 0.$$

Nous avons déjà discuté cette équation et prouvé qu'elle a ses racines réelles (car on suppose les coefficients A, B, C réels); les directions qu'elle détermine sont rectangulaires; ce sont les bissectrices des angles formés par les directions asymptotiques réelles ou imaginaires de la conique donnée.

Supposons qu'il s'agisse d'une conique à centre unique à distance finie : les diamètres ayant pour coefficients angulaires les racines m', m'' de l'équation (1) sont des axes. Toute conique du genre ellipse ou hyperbole admet donc deux axes qui forment un système de diamètres conjugués rectangulaires.

Lorsque la conique est un cercle, l'équation (1) disparaît : tous les diamètres du cercle sont des axes de symétrie.

304. *Équation du faisceau des axes d'une conique à centre.* — Soit m l'une des racines de l'équation (1); le diamètre conjugué à cette direction est un axe ayant pour équation

$$f'_x + mf'_y = 0. \tag{2}$$

En éliminant m entre les équations (1) et (2) on obtient l'équation du second degré

$$(B - C\cos\theta)f'^2_x - (A - C)f'_x f'_y + (A\cos\theta - B)f'^2_y = 0, \tag{3}$$

qui est vérifiée par les coordonnées d'un point quelconque appartenant à l'un ou à l'autre des axes; c'est donc l'équation du faisceau des deux axes.

305. *Axe de la parabole.* — La parabole ne peut avoir qu'un axe, qui est le diamètre conjugué aux cordes perpendiculaires à la direction asymptotique. Si l'on suppose l'équation de la parabole écrite sous la forme

$$(ax + by)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

quand les coordonnées sont rectangulaires, les paramètres de la perpendiculaire à la direction asymptotique sont a, b; donc l'axe a pour équation

$$af'_x + bf'_y = 0.$$

On peut écrire aussi

$$Af'_x + Bf'_y = 0,$$

ou encore

$$Bf'_x + Cf'_y = 0.$$

Si les coordonnées sont obliques, les paramètres de la direction perpendiculaire à la direction asymptotique sont $a - b\cos\theta$ et $b - a\cos\theta$; l'axe a donc pour équation, dans le cas général,

$$(a - b\cos\theta)f'_x + (b - a\cos\theta)f'_y = 0,$$

ou encore

$$(A - B\cos\theta)f'_x + (B - A\cos\theta)f'_y = 0,$$

ou bien

$$(B - C\cos\theta)f'_x + (C - B\cos\theta)f'_y = 0.$$

L'équation (1), trouvée plus haut (303), convient aussi à la parabole; en y remplaçant A, B, C par a^2, ab, b^2, on met l'équation (1) sous la forme

$$(a + bm)[m(a - b\cos\theta) + a\cos\theta - b] = 0.$$

On a bien ainsi deux directions perpendiculaires dont l'une est la direction asymptotique; le diamètre conjugué à la direction asymptotique est rejeté à l'infini. L'axe est le diamètre conjugué à l'autre direction.

306. *Sommets.* — On nomme sommet d'une courbe du second degré tout point commun à la courbe et à l'un de ses axes. Les axes d'une ellipse réelle la coupent en quatre points réels : l'ellipse a donc quatre sommets réels. Des deux axes d'une hyperbole, un seul la coupe en des points réels, puisque les deux axes forment un système de diamètres conjugués; donc l'hyperbole a deux sommets réels et deux sommets imaginaires.

L'axe d'une parabole la rencontre en un seul point à distance finie : donc la parabole n'a qu'un sommet.

Équation en S.

307. *Recherche des directions principales.* — Nous allons exposer une autre méthode pour déterminer les axes d'une conique.

On nomme *direction principale* toute direction qui est perpendiculaire au diamètre qui lui est conjugué. D'après cela, le diamètre conjugué à une direction principale est un axe, s'il n'est pas rejeté à l'infini.

Nous poserons

$$\varphi(x,y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$
$$\psi(x,y) \equiv x^2 + 2xy\cos\theta + y^2,$$

θ étant l'angle des axes.

Le diamètre conjugué à la direction (α, β), ayant pour équation

$$(1) \qquad x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + 2D\alpha + 2E\beta = 0,$$

la parallèle à ce diamètre menée par l'origine des coordonnées a pour équation

$$(2) \qquad x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta = 0.$$

La perpendiculaire à une droite peut être considérée comme étant conjuguée à cette droite par rapport à un cercle; il en résulte que la direction (α, β) sera une direction principale de la conique donnée si l'équation

$$(3) \qquad x\psi'_\alpha + y\psi'_\beta = 0$$

représente la même droite que l'équation (2). Il en résulte que les directions principales sont définies par l'équation

$$\text{(4)} \qquad \frac{\varphi'_\alpha}{\psi'_\alpha} = \frac{\varphi'_\beta}{\psi'_\beta}$$

ou, sous forme entière,

$$\varphi'_\alpha \psi'_\beta - \varphi'_\beta \psi'_\alpha = 0.$$

Mais on peut procéder autrement : pour que les équations (2) et (3) représentent la même droite, il faut et il suffit qu'il existe un facteur S, tel que l'on ait identiquement

$$\varphi'_\alpha = S\psi'_\alpha, \qquad \varphi'_\beta = S\psi'_\beta,$$

ou, en développant

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} (A - S)\alpha + (B - S\cos\theta)\beta = 0, \\ (B - S\cos\theta)\alpha + (C - S)\beta = 0. \end{cases}$$

Il s'agit de déterminer S de façon que ces deux équations linéaires et homogènes aient des solutions différentes de la solution $\alpha = \beta = 0$. S doit donc être une racine de l'équation

$$\text{(6)} \qquad (A - S)(C - S) - (B - S\cos\theta)^2 = 0.$$

C'est *l'équation en* S relative à la conique donnée : elle ne dépend que des coefficients des termes du second degré de l'équation de cette conique.

308. Discussion : 1° *Les racines de l'équation en* S *sont toujours réelles.* — En effet, le coefficient de S^2 étant égal à $\sin^2\theta$ est positif. En substituant à S, A puis C, on obtient successivement pour résultats : $-(B - A\cos\theta)^2$ et $-(B - C\cos\theta)^2$. Supposons d'abord $B - A\cos\theta \neq 0$ et $B - C\cos\theta \neq 0$ et soit, par exemple, $A \leqq C$; en substituant à S :

$$-\infty \quad A \quad C \quad +\infty,$$

on trouve les signes :

$$+ \quad - \quad - \quad +$$

L'équation (6) a donc une racine S′ plus petite que A et une racine S″ plus grande que C.

2° Supposons $B = A\cos\theta$, $B - C\cos\theta \neq 0$. Dans ce cas, l'équation (6) a encore deux racines inégales, dont l'une est égale à A.

3° $B = C\cos\theta$, $B - A\cos\theta \neq 0$. L'une des racines est égale à C, l'autre est différente de C.

4° Enfin, supposons $A = C = \frac{B}{\cos\theta}$. Dans ce cas, l'équation (6) devient

$$(A - S)^2 \sin^2\theta = 0;$$

ses deux racines sont égales à A.

En résumé, les racines de l'équation (6) sont réelles et inégales, excepté dans le cas du cercle; alors, elles sont toutes les deux égales à A.

Lorsque $\theta = 90°$, l'équation en S se réduit à

$$(A - S)(C - S) - B^2 = 0.$$

309. Théorème. — 1° *A une racine simple de l'équation en* S *correspond une direction principale unique.*

Soit S′ une racine simple et supposons d'abord cette racine différente de A et de C; les deux équations (5) deviennent identiques quand on y remplace S par S′. L'une quelconque de ces équations définit une direction principale unique qui est parallèle à la droite ayant pour équation

$$(A - S')x + (B - S'\cos\theta)y = 0.$$

Supposons $S' = A$ et, par suite, $B = A'\cos\theta$. La première des équations (5) disparaît identiquement; la seconde se réduit à $(C - A)y = 0$ ou $y = 0$.

2° *A une racine double correspondent toutes les directions du plan.* — En effet, si $A = C = \frac{B}{\cos\theta}$, en remplaçant S par A, les deux équations disparaissent. Toutes les directions d'un plan sont, en effet, des directions principales pour tout cercle tracé dans ce plan.

310. *Équation de l'axe conjugué à une direction principale.* — L'axe conjugué à la direction principale (α, β) fournie par une racine S a pour équation

$$S(x\psi'_\alpha + y\psi'_\beta) + 2D\alpha + 2E\beta = 0.$$

Pour que cet axe soit une droite déterminée et à distance finie, il faut et il suffit que l'un des coefficients $S\psi'_\alpha$, $S\psi'_\beta$ soit différent de zéro et, comme on ne peut supposer $\psi'_\alpha = 0$, $\psi'_\beta = 0$, il est nécessaire et suffisant que la racine S soit différente de zéro. Or l'équation (6) ne peut avoir de racine nulle que si $AC - B^2 = 0$. Donc, une courbe du genre ellipse ou hyperbole a deux axes. (Nous savons déjà que le cercle en a une infinité.)

En ce qui concerne la parabole, l'une des racines de l'équation (6) est nulle ; à cette racine correspond la direction asymptotique ; l'autre est égale à

$$\frac{A + C - 2B\cos\theta}{\sin^2\theta};$$

elle ne peut être nulle, car en remplaçant, par exemple, A, B, C par a^2, ab, b^2, le numérateur devient $a^2 - 2ab\cos\theta + b^2$, et il ne peut être nul, si l'on suppose a, b, c réels.

La parabole n'a donc qu'un axe, comme nous le savions déjà.

Enfin, dans le cas de deux droites parallèles, on trouve un axe confondu avec la ligne des centres ; l'axe conjugué à la direction asymptotique est indéterminé.

311. Théorème. — *Les directions principales qui correspondent à deux racines distinctes de l'équation en* S *sont rectangulaires.*

En effet, soient S, S' les deux racines de l'équation en S, que nous supposons inégales. On a, en nommant α, β et α', β' les paramètres des directions principales correspondantes,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = S\,\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'} = S'\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = S\,\frac{\partial\psi}{\partial\beta} \qquad\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\beta'} = S'\,\frac{\partial\psi}{\partial\beta'},$$

d'où l'on tire

$$\alpha'\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \beta'\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = S\left(\alpha'\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \beta'\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right),$$

$$\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial\beta'} = S'\left(\alpha\frac{\partial\psi}{\partial\alpha'} + \beta\frac{\partial\psi}{\partial\beta'}\right),$$

et, en retranchant membre à membre,

$$0 = (S - S')\left[\alpha'\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \beta'\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right],$$

et, comme on suppose $S - S' \neq 0$:

$$\alpha' \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \beta' \frac{\partial\psi}{\partial\beta} = 0;$$

ce qui démontre la proposition, car cette équation exprime que les directions considérées sont conjuguées dans le cercle.

On a aussi, d'après ce qui précède,

$$\alpha' \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \beta' \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = 0,$$

ce qui prouve que les deux directions principales sont conjuguées par rapport à la conique.

312. *Corollaire.* — Les axes sont parallèles aux directions principales; donc l'équation

$$\frac{\varphi'_x}{\psi'_x} = \frac{\varphi'_y}{\psi'_y},$$

ou, plus simplement, si les coordonnées sont rectangulaires,

$$\frac{\varphi'_x}{x} = \frac{\varphi'_y}{y}$$

représente le faisceau des parallèles aux axes de la conique, menées par l'origine des coordonnées.

313. *Nouvelle forme de l'équation du faisceau des axes.* — Pour plus de simplicité, supposons les coordonnées rectangulaires.

Soient α, β les paramètres directeurs d'un axe; cet axe est le diamètre conjugué des cordes qui lui sont perpendiculaires; son équation est donc

$$\frac{f'_x}{\alpha} = \frac{f'_y}{\beta};$$

mais la direction (α, β) est principale; donc

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\alpha} = \frac{\varphi'_\beta}{\beta}.$$

En éliminant α et β entre ces deux équations, on obtient

$$\frac{\varphi'_{f'_x}}{f'_x} = \frac{\varphi'_{f'_y}}{f'_y},$$

c'est-à-dire

$$\frac{Af'_x + Bf'_y}{f'_x} = \frac{Bf'_x + Cf'_y}{f'_y}.$$

314. L'équation en S exprime que le polynome

$$\varphi(x,y) - S\psi(x,y)$$

est un carré parfait; si l'on fait une substitution linéaire telle que

$$\varphi(x,y) \equiv \Phi(X, Y),$$

on aura identiquement

$$\varphi(x,y) - S(x^2 + 2xy\cos\theta + y^2) \equiv \Phi(X, Y) - S(X^2 + 2XY\cos\theta + Y^2).$$

Le discriminant du second membre est égal à celui du premier membre multiplié par le carré du module de la substitution; donc les racines de l'équation en S ne changent pas. C'est d'ailleurs ce que nous savons déjà, puisque leur somme est égale à $\frac{\eta}{\sin^2\theta}$ et leur produit à $\frac{\delta}{\sin^2\theta}$.

315. On traiterait d'une manière analogue ce problème : trouver un système de diamètres conjugués communs à deux coniques données; il suffirait de remplacer la fonction $\psi(x, y)$ relative au cercle par la fonction $\varphi_1(x, y)$ relative à la seconde conique; mais l'équation en S obtenue en égalant à zéro le discriminant de la forme $\varphi(x,y) - S\varphi_1(x, y)$ n'a plus nécessairement ses racines réelles. Nous allons reprendre d'ailleurs ces questions à un point de vue différent et montrer leur lien intime avec la théorie de l'involution.

Involution.

316. Nous rappellerons d'abord les propriétés fondamentales de l'involution.

Considérons deux points variables M, M′ situés sur un axe fixe X′X et soient x et x' les abscisses de ces points, comptées à partir d'une origine fixe. On dit que M et M′ décrivent une involution si leurs abscisses sont liées par une relation de la forme

$$A + B(x + x') + Cxx' = 0. \qquad (1)$$

S'il en est ainsi, à tout point M correspond un point M′ et réciproquement. Quand le point M occupe une position particulière A, le point M′ occupe une position déterminée B; ce qu'il importe de remarquer, et c'est là ce qui distingue l'involution de l'homographie, c'est que, si le point M vient en B,

le point M' sera en A, de sorte que les points M et M' ne peuvent être distingués l'un de l'autre; ils forment, en quelque sorte, un couple.

Il y a sur la droite X'X *deux points doubles* de l'involution définie par l'équation (1); leurs abscisses sont les racines de l'équation obtenue en posant $x = x'$, savoir :

$$A + 2Bx + Cx^2 = 0. \tag{2}$$

On voit que ces points doubles sont réels si $AC - B^2 < 0$, imaginaires si $AC - B^2 > 0$.

L'équation (1) peut prendre une forme très simple au moyen d'un changement d'origine. On peut, en effet, l'écrire ainsi :

$$(Cx + B)(Cx' + B) = B^2 - AC,$$

et, par suite, si l'on prend pour origine le point ayant pour abscisse $-\frac{B}{C}$, c'est-à-dire le milieu du segment déterminé par les points doubles de l'involution, en posant

$$x = -\frac{B}{C} + X, \qquad x' = -\frac{B}{C} + X',$$

l'équation (1) prend la forme plus simple

$$XX' = \frac{B^2 - AC}{C^2}. \tag{3}$$

Cette formule montre que l'on doit exclure le cas où $AC - B^2 = 0$.

Réciproquement, toute équation de cette forme définit une involution.

Supposons les points doubles réels, c'est-à-dire $B^2 - AC > 0$, et soit $\frac{B^2 - AC}{C^2} = h^2$; l'équation précédente devient

$$XX' = h^2 \tag{4}$$

et, par suite, les abscisses des points doubles sont égales à $+h$ et à $-h$ et l'équation précédente exprime cette propriété fondamentale de l'involution : les points doubles d'une involution sont conjugués harmoniques par rapport à deux points correspondants quelconques M, M' et, réciproquement, les couples de points conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes forment une involution.

Si les points doubles sont imaginaires, la relation (3) prend la forme

$$XX' = -h^2, \tag{5}$$

les abscisses des points doubles étant hi et $-hi$, et l'on peut encore dire que deux points correspondants M, M' forment, avec les points doubles, une division harmonique.

Il est facile de réaliser l'involution; en effet, il suffit de couper par une droite le système des cercles qui passent par deux points fixes A, B. Soient

M et M′ les points d'intersection de l'un de ces cercles avec la droite X′X, et P le point de rencontre de X′X et de AB. On a PM.PM′ = PA.PB.

Si les points A et B sont d'un même côté par rapport à X′X, on pourra mener par ces points deux cercles tangents à X′X; les points de contact ω, ω' seront les points doubles; nous savons déjà que tous les cercles de la famille considérée coupent à angle droit le cercle décrit sur $\omega\omega'$ comme diamètre.

Une involution est déterminée quand on connaît deux couples de points correspondants M, M′; N, N′.

En effet, en remplaçant dans l'équation (1) x et x' successivement par les abscisses des points donnés, on a deux relations pour déterminer les rapports de A, B, C. D'ailleurs, cette conclusion se tire encore de cette remarque : faisons passer un cercle quelconque par M et M′ et un second cercle par N, N′ et un point pris arbitrairement sur le premier, et soit P le point de rencontre de la droite X′X, sur laquelle sont tracés les points donnés, avec l'axe radical de ces deux cercles. Tout cercle passant par les points communs aux deux premiers coupera X′X en deux points R, R′ tels que

$$\mathrm{PR.PR'} = \mathrm{PM.PM'} = \mathrm{PN.PN'};$$

ce qui démontre la proposition.

Cela posé, au lieu de donner les abscisses de deux points correspondants d'une involution, on peut se donner les coefficients de l'équation du second degré qui a pour racines ces abscisses. Soient

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

les équations définissant deux couples d'une involution; soit

$$a''x^2 + b''x + c'' = 0$$

une équation définissant deux autres points. Pour que ces points soient deux points correspondants de l'involution déterminée par les deux premiers couples de points, il faut et il suffit qu'il existe des nombres A, B, C tels que

$$\begin{aligned} \mathrm{A}a - \mathrm{B}b + \mathrm{C}c &= 0,\\ \mathrm{A}a' \quad \mathrm{B}b' + \mathrm{C}c' &= 0,\\ \mathrm{A}a'' - \mathrm{B}b'' + \mathrm{C}c'' &= 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} a'' &= la + l'a',\\ b'' &= lb + l'b',\\ c'' &= lc + l'c', \end{aligned}$$

l, l' étant des constantes et, par suite, l'équation du second degré qui définit un couple variable de points correspondants est de la forme

$$(6)\qquad (ax^2 + bx + c) + \lambda(a'x^2 + b'x + c') = 0,$$

λ désignant un paramètre variable.

Réciproquement, étant donnée une pareille équation, on peut toujours déterminer A, B, C tels que l'on ait, quel que soit λ,

$$A(a + \lambda a') - B(b + \lambda b') + C(c + \lambda c') = 0,$$

ce qui exige que

$$Aa - Bb + Cc = 0, \qquad Aa' - Bb' + Cc' = 0,$$

et ce système détermine les rapports de A, B, C pourvu que a, b, c ne soient pas proportionnels à a', b', c'.

Enfin, nous allons encore traiter le problème suivant : *Trouver un couple commun à deux involutions tracées sur une même droite.*

Soient p, p' les points doubles de la première involution, q, q' les points doubles de la seconde et, enfin, soient m, m' deux points correspondants communs aux deux involutions. Les deux divisions (p, p', m, m') et (q, q', m, m') sont des divisions harmoniques; donc m et m' sont les points doubles de l'involution définie par les deux couples (p, p'), (q, q').

Il s'agit de savoir dans quel cas m et m' sont réels.

Soient, plus généralement,

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

les équations qui définissent deux couples de points donnés p, p'; q, q'. L'involution définie par ces deux couples a pour équation

$$(a + \lambda a')x^2 + (b + \lambda b')x + c + \lambda c' = 0;$$

les racines de cette équation sont égales si

$$(b + \lambda b')^2 - 4(a + \lambda a')(c + \lambda c') = 0.$$

Les points doubles m, m' seront réels si les racines de cette équation sont réelles, c'est-à-dire si l'on a

$$(2ca' + 2ac' - bb')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c') > 0.$$

Or, si l'on nomme x_1, x_2 les abscisses des points p, p' et x_3, x_4 celles des points q, q', le premier membre de cette inégalité a pour valeur le produit

$$4a'^2(a\,x_3^2 + b\,x_3 + c)(a\,x_4^2 + b\,x_4 + c),$$

ou le produit égal

$$4a^2(a'x_1^2 + b'x_1 + c')(a'x_2^2 + b'x_2 + c');$$

d'où il résulte immédiatement que l'inégalité est vérifiée si l'un des couples

p, p' ou q, q' est composé de points imaginaires conjugués ou, si les deux couples sont réels, quand ils sont extérieurs ou intérieurs. L'inégalité est renversée quand, les deux couples étant réels, ils empiètent l'un sur l'autre, de façon qu'un seul des points appartenant à l'un des couples soit situé entre les points de l'autre couple.

317. *Faisceaux en involution.* — Soient OM, OM′ deux droites variables issues d'un point fixe O; m, m' étant les coefficients angulaires de OM et OM′ par rapport à un système d'axes quelconques; si m et m' sont liés par une relation de la forme

$$A + B(m + m') + Cmm' = 0, \tag{7}$$

on voit qu'à chaque position de la droite OM correspond une position unique et déterminée de OM′ et réciproquement. En outre, si OM′ prend une position OA′ quand OM coïncide avec une droite OA, quand OM coïncidera avec OA′, OM′ prendra la position OA. On dit que les droites OM, OM′ forment un faisceau en involution. Il est clair que les rayons de ce faisceau tracent sur une sécante une involution ponctuelle. Réciproquement, si l'on joint à un point fixe les points correspondants d'une involution ponctuelle, on détermine un faisceau en involution. D'ailleurs, si l'on prend pour axe des y une parallèle à la droite sur laquelle est fixée la ponctuelle, l'origine ω des segments de cette ponctuelle étant sur l'axe des x, le coefficient angulaire d'une droite OM étant précisément égal au segment ωM, on a, entre les coefficients angulaires m, m', la même relation qu'entre les segments ωM, ωM′, c'est-à-dire une relation de la forme indiquée plus haut (7).

D'après cela, la théorie des faisceaux en involution se ramène immédiatement à celle des ponctuelles en involution.

318. Cela posé, il revient évidemment au même de dire que deux droites OM, OM′ sont deux rayons conjugués d'une involution, ou de dire que ces droites sont parallèles à deux diamètres conjugués d'une conique, comme cela résulte d'ailleurs de la forme de l'équation (7).

Les rayons doubles de l'involution formée par les diamètres conjugués d'une conique sont les asymptotes de cette conique.

Étant données deux coniques concentriques, pour trouver un système de diamètres conjugués communs, il suffit de trouver un couple de rayons correspondants communs à deux faisceaux en involution. Il résulte immédiatement de la discussion que nous avons faite plus haut que les rayons doubles de l'involution formée par les asymptotes des deux coniques seront réels si l'une des coniques est une ellipse ou si les deux coniques sont des hyperboles, pourvu que les asymptotes de l'une d'elles soient toutes les deux à l'intérieur de deux des angles opposés par le sommet, formés par les asymptotes de l'autre.

En particulier, si l'une des coniques est un cercle, les diamètres conjugués communs au cercle et à la conique seront réels; ce sont les axes de la

conique. On retrouve ainsi l'équation en S; en effet, les directions asymptotiques de la conique et celles du cercle étant définies par les équations

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0, \qquad x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 = 0,$$

on doit déterminer S de façon que

$$(8) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - S(x^2 + 2xy\cos\theta + y^2) = 0$$

soit un carré parfait et, par suite, S doit être racine de l'équation

$$(9) \qquad (A - S)(C - S) - (B - S\cos\theta)^2 = 0.$$

Le polynome (8) étant un carré, sa racine carrée est proportionnelle à chacune de ses dérivées et, par suite, les axes sont parallèles aux droites représentées par l'une ou l'autre des équations

$$(A - S)x + (B - S\cos\theta)y = 0, \qquad (B - S\cos\theta)x + (C - S)y = 0,$$

dans lesquelles on remplace successivement S par les racines de l'équation (9).

Deux diamètres conjugués quelconques d'une conique forment avec ses asymptotes un faisceau harmonique, puisque les asymptotes sont les rayons doubles de l'involution déterminée par les diamètres conjugués.

On nomme *hyperbole équilatère* une hyperbole dont les asymptotes sont rectangulaires (nous verrons bientôt la raison de cette dénomination). Il résulte de ce qu'on vient de dire que les asymptotes d'une hyperbole équilatère sont les bissectrices des angles formés par deux diamètres conjugués quelconques. Il en résulte immédiatement que, si deux diamètres d'une hyperbole équilatère sont conjugués, les diamètres respectivement perpendiculaires aux premiers sont aussi conjugués et, réciproquement, si l'on peut trouver deux systèmes de diamètres conjugués (D, D') et (Δ, Δ'), D étant perpendiculaire à Δ et D' à Δ', la conique est une hyperbole équilatère.

Les asymptotes d'une hyperbole équilatère sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites isotropes. On peut énoncer ainsi cette proposition : la droite de l'infini coupe un cercle et une hyperbole équilatère quelconques en quatre points conjugués harmoniques; et, réciproquement, si les points à l'infini d'une conique sont conjugués harmoniques par rapport aux points cycliques, cette conique est une hyperbole équilatère. On peut encore dire que les droites isotropes menées par le centre d'une hyperbole équilatère forment un système de diamètres conjugués.

EXERCICES.

1. Le lieu du centre des moyennes distances des points d'intersection d'une courbe algébrique et d'une sécante variable de direction donnée est une droite (diamètre de Newton). Examiner le cas d'une direction asymptotique.

2. Étant donnée une courbe algébrique, trouver le lieu du conjugué harmonique de l'infini sur chaque sécante parallèle à une direction donnée.

3. Soit M un point d'une courbe algébrique donnée. Le lieu des milieux des cordes parallèles à la tangente en M passe par ce point. Trouver le coefficient angulaire de la tangente en M à ce lieu.

4. Les axes étant rectangulaires, on considère la conique définie par l'équation

$$[(x-a)^2+(y-b)^2-c^2](1+m^2)-(y-mx)^2=0,$$

dans laquelle a, b, c sont des constantes et m variable. Montrer que l'axe de la parabole représentée par cette équation passe par un point fixe.

(École navale.)

5. On donne une parabole et un point fixe dans son plan. Un angle droit se meut dans le plan de la courbe, de manière que le sommet de cet angle décrive la directrice de la parabole et que l'un de ses côtés passe constamment par le point fixe donné. On demande le lieu des milieux des cordes interceptées par la parabole sur l'autre côté de l'angle. Lorsque la position du point fixe varie, le lieu obtenu se modifie. Quelle ligne décrit le sommet de ce lieu, lorsque le point fixe décrit une perpendiculaire à l'axe de la parabole donnée? (École centrale, 1865.)

6. Exprimer qu'une droite donnée par son équation est un axe de symétrie d'une conique.

— On identifie l'équation de la droite avec celle du diamètre conjugué à la direction perpendiculaire.

CHAPITRE XI.

RÉDUCTION DE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ, AVEC DES AXES RECTANGULAIRES.

Première méthode : par l'équation en S.

319. Nous supposerons les racines S_1, S_2 de l'équation en S distinctes. Supposons en outre, par exemple, $S_1 \neq A$. L'équation

$$(A-S_1)x+(B-S_1\cos\theta)y=0$$

définit une direction *principale*. Prenons sur cette droite un point D à l'unité de distance de l'origine et soient (α, β) les coordonnées du point D; soit de même E le point pris à l'unité de distance de l'origine sur la perpendiculaire menée par l'origine à la droite OD et soient α', β' les coordonnées du point E. La direction OE est la seconde direction principale, qui correspond à S_2. Prenons pour nouvel axe $\overline{OX}$ la demi-droite $\overline{OD}$, et pour axe $\overline{OY}$ la demi-droite $\overline{OE}$; les formules de transformation sont

$$x = \alpha X + \alpha' Y, \qquad y = \beta X + \beta' Y,$$

ce qui donne

$$\varphi(x, y) = \varphi(\alpha, \beta) X^2 + (\alpha' \varphi'_\alpha + \beta' \varphi'_\beta) XY + \varphi(\alpha', \beta') Y^2.$$

Nous savons que $\alpha' \varphi'_\alpha + \beta' \varphi'_\beta = 0$; en second lieu,

$$2\varphi(\alpha, \beta) = \alpha\varphi'_\alpha + \beta\varphi'_\beta = S_1(\alpha\psi'_\alpha + \beta\psi'_\beta) = 2 S_1 \psi(\alpha, \beta).$$

Mais $\psi(\alpha, \beta) = 1$, donc $\varphi(\alpha, \beta) = S_1$. Parcillement $\varphi(\alpha', \beta') = S_2$ et, par suite,

$$\varphi(\alpha, \beta) \equiv S_1 X^2 + S_2 Y^2. \tag{1}$$

On peut remarquer que, pour faire cette transformation, il n'est pas nécessaire de calculer les valeurs de α et β, mais seulement leur rapport, et de même à l'égard de α' et β'.

Si $S_1 = S_2$, en prenant pour nouveaux axes deux droites rectangulaires quelconques menées par l'origine, on a identiquement

$$\varphi(x, y) \equiv A(X^2 + Y^2) \equiv S_1(X^2 + Y^2).$$

La transformation (1) est générale.

320. *Conique à centre unique.* — Considérons maintenant une conique à centre unique à distance finie, ayant pour équation

$$f(x, y) = 0.$$

Nous cherchons d'abord les coordonnées x_0, y_0 du centre, que nous prenons pour nouvelle origine en conservant la direction des axes primitifs; nous posons $x = x_0 + x'$, $y = y_0 + y'$, et nous obtenons ainsi

$$f(x, y) \equiv \varphi(x', y') + \frac{\Delta}{\delta}.$$

Enfin nous ferons tourner les axes en appliquant la transformation précédente (1); les nouveaux axes de coordonnées seront les axes de symétrie et nous aurons l'identité

$$f(x,y) \equiv S_1 X^2 + S_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta}.$$

L'équation réduite est donc

$$S_1 X^2 + S_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

321. *Système de deux droites parallèles.* — On transporte l'origine en un point quelconque (x_0, y_0) de la ligne des centres en conservant la direction des axes primitifs, ce qui donne

$$f(x_0 + x', y_0 + y') \equiv \varphi(x', y') + F_1.$$

Nous savons déjà calculer F_1; on a, par exemple,

$$F_1 = D x_0 + E y_0 + F.$$

L'une des racines de l'équation en S, S_1 par exemple, est nulle. Changeant la direction des axes, l'axe OX correspondant à la racine nulle et OY à la racine S_2, on obtient, en appliquant la formule (1),

$$f(x, y) \equiv S_2 Y^2 + F_1.$$

L'équation réduite est donc

$$S_2 Y^2 + F_1 = 0.$$

322. *Parabole.* — L'une des racines de l'équation en S est nulle, soit $S_1 = 0$. On a, comme on l'a vu,

$$S_2 = \frac{\eta}{\sin^2\theta}.$$

Prenons pour axe OX la droite ayant la direction qui correspond à la racine nulle, pour axe OY celle qui correspond à S_2, l'origine étant conservée; on obtiendra ainsi

$$\varphi(x, y) \equiv S_2 Y^2.$$

Mais il faut calculer les paramètres α, β et α', β' des deux directions principales. En supposant $A \neq 0$, on a

$$A\alpha + B\beta = 0.$$

Posons $\alpha = \lambda B$, $\beta = -\lambda A$, et portons ces valeurs dans la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta = 1;$$

on trouve ainsi

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{R},$$

en posant

$$\varepsilon = \pm 1, \qquad R = +\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta} = +\sqrt{A r_1}.$$

On a ensuite

$$(A - S_2)\alpha' + (B - S_2\cos\theta)\beta' = 0,$$

d'où

$$\alpha' = \mu(B - S_2\cos\theta), \qquad \beta' = -\mu(A - S_2),$$

et, en tenant compte de la condition

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + 2\alpha'\beta'\cos\theta = 1,$$

on obtient

$$\mu = \varepsilon' \frac{A\sin\theta}{R(A\cos\theta - B)} \qquad (\varepsilon' = \pm 1).$$

Les formules de transformation

$$x = \alpha X + \alpha' Y, \qquad y = \beta X + \beta' Y$$

donnent

$$f(x, y) \equiv S_2 Y^2 + 2(D\alpha + E\beta)X + 2(D\alpha' + E\beta')Y + F.$$

Remarquons que le coefficient de X ne peut être nul, car il faudrait supposer

$$D\alpha + E\beta = 0, \qquad A\alpha + B\beta = 0,$$

d'où l'on déduirait $AE - BD = 0$; ce qui est contraire à notre hypothèse, puisqu'il s'agit d'une parabole proprement dite.

La nouvelle équation est donc

$$S_2 Y^2 + 2D_1 X + 2E_1 Y + F = 0 \qquad D_1 \neq 0).$$

Or on peut écrire ainsi cette équation :

$$S_2\left(Y + \frac{E_1}{S_2}\right)^2 + 2D_1\left(X + \frac{F}{2D_1} - \frac{E_1^2}{2D_1 S_2}\right) = 0;$$

par conséquent, si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point ayant pour coordonnées

$$X_1 = -\frac{F}{2D_1} + \frac{E_1^2}{2D_1 S_2}, \qquad Y_1 = -\frac{E_1}{S},$$

en posant

$$X = X_1 + X', \qquad Y_1 = Y_1 + Y',$$

l'équation de la parabole prend la forme réduite

$$S_2 Y'^2 + 2 D_1 X' = 0.$$

Il importe de remarquer que les coefficients de l'équation réduite sont les mêmes que ceux de l'équation obtenue après la première transformation, de sorte que, pour les obtenir, le calcul de α' et β' est inutile; ce calcul n'intervient que pour la détermination des coordonnées X_1, Y_1, qui sont les coordonnées du sommet. Le nouvel axe des X' est l'axe de la parabole, l'axe des Y' est la tangente au sommet.

DEUXIÈME MÉTHODE : PAR LA TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

323. Si les axes auxquels la courbe est rapportée sont obliques, on peut d'abord remplacer l'axe des y par une perpendiculaire à l'axe des x menée par l'origine, en posant

$$x + y\cos\theta = X, \qquad y\sin\theta = Y.$$

Nous supposerons cette première transformation effectuée, si elle est nécessaire, et nous partirons de l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

rapportée à deux axes rectangulaires.

324. 1° *Conique à centre.* — On transporte d'abord les axes parallèlement à eux-mêmes, de façon que la nouvelle origine soit le centre de la courbe donnée. La nouvelle équation sera, en désignant encore les nouvelles coordonnées par x, y pour simplifier l'écriture,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Cela étant, faisons tourner les axes d'un angle α autour du centre en posant

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \qquad y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha.$$

On obtiendra l'équation

$$A'X^2 + C'Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

si l'on pose

(1) $$A' = A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha,$$

(2) $$C' = A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha,$$

et si l'on détermine α en écrivant que le coefficient de XY est nul, c'est-à-dire

(3) $$(C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0.$$

En divisant le premier membre de cette équation par $\cos^2\alpha$, on obtient une équation en $\tan\alpha$ qui donne les coefficients angulaires des axes; équation que nous avons déjà obtenue plus haut. On peut procéder autrement; on déduit, en effet, immédiatement de l'équation précédente,

(4) $$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}.$$

Soit φ l'un des angles ayant pour tangente $\frac{2B}{A-C}$; on peut supposer que cet angle soit compris entre -90° et $+90^\circ$: il sera déterminé par les Tables trigonométriques; on aura ensuite

$$2\alpha = \varphi + k.180^\circ,$$

ou

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\varphi + k.\ 90^\circ,$$

ce qui donne, pour le nouvel axe OX, quatre directions correspondant aux angles

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}\varphi, \qquad \alpha_2 = \tfrac{1}{2}\varphi + 90^\circ, \qquad \alpha_3 = \tfrac{1}{2}\varphi + 180^\circ, \qquad \alpha_4 = \tfrac{1}{2}\varphi + 270^\circ.$$

Supposons que l'on ait adopté l'une de ces solutions et soit α l'angle choisi; il s'agit de calculer A' et C'. On déduit des équations (1) et (2)

(5) $$A' + C' = A + C, \qquad A' - C' = (A - C)\cos 2\alpha + 2B\sin 2\alpha.$$

L'équation (4) donne

$$\frac{\sin 2\alpha}{2B} = \frac{\cos 2\alpha}{A - C} = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Tirant de ces équations $\sin 2\alpha$ et $\cos 2\alpha$, et portant les valeurs

trouvées dans l'expression de $A' - C'$, on obtient

$$(6) \qquad A' - C' = \varepsilon\sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}.$$

Connaissant α, on connaît les signes de $\sin 2\alpha$ et de $\cos 2\alpha$, par conséquent ε est déterminé.

Si, au contraire, on veut que $A' - C'$ ait un signe déterminé, on se donnera ε et, par suite, les signes de $\sin 2\alpha$ et $\cos 2\alpha$; on déterminera ensuite α par la condition que $\sin 2\alpha$ ait le signe voulu.

On peut encore remarquer que les équations (5) et (6) donnent

$$(7) \qquad A'C' = AC - B^2.$$

Les formules (5) et (7) nous étaient déjà connues.

2° On procédera d'une façon analogue dans le cas de deux *droites parallèles*.

3° *Parabole.* — Nous supposerons l'équation de la parabole mise sous la forme

$$(ax + by)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Faisons tourner les axes d'un angle α; en employant les formules de transformation connues, on obtient l'équation

$$[x'(a\cos\alpha + b\sin\alpha) + y'(b\cos\alpha - a\sin\alpha)]^2$$
$$+ 2(D\cos\alpha + E\sin\alpha)x' + 2(E\cos\alpha - D\sin\alpha)y' + F = 0.$$

Nous déterminerons α par la condition que le terme en $x'y'$ manque dans la nouvelle équation; pour cela, il faut et il suffit que le coefficient de l'une des variables manque dans le crochet. Nous poserons

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = 0,$$

d'où

$$\frac{\sin\alpha}{-a} = \frac{\cos\alpha}{+b} = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

En substituant dans l'équation précédente, on obtient

$$(a^2 + b^2)y'^2 + 2\frac{bD - aE}{\varepsilon\sqrt{a^2 + b^2}}x' + 2\frac{bE + aD}{\varepsilon\sqrt{a^2 + b^2}}y' + F = 0.$$

On sait déjà que le coefficient de x' ne peut être nul. On voit que

la position du nouvel axe des x est déterminée, puisque

$$\tang\alpha = -\frac{a}{b}.$$

Mais on peut choisir arbitrairement la direction positive, et, par suite, déterminer ε. L'équation ayant la forme

$$(a^2+b^2)y'^2+2D_1x'+2E_1y'+F=0,$$

on achèvera, comme plus haut (322), en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes au sommet de la parabole; l'équation réduite sera

$$(a^2+b^2)Y^2+2D_1X=0$$

TROISIÈME MÉTHODE : USAGE DES INVARIANTS.

325. *Conique à centre.* — On transporte d'abord les axes au centre (x_0, y_0) sans changer leurs directions, en posant

$$x = x_0 + x', \qquad y = y_0 + y',$$

ce qui donne, comme on l'a vu,

$$f(x,y) \equiv \varphi(x',y') + \frac{\Delta}{\delta}.$$

Cela étant, changeons la direction des axes et prenons pour axes de coordonnées les axes de la conique, ce qui donne une identité de la forme

(1) $$\varphi(x',y') \equiv A'X^2 + C'Y^2,$$

de sorte que l'équation de la conique sera

$$A'X^2 + C'Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0:$$

il s'agit de calculer A' et C'.

Pour cela, remarquons que si θ est l'angle des axes primitifs

(2) $$x'^2 + 2x'y'\cos\theta + y'^2 \equiv X^2 + Y^2.$$

On déduit des équations (1) et (2), S étant un paramètre arbitraire,

$$(A-S)x'^2 + 2(B - S\cos\theta)x'y' + (C-S)y'^2 \equiv (A'-S)X^2 + (C'-S)Y^2.$$

Mais le discriminant de $\varphi(x',y') - S\psi(x',y')$ est un invariant; on en conclut que les équations

$$(A-S)(C-S) - (B - S\cos\theta)^2 = 0, \qquad (A'-S)(C'-S) = 0$$

sont identiques. Les racines de l'équation en S, relative à la conique donnée, sont donc précisément les coefficients A', C' qu'il s'agit de calculer. Soient S_1, S_2 ces racines : posons $A' = S_1$, $C' = S_2$; on a ainsi

$$(A - S_1)x'^2 + 2(B - S_1\cos\theta)x'y' + (C - S_1)y'^2 \equiv (S_2 - S_1)Y^2.$$

Donc l'équation

$$(A - S_1)x'^2 + 2(B - S_1\cos\theta)x'y' + (C - S_1)y'^2 = 0$$

représente deux droites confondues avec le nouvel axe des X. Le premier membre étant un carré parfait, sa racine carrée est identique, à un facteur près, à l'une ou à l'autre de ses dérivées; par exemple, si $A - S_1 \neq 0$, l'équation du nouvel axe des X est

$$(A - S_1)x' + (B - S_1\cos\theta)y' = 0.$$

Si cette équation disparaissait, la demi-dérivée par rapport à y' se réduirait à $(C - A)y'$, et, par suite, le nouvel axe des X serait parallèle à l'ancien.

326. *Deux droites parallèles.* — Supposons $A \neq 0$; la ligne des centres a pour équation

$$Ax + By + D = 0.$$

En prenant cette droite pour axe des X, l'axe des Y étant une perpendiculaire, on aura, pour équation réduite,

$$S_2 Y^2 + F_1 = 0,$$

et nous savons que

$$F_1 = \frac{\dfrac{\partial\Delta}{\partial A} + \dfrac{\partial\Delta}{\partial C} + \dfrac{\partial\Delta}{\partial B}\cos\theta}{\eta}.$$

Si l'on nomme $2d$ la distance des deux parallèles, on a

$$S_2 d^2 + F_1 = 0,$$

ou

$$\frac{\eta d^2}{\sin^2\theta} + \frac{\dfrac{\partial\Delta}{\partial A} + \dfrac{\partial\Delta}{\partial C} + \dfrac{\partial\Delta}{\partial B}\cos\theta}{\eta} = 0,$$

donc

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A} + \frac{\partial\Delta}{\partial C} + \frac{\partial\Delta}{\partial B}\cos\theta = -\eta\,\frac{\eta}{\sin^2\theta}\,d^2.$$

Le premier membre est donc un invariant. Quand on suppose $\delta = 0$, $\Delta = 0$, l'expression

$$\frac{\dfrac{\partial\Delta}{\partial A} + \dfrac{\partial\Delta}{\partial C} + \dfrac{\partial\Delta}{\partial B}\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

reste invariable si l'on fait un changement de coordonnées.

327. *Parabole.* — Nous savons former l'équation de l'axe; si l'équation de la parabole est mise sous la forme

$$(ax+by)^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

l'équation de l'axe sera

$$ax+by+h=0,$$

h étant un coefficient que l'on peut calculer. On obtiendra le sommet en prenant l'intersection de l'axe avec la parabole ou, plus simplement, avec la droite représentée par l'équation

$$h^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

En prenant pour axe des X l'axe de la parabole et pour axe des Y la perpendiculaire à l'axe menée par le sommet, c'est-à-dire la tangente au sommet, l'équation de la parabole sera de la forme

$$C'Y^2+2D'X=0.$$

Il s'agit de calculer C′ et D′. On a identiquement

$$f(x,y)\equiv C'Y^2+2D'X.$$

Or, on sait que $\frac{\eta}{\sin^2\theta}$ et $\frac{\Delta}{\sin^2\theta}$ restent invariables; donc

$$C'=\frac{\eta}{\sin^2\theta}=S_2,\qquad -C'D'^2=\frac{\Delta}{\sin^2\theta},$$

et, par conséquent, $D'^2=\frac{-\Delta}{S_2\sin^2\theta}$. On ne détermine que le carré de D′; par suite, la valeur absolue de D′ est seule connue; cela tient à ce que l'on peut choisir arbitrairement la direction positive de l'axe des X et un changement de sens des X positifs amène un changement de signe du coefficient de X.

On a ensuite

$$\frac{D'^2}{C'^2}=\frac{-\Delta\sin^2\theta}{\eta^3}.$$

On peut donc enfin mettre l'équation de la parabole sous la forme réduite

$$Y^2=2pX,$$

en posant

$$p=\pm\frac{(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\sin^2\theta}{\eta^{\frac{3}{2}}}.$$

La valeur absolue de la constante p se nomme le *paramètre* de la parabole.

328. *Autre méthode relative à la parabole.* — Nous ferons connaître

une dernière méthode de réduction relative à la parabole. Soit

$$(ax+by)^2+2Dx+2Ey+F=0$$

l'équation d'une parabole. Les équations

$$ax+by=0, \qquad 2Dx+2Ey+F=0$$

représentent : la première, un diamètre; la seconde, la tangente à l'extrémité de ce diamètre. Si ces deux droites étaient rectangulaires, on connaîtrait ainsi l'axe et la tangente au sommet. L'équation de l'axe de la parabole est de la forme

(1) $$ax+by+\lambda=0,$$

ce qui conduit à écrire l'équation de la parabole de cette manière

$$(ax+by+\lambda)^2+2(D-a\lambda)x+2(E-b\lambda)y+F-\lambda^2=0.$$

L'équation a gardé sa forme primitive, de sorte que l'on a conservé en évidence les premiers membres des équations d'un diamètre et de la tangente à son extrémité.

1° Supposons les coordonnées rectangulaires et écrivons que l'équation

(2) $$2(D-a\lambda)x+2(E-b\lambda)y+F-\lambda^2=0$$

représente une perpendiculaire au diamètre représenté par l'équation (1). La condition

$$a(D-a\lambda)+b(E-b\lambda)=0$$

détermine λ; l'axe de la parabole a donc pour équation

$$ax+by+\frac{aD+bE}{a^2+b^2}=0,$$

et la tangente au sommet

$$2\,\frac{Db-aE}{a^2+b^2}(bx-ay)+F-\frac{(aD+bE)^2}{(a^2+b^2)^2}=0.$$

Quand l'équation de la parabole est sous la forme $Ax^2+2Bxy+\ldots=0$, ces équations deviennent, en supposant $A\neq 0$,

$$Ax+By+\frac{AD+BE}{A+C}=0,$$

$$2(A+C)[(CD-BE)x+(AE-BD)y]$$
$$+F(A+C)^2-(AD^2+CE^2+2BDE)=0.$$

Il résulte de là que les coordonnées du sommet sont des fonctions rationnelles des coefficients de l'équation.

Prenons pour axe des X l'axe de la parabole et pour axe des Y la tangente

au sommet, on aura, pour un point quelconque du plan,

$$ax + by + \lambda = Y\sqrt{a^2 + b^2},$$

$$2(D - a\lambda)x + 2(E - b\lambda)y + F - \lambda^2 = 2X\sqrt{(D - a\lambda)^2 + (E - b\lambda)^2}.$$

Pour tout point (x, y) de la parabole, l'équation suivante est vérifiée :

$$(a^2 + b^2)Y^2 \pm 2X\sqrt{(D - a\lambda)^2 + (E - b\lambda)^2} = 0.$$

Or,

$$\frac{D - a\lambda}{b} = \frac{E - b\lambda}{-a} = \frac{Db - Ea}{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{(D - a\lambda)^2 + (E - b\lambda)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

donc l'équation réduite est

$$Y^2 - 2pX,$$

en posant

$$p = \pm \frac{Db - Ea}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

2° Supposons les axes obliques. On détermine d'abord λ par la condition

$$a(D - a\lambda) + b(E - b\lambda) - [a(E - b\lambda) + b(D - a\lambda)]\cos\theta = 0.$$

On écrit ensuite les formules de transformation :

$$ax + by + \lambda = Y\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta},$$

$$2(D - a\lambda)x + 2(E - b\lambda)y + F - \lambda^2$$
$$= 2X\sqrt{(D - a\lambda)^2 + (E - b\lambda)^2 - 2(D - a\lambda)(E - b\lambda)\cos\theta}.$$

Puis

$$\frac{D - a\lambda}{b - a\cos\theta} = \frac{E - b\lambda}{b\cos\theta - a} = \frac{Db - Ea}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$
$$= \frac{\sqrt{(D - a\lambda)^2 + (E - b\lambda)^2 - 2(D - a\lambda)E - b\lambda)\cos\theta}}{\sin\theta\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}}.$$

On obtient donc l'équation

$$Y^2 - 2pX,$$

avec la condition

$$p = \pm \frac{(Db - Ea)\sin^2\theta}{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

EXERCICES.

1. Rapporter à ses axes de symétrie la conique ayant pour équation $x^2 + y^2 = 1$, l'angle des axes coordonnés θ étant quelconque. Appliquer à cet exemple les différentes méthodes et supposer ensuite $\theta = \frac{\pi}{3}$.

2. Même question que pour $x^2 - y^2 = 1$.

3. Réduction de l'équation $(ax + by + c)^2 \pm (a'x + b'y + c')^2 = 1$, les axes étant rectangulaires.

4. Réduction de l'équation $(x-a)^2+(y-b)^2=(lx+my+h)^2$ (axes rectangulaires).

5. Même question pour l'équation

$$(x-a^2)+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\theta=(lx+my+h)^2,$$

θ désignant l'angle des axes.

6. Réduction de l'équation $x^2+4xy+y^2-2x+1=0$, $\left(\theta=\frac{\pi}{3}\right)$. Former l'équation en S.

7. Réduction de l'équation $(2x+y+1)^2=x-2y$, $\left(1^\circ\ \theta=\frac{\pi}{2};\ 2^\circ\ \theta=\frac{\pi}{3}\right)$.

CHAPITRE XII.

LONGUEUR DES AXES D'UNE CONIQUE. THÉORÈMES D'APOLLONIUS.

Équation aux carrés des longueurs des demi-axes d'une conique à centre.

329. L'équation d'une conique à centre unique, rapportée à ses axes de symétrie, est, comme nous savons,

$$S_1x^2+S_2y^2+\frac{\Delta}{\delta}=0.$$

Cette équation représente une ellipse si les racines S_1, S_2 de l'équation en S ont le même signe, c'est-à-dire si $\delta>0$. Pour que l'ellipse soit réelle, il faut et il suffit que $S_1\Delta$ soit négatif. On en conclut que S_1 a le même signe que A, ce qu'il est d'ailleurs aisé de reconnaître, car si l'on suppose, par exemple, $A>0$, en substituant dans le premier membre de l'équation en S successivement $0, A, +\infty$, on trouve les signes $+$, $-$, $+$ pour les résultats de ces substitutions.

Supposons donc remplies les conditions $\delta>0$, $S_1\Delta<0$. L'axe des x coupe l'ellipse en deux points réels qui sont deux sommets et

dont les abscisses, égales et de signes contraires, sont les racines de l'équation $S_1 x^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$.

En désignant par a la distance au centre de chacun de ces sommets, on a $S_1 = -\frac{\Delta}{\delta a^2}$.

Pareillement, l'axe des y coupe l'ellipse en deux points qui sont deux autres sommets réels et dont les ordonnées sont les racines de l'équation $S_2 y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$.

En appelant b la distance au centre de chacun de ces sommets, on a $S_2 = -\frac{\Delta}{\delta b^2}$ et, par conséquent, l'équation de l'ellipse prend la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Les longueurs $2a$, $2b$ se nomment les *axes* de l'ellipse. La plus grande de ces longueurs se nomme le *grand axe*, l'autre, le *petit axe*.

Si l'on suppose $a > b$, on voit que si l'on prend sur l'axe des x, à partir du centre, deux points F, F′ situés à une distance du centre égale à $\sqrt{a^2 - b^2}$, la courbe dont nous venons d'obtenir l'équation coïncide avec l'ellipse définie comme lieu des points dont la somme des distances aux deux points F, F′ est constante et égale à $2a$. La longueur $2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}$ se nomme la *distance focale* et le rapport $\frac{c}{a}$ l'*excentricité*.

Supposons, en second lieu, $\delta < 0$ et, par suite, $S_1 S_2 < 0$; la courbe est une hyperbole; supposons, en outre, $S_1 \Delta > 0$; alors, il faut supposer $S_2 \Delta < 0$. Il en résulte que l'axe des x coupe l'hyperbole en deux points réels et l'axe des y la coupe en deux points imaginaires conjugués. Nous poserons $S_1 a^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$, $-S_2 b^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$.

L'équation prendra ainsi la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, et nous appellerons : $2a$ la *longueur de l'axe transverse;* $2b$ la *longueur de l'axe non transverse* ou, comme on dit aussi, la *longueur de l'axe imaginaire*, bien que b soit réel.

Si l'on détermine sur l'axe des x, de chaque côté du centre, deux points F, F′ dont la distance au centre soit égale à $\sqrt{a^2 + b^2}$, on voit que la courbe définie par l'équation précédente est le lieu des points dont la différence des distances aux deux points F, F′ est con-

stante et égale à $2a$. On justifie donc ainsi le nom d'*hyperbole*. Si l'on pose $2c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $2c$ se nomme la *distance focale* et $\frac{c}{a}$ l'*excentricité*.

L'excentricité d'une ellipse est moindre que l'unité, celle d'une hyperbole est plus grande que l'unité.

Les asymptotes ayant pour équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$, chacun des angles opposés par le sommet et formés par les deux asymptotes, dans lesquels se trouvent les deux branches de l'hyperbole, est aigu, droit ou obtus suivant que l'on suppose $a > b$, $a = b$, $a < b$. Lorsque $a = b$, on dit que l'hyperbole est équilatère; les asymptotes d'une hyperbole équilatère sont rectangulaires et réciproquement. On peut donc appeler *hyperbole équilatère* celle dont les asymptotes sont rectangulaires. La condition pour que l'équation $f(x, y) = 0$ représente une hyperbole équilatère est, d'après cela,

$$A + C - 2B\cos\theta = 0$$

ou $\eta = 0$.

L'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

représente une seconde hyperbole dont l'axe imaginaire est égal à $2a$ et l'axe réel à $2b$. On dit que les hyperboles représentées par les deux équations précédentes sont *conjuguées :* l'axe réel de l'une est égal à l'axe imaginaire de l'autre.

Il est facile de trouver les carrés des longueurs des demi-axes d'une conique à centre dont on donne l'équation $f(x, y) = 0$, rapportée à deux axes quelconques. En effet, S désignant l'une quelconque des racines de l'équation en S, si l'on pose $S = -\frac{\Delta}{\delta\rho}$, s'il s'agit d'une ellipse, en remplaçant S successivement par S_1 et S_2, on trouvera $\rho = a^2$ et $\rho = b^2$; s'il s'agit d'une hyperbole et si l'on suppose $S_1\Delta > 0$, on trouvera, pour $S = S_1$, $\rho = a^2$ et, pour $S = S_2$, $\rho = -b^2$; c'est l'inverse, si $S_1\Delta$ est négatif.

Il en résulte que l'équation

$$\left(A + \frac{\Delta}{\delta\rho}\right)\left(C + \frac{\Delta}{\delta\rho}\right) - \left(B + \frac{\Delta\cos\theta}{\delta\rho}\right)^2 = 0$$

a pour racines a^2, b^2 s'il s'agit d'une ellipse; a^2, $-b^2$ (b^2, $-a^2$)

s'il s'agit d'une hyperbole; c'est donc l'*équation aux carrés des longueurs des demi-axes.*

En développant, on obtient

$$\delta^3 \rho^2 - \eta\delta\Delta\rho + \Delta^2 \sin^2\theta = 0.$$

330. Problème. — *L'équation $f(x, y) = 0$ représentant une hyperbole, trouver l'équation de l'hyperbole conjuguée.*

Si nous rapportons l'hyperbole à ses axes de symétrie, son équation sera de la forme

$$S_1 X^2 + S_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

et nous savons que

$$f(x,y) \equiv S_1 X^2 + S_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta}.$$

L'hyperbole conjuguée a pour équation

$$S_1 X^2 + S_2 Y^2 - \frac{\Delta}{\delta} = 0;$$

son équation, rapportée aux axes primitifs, est donc

$$f(x, y) - \frac{2\Delta}{\delta} = 0.$$

On voit par la même méthode que le faisceau des asymptotes a pour équation

$$f(x, y) - \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

331. *Remarque relative aux invariants.* — Nous avons trouvé trois expressions

$$\frac{\delta}{\sin^2\theta}, \quad \frac{\eta}{\sin^2\theta}, \quad \frac{\Delta}{\sin^2\theta},$$

qui restent *constantes* quand on fait une transformation de coordonnées, pourvu, il importe de ne pas l'oublier, qu'on ne supprime ou qu'on n'introduise aucun facteur commun dans les coefficients de l'équation transformée: il est facile de prouver qu'il n'existe pas d'autres expressions invariables, distinctes des précédentes. En effet, nous avons obtenu l'identité

$$f(x,y) \equiv S_1 X^2 + S_2 Y^2 + F_1,$$

et nous avons les relations

$$\frac{\delta}{\sin^2\theta} = S_1 S_2, \qquad \frac{\eta}{\sin^2\theta} = S_1 + S_2, \qquad \frac{\Delta}{\sin^2\theta} = S_1 S_2 F_1.$$

S'il existait une quatrième constante, elle fournirait une quatrième relation, distincte des précédentes, entre A, B, C, D, E, F, S_1, S_2, F_1, θ. En éliminant entre les quatre équations obtenues S_1, S_2 et F_1, on aurait une relation entre les coefficients A, B, C, D, E, F et l'angle θ, ce qui est absurde puisque ces coefficients et θ sont arbitraires.

Dans le cas de la parabole, on a trouvé l'identité

$$(ax+by)^2+2Dx+2Ey+F \equiv C_1Y^2+2D_1X$$

et les relations

$$\frac{\eta}{\sin^2\theta}=C_1, \qquad \frac{\Delta}{\sin^2\theta}=-C_1D_1^2.$$

Si l'on pouvait trouver une autre relation distincte de ces deux précédentes, en éliminant entre ces trois relations C_1 et D_1, on aurait une relation entre a, b, D, E, F et θ, ce qui est absurde.

Nous avons déjà montré le parti que l'on peut tirer de la connaissance des invariants; nous allons en montrer d'autres applications.

Théorèmes d'Apollonius.

332. Soit

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\varepsilon b^2}=1$$

l'équation d'une conique à centre rapportée à ses axes de symétrie; si $\varepsilon=+1$, cette conique est une ellipse; c'est une hyperbole quand $\varepsilon=-1$. Prenons pour nouveaux axes de coordonnées deux diamètres conjugués; en nommant x', y' les nouvelles coordonnées, les formules de transformation donnent

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\varepsilon b^2}\equiv Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2,$$

A, B, C étant des constantes. L'équation de la conique rappor ée aux nouveaux axes est donc

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2-1=0.$$

Mais ces axes sont, par hypothèse, deux diamètres conjugués, donc $B=0$.

Si $\varepsilon=+1$, A et C sont positifs, et l'on peut poser

$$A=\frac{1}{a'^2}, \qquad C=\frac{1}{b'^2}.$$

Si $\varepsilon=-1$, A et C ont des signes contraires. On peut supposer $A>0$ et $C<0$, et poser

$$A=\frac{1}{a'^2}, \qquad C=-\frac{1}{b'^2}.$$

La nouvelle équation sera donc

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{\varepsilon b'^2}-1=0, \tag{2}$$

et, d'après ce qui précède,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\varepsilon b^2}=\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{\varepsilon b'^2}. \tag{3}$$

Soit θ l'angle des deux diamètres conjugués; la théorie des invariants donne les deux relations

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\varepsilon b^2}=\left(\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{\varepsilon b'^2}\right):\sin^2\theta, \tag{4}$$

$$\frac{1}{a^2 b^2}=\frac{1}{a'^2 b'^2\sin^2\theta}. \tag{5}$$

De l'équation (5) on tire

$$ab=a'b'\sin\theta,$$

et, par suite, on déduit de l'équation (4),

$$a^2+\varepsilon b^2=a'^2+\varepsilon b'^2. \tag{6}$$

Donc, dans l'ellipse : 1° *la somme des carrés des longueurs de deux diamètres conjugués est égale à la somme des carrés des longueurs des deux axes;* 2° *le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est équivalent au rectangle construit sur les deux axes.*

Quand $\varepsilon=-1$, l'équation (2) montre que l'axe Ox' coupe l'hyperbole en deux points réels, et $2a'$ est la longueur du diamètre dirigé suivant l'axe des x'; le diamètre dirigé suivant l'axe des y' est imaginaire, mais nous convenons d'appeler $2b'$ la longueur de ce diamètre imaginaire. L'hyperbole conjuguée de la première a pour équation, par rapport aux axes primitifs,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0;$$

donc, en vertu de l'identité (3), son équation, rapportée aux nouveaux axes, est

$$\frac{x'^2}{a'^2}-\frac{y'^2}{b'^2}+1=0;$$

il en résulte que $2b'$ est la longueur d'un diamètre de l'hyperbole conjuguée à la première. Les choses étant ainsi entendues, nous énoncerons ces théorèmes :

Dans l'hyperbole : 1° *la différence des carrés des longueurs de deux diamètres conjugués est égale à la différence des carrés des longueurs des deux axes;*

2° *Le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est équivalent au rectangle construit sur les deux axes.*

Ces théorèmes ont été trouvés par *Apollonius*.

On démontre ces théorèmes de bien des manières. Ainsi, par exemple, en partant de l'identité

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\varepsilon b^2}-S(x^2+y^2)\equiv\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{\varepsilon b'^2}-S(x'^2+2x'y'\cos\theta+y'^2),$$

on voit que les équations en S,

$$(1-a^2S)(1-\varepsilon b^2S)=0,\qquad (1-a'^2S)(1-\varepsilon b'^2S)-\varepsilon a'^2b'^2\cos^2\theta\, S^2=0,$$

sont identiques; en écrivant que les coefficients de S^2 et de S sont les mêmes dans les deux équations, on obtient les relations qui constituent les théorèmes d'Apollonius.

On peut présenter cette même démonstration sous forme géométrique. Supposons qu'il s'agisse d'une ellipse.

En retranchant membre à membre les équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,\qquad \frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}-1=0,$$

on obtient

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{R^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{R^2}\right)=0,$$

équation qui représente deux droites passant par les points communs à l'ellipse donnée et au cercle concentrique de rayon R; ces deux droites se confondent et le cercle est bitangent à l'ellipse quand $R^2=a^2$ ou quand $R^2=b^2$.

Reprenons le même calcul quand les axes sont deux diamètres conjugués de l'ellipse; les équations des deux courbes sont alors

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}-1=0,\qquad \frac{x'^2+2x'y'\cos\theta+y'^2}{R^2}-1=0;$$

en retranchant membre à membre, il vient

$$x'^2\left(\frac{1}{a'^2}-\frac{1}{R^2}\right)-\frac{2x'y'\cos\theta}{R^2}+y'^2\left(\frac{1}{b'^2}-\frac{1}{R^2}\right)=0.$$

Les deux droites représentées par cette équation seront confondues si

$$\left(\frac{1}{a'^2}-\frac{1}{R^2}\right)\left(\frac{1}{b'^2}-\frac{1}{R^2}\right)-\frac{\cos^2\theta}{R^4}=0,$$

ou, en développant,

$$R^4-R^2(a'^2+b'^2)+a'^2b'^2\sin^2\theta=0.$$

Mais on connaît déjà les racines de cette équation, qui sont a^2 et b^2; donc, etc.

Cette démonstration est attribuée à E. Galois.

333. *Autres applications des invariants.* — 1° Soit

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 1 = 0$$

l'équation d'une conique rapportée à deux axes *rectangulaires* passant par son centre. La somme $A + C$ reste constante quand on remplace ces axes par deux nouveaux axes rectangulaires. Or les inverses des carrés des deux demi-diamètres dirigés suivant Ox et Oy ont pour expressions $\frac{1}{A}$ et $\frac{1}{C}$; donc : *dans une conique à centre la somme des inverses des carrés de deux diamètres rectangulaires est constante.*

On peut interpréter autrement ce résultat. En effet, soit

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - h = 0$$

l'équation d'une droite, en appelant l et l' les distances à l'origine des traces de cette droite sur les axes, on a

$$l \cos\alpha = h, \qquad l' \sin\alpha = h;$$

donc

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{l^2} + \frac{1}{l'^2}.$$

Il en résulte immédiatement que la distance au centre d'une corde vue du centre d'une conique sous un angle droit est constante, et, par suite, *toutes les cordes d'une conique vues du centre sous un angle droit sont tangentes à un cercle concentrique.*

2° Les asymptotes d'une hyperbole forment quatre angles; une branche de la courbe est dans l'un de ces angles, l'autre branche étant située dans l'angle opposé par le sommet. Nous appellerons *angle des asymptotes* d'une hyperbole la valeur commune de ces deux angles dont les côtés comprennent la courbe. Nous nous proposons de reconnaître dans quel cas l'angle des asymptotes d'une hyperbole est aigu, obtus ou droit.

Si l'on appelle $2a$ l'axe transverse, $2b$ l'axe imaginaire et 2ω l'angle des asymptotes,

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{b}{a}.$$

Or, si l'équation de l'hyperbole, rapportée à deux axes quelconques, est $f(x, y) = 0$, on a identiquement

$$f(x, y) \equiv \lambda \left(\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 \right),$$

λ étant une constante. Mais

$$\frac{\eta}{\sin^2\theta} = \frac{\lambda(b^2 - a^2)}{a^2 b^2}, \qquad \frac{\Delta}{\sin^2\theta} = \frac{\lambda^3}{a^2 b^2},$$

d'où

$$\frac{\eta}{\Delta} = \frac{b^2 - a^2}{\lambda^2}.$$

Donc, l'angle des asymptotes est aigu, droit ou obtus, suivant que le rapport $\frac{\eta}{\Delta}$ est négatif, nul ou positif.

334. *Diamètres conjugués égaux.* — Quand la conique est une hyperbole, si l'on suppose $a' = b'$, on en déduit $a = b$ et réciproquement.

Dans le cas de l'ellipse, pour que deux diamètres aient même longueur, il faut et il suffit qu'ils soient symétriques par rapport aux axes, comme on le voit en coupant une ellipse par un cercle concentrique; or, la relation entre les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués d'une ellipse dont les axes sont $2a$ et $2b$ se réduit à $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$ quand on prend pour axes de coordonnées les axes de symétrie de cette ellipse. Si $m' = -m$, on a $m^2 = \frac{b^2}{a^2}\cdot$ On en conclut que les diagonales du rectangle formé par les tangentes aux sommets constituent un système de deux diamètres conjugués dont les longueurs sont égales, la longueur commune ayant pour valeur $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ et le sinus de l'angle de ces diamètres étant égal à $\frac{2ab}{a^2+b^2}$, comme le montrent les théorèmes d'Apollonius.

L'équation d'une ellipse rapportée à ses deux diamètres conjugués égaux est

$$x^2 + y^2 = a'^2.$$

EXERCICES.

1. Étant donnée la conique représentée par l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1,$$

trouver les longueurs des diamètres conjugués qui font entre eux un angle donné α. Cas particulier : $\alpha = 45°$.

2. Trouver les axes de la conique ayant pour équation

$$(x+y-1)^2 + (x-y-1)^2 = 1.$$

3. Appliquer la méthode de Galois (332) à la recherche des axes d'une conique à centre. On obtiendra ainsi la direction et la grandeur des axes de la conique.

4. Trouver par la même méthode la direction et la grandeur des diamètres

conjugués égaux d'une ellipse. — On écrit que les droites joignant le centre aux points d'intersection avec un cercle concentrique ont des directions conjuguées. Examiner et discuter les résultats obtenus en appliquant cette méthode à l'hyperbole.

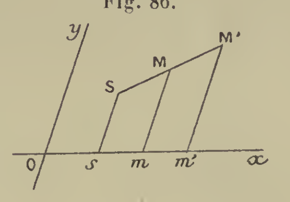
CHAPITRE XIII.

FIGURES HOMOTHÉTIQUES. — FIGURES SEMBLABLES.

335. On dit que deux figures planes F, F′ sont *homothétiques,* quand il existe dans leur plan (*fig.* 86) un point S tel qu'à tout point M de la première figure corresponde un point M′ situé sur la droite SM et vérifiant la relation

$$\frac{SM}{SM'} = k,$$

Fig. 86.



k désignant un nombre constant, positif si les segments $\overline{SM}$, $\overline{SM'}$ sont dirigés dans le même sens; négatif, s'ils sont dirigés en sens contraires. Le point S se nomme le *centre d'homothétie* des deux figures, et k le *rapport d'homothétie*.

Enfin, on dit que l'homothétie est *directe* quand le rapport k est positif, *inverse* quand il est négatif.

Si l'on nomme x_0, y_0 les coordonnées de S, x, y celles de M et enfin x', y' celles de son homologue M′, les projections de deux segments d'une même droite étant proportionnelles à ces segments, on a

$$\frac{x - x_0}{x' - x_0} = k,$$

d'où

(1) $x = x_0(1 - k) + kx'$, et pareillement $y = y_0(1 - k) + ky'$.

Si le point M décrit une courbe C ayant pour équation $f(x, y) = 0$, la courbe C′ décrite par M′, c'est-à-dire la courbe homothétique de C, aura pour équation

$$f(a + kx', b + ky') = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$a = x_0(1 - k), \qquad b = y_0(1 - k).$$

On voit que le point (a, b) est le point de la première figure qui est l'homologue de l'origine regardée comme appartenant à la seconde figure.

Supposons que le centre d'homothétie se déplace, le rapport k restant constant; si l'on nomme x_1, y_1 les coordonnées du nouveau centre S_1 et x'', y'' les coordonnées du nouveau point M″ homologue de M, on aura

$$(2) \qquad \begin{cases} x = x_1(1 - k) + kx'', \\ y = y_1(1 - k) + ky''. \end{cases}$$

En comparant les formules (1) et (2), on obtient

$$x'' - x' = (x_0 - x_1)\frac{1-k}{k}, \qquad y'' - y' = (y_0 - y_1)\frac{1-k}{k};$$

ce qui prouve que les segments $\overline{M'M''}$ et $\overline{SS_1}$ sont parallèles et dans un rapport constant, de sorte que la figure F″, homothétique de F′ par rapport à S_1, se déduit de la figure F′ par une translation. Ces deux figures sont donc égales.

336. Si P et P′ sont deux points homologues des figures F, F′, les rayons $\overline{PM}$, $\overline{P'M'}$ sont parallèles et dans le rapport k. Et, réciproquement, s'il existe dans le plan des figures F, F′ deux points fixes P, P′, tels que les rayons $\overline{PM}$, $\overline{P'M'}$ soient parallèles et dans un rapport constant, M et M′ étant deux points variables de ces figures, F et F′ sont homothétiques.

En effet, en désignant par (x, y) et (x', y') les coordonnées de M et de M′, et par (α, β) et (α', β') celles de P et de P′, on a, si les figures sont homothétiques, le centre ayant pour coordonnées (x_0, y_0),

$$x = x_0(1 - k) + kx', \qquad \alpha = x_0(1 - k) + k\alpha',$$
$$y = y_0(1 - k) + ky', \qquad \beta = y_0(1 - k) + k\beta',$$

d'où

$$(3)\qquad \frac{x-\alpha}{x'-\alpha'}=\frac{y-\beta}{y'-\beta'}=k.$$

Et réciproquement, en posant

$$x_0=\frac{\alpha-k\alpha'}{1-k},\qquad y_0=\frac{\beta-k\beta'}{1-k},$$

on déduit des équations (3)

$$x-kx'=\alpha-k\alpha'=x_0(1-k)$$

ou

$$x=x_0(1-k)+kx',\quad \ldots.$$

D'ailleurs ces propositions se démontrent avec la plus grande facilité par la Géométrie.

337. *Quand deux courbes sont homothétiques, si l'une d'elles a un centre, l'autre en a aussi un, et ces deux courbes sont homothétiques directes et homothétiques inverses.*

En effet, soient C et C′ deux courbes homothétiques (*fig.* 87) et supposons que la courbe C ait un centre O; soit S le centre d'homothétie que nous supposerons, par exemple, directe.

Fig. 87.

Considérons un point M de la courbe C, et son symétrique N par rapport au centre O. Soient M′, N′, O′ les points homologues de M, O, N. On a, k étant le rapport d'homothétie, $\frac{\text{SO}}{\text{SO}'}=k$; donc le point O′ est fixe et, comme il est évidemment le milieu de M′N′, O′ est un centre de la courbe C′.

En second lieu, la droite M′N coupe SOO′ en un point S′ tel que

$$\frac{\overline{\text{S}'\text{O}}}{\overline{\text{S}'\text{O}'}}=\frac{\overline{\text{OM}}}{\overline{\text{O}'\text{N}'}}=-k;$$

ce qui prouve que S′ est fixe et, comme on a aussi

$$\frac{\overline{\text{S}'\text{N}}}{\overline{\text{S}'\text{M}}}=\frac{\overline{\text{OM}}}{\overline{\text{O}'\text{N}'}}=-k,$$

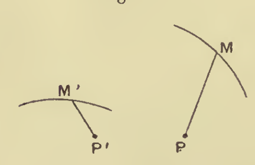
les deux courbes C et C′ sont homothétiques inverses; mais on doit remarquer que les deux rapports d'homothétie sont égaux et de signes contraires.

Réciproquement, si deux courbes C *et* C′ *sont homothétiques directes et inverses, dans les rapports* k *et* $-k$, *elles ont chacune un centre.*

Soient S et S′ les deux centres de similitude; M un point de la courbe C′, M′ son homologue direct et N′ son homologue inverse; menons la droite M′N′ et par M la parallèle MO à M′N′; la droite SS′ coupe ces deux parallèles aux points O et O′. Je dis d'abord que O et O′ sont fixes. En effet, les points O et O′ sont conjugués harmoniques par rapport à S et S′, et comme le rapport $\frac{SO}{SO'} = k$, on sait que $\frac{OS}{OS'} = \frac{k+1}{k-1}$. Cela étant, $\frac{OM}{O'M'} = k$, $\frac{\overline{OM}}{\overline{O'N'}} = -k$; donc $\overline{O'M'} = -\overline{O'N'}$. Le point O′ est donc centre de la courbe C′ et l'on en déduit, en raisonnant comme pour la proposition directe, que le point O est centre de la courbe C.

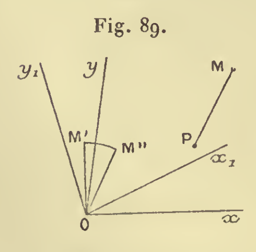
338. *Figures semblables.* — Deux *figures semblables* F, F′ sont deux figures telles que l'une d'elles soit égale à une homothétique de l'autre. Mais il ne suffit pas que deux figures soient égales pour que l'on puisse réaliser leur coïncidence par un simple déplacement de l'une d'elles dans leur plan. Soient P, P′ deux points quelconques pris dans le plan d'une courbe C (*fig.* 88) et soit M un point variable appartenant à cette courbe. Menons le rayon $\overline{P'M'}$ faisant un angle constant avec $\overline{PM}$ et tel que $\frac{\overline{PM}}{\overline{P'M'}} = k$, k désignant un nombre constant. Le lieu de M′ sera une courbe semblable à la courbe C. Mais, si l'on construit la courbe C″ symétrique de C′ par rapport à un axe quelconque, il est facile de vérifier que la courbe C″ ne peut être obtenue de la même manière.

Fig. 88.



Cela étant, pour trouver l'équation générale des courbes semblables à la courbe C, prenons (*fig.* 89) deux axes quelconques et supposons que P′ coïncide avec l'origine des coordonnées; alors, si le point P est l'homologue de O dans la première figure, nous savons que, (a, b) étant les coordonnées de P, l'équation générale des courbes homothétiques de la courbe C est

Fig. 89.



$$f(a + kx'', b + ky'') = 0.$$

Il reste à faire tourner le rayon OM″ d'un angle constant autour

de l'origine. Soient x', y' les coordonnées de M'; il est clair que, si l'on faisait tourner en même temps les axes de l'angle α, les coordonnées de M' par rapport aux nouveaux axes $x_1 O y_1$ seraient x'', y''; donc, tout revient à un changement de coordonnées; en passant des axes $x_1 O y_1$ aux axes xOy, on a, en remarquant que $(Ox_1, Ox) = -\alpha$, $(Ox_1, Oy) = -\alpha + \theta$,

$$x'' = \frac{x' \sin(\theta + \alpha) + y' \sin\alpha}{\sin\theta}, \qquad y'' = \frac{-x' \sin\alpha + y' + \sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta}.$$

L'équation demandée est donc

$$f\left[a + k\,\frac{x \sin(\theta + \alpha) + y \sin\alpha}{\sin\theta},\ b + k\,\frac{-x \sin\alpha + y \sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta}\right] = 0.$$

On peut mettre cette question sous la forme

$$f[a + k(\alpha x + \alpha' y),\ b + k(\beta x + \beta' y)] = 0,$$

avec les conditions

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1, \qquad \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta = 1, \qquad \alpha'^2 + \beta'^2 + 2\alpha'\beta'\cos\theta = 1.$$

Pour avoir les courbes de seconde espèce, il suffit de permuter x' et y', car cela revient à retourner la courbe obtenue autour de la bissectrice de l'angle xOy, ainsi qu'on le vérifie facilement.

Coniques homothétiques.

339. Soit

(1) $$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation d'une conique. L'équation d'une courbe homothétique est de la forme

$$f(a + kx,\ b + ky) = 0,$$

c'est-à-dire

(2) $$f(a, b) + k(x f'_a + y f'_b) + k^2 \varphi(x, y) = 0,$$

ce qui montre déjà que la courbe homothétique d'une conique est une seconde conique. Cela posé, proposons-nous de trouver à quelles conditions deux coniques sont homothétiques. A cet effet, soit

(3) $$A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0$$

l'équation d'une nouvelle conique. Pour que les équations (1) et (3) représentent deux courbes homothétiques, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer a, b, k de façon que les équations (2) et (3) représentent la même courbe. On voit déjà que les coniques (1) et (2) ont les mêmes directions asymptotiques; donc, pour que la conique (3) soit homothétique à la conique (1), il est nécessaire qu'elle ait les mêmes directions asymptotiques; autrement dit, les coefficients A', B', C' doivent être respectivement proportionnels aux coefficients A, B, C. Supposons ces conditions remplies; de sorte que $A' = \lambda A$, $B' = \lambda B$, $C' = \lambda C$. Pour simplifier, nous pouvons diviser tous les coefficients de l'équation (3) par λ, ce qui donne l'équation

$$(4) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2D_1 x + 2E_1 y + F_1 = 0,$$

en posant $D_1 = \frac{D'}{\lambda}$, $E_1 = \frac{E'}{\lambda}$, $F_1 = \frac{F'}{\lambda}$.

Cela posé, pour que les équations (2) et (4) soient identiques, il faut et il suffit que a, b, k vérifient les conditions suivantes :

$$\tfrac{1}{2} f'_a = kD_1, \qquad \tfrac{1}{2} f'_b = kE_1, \qquad f(a, b) = k^2 F_1;$$

en remplaçant la dernière condition par celle-ci :

$$f(a, b) - \tfrac{1}{2}(af'_a + bf'_b) = k^2 F_1 - k(aD_1 + BE_1),$$

ces conditions reviennent aux suivantes :

$$(5) \qquad Aa + Bb + D - kD_1 = 0,$$

$$(6) \qquad Ba + Cb + E - kE_1 = 0,$$

$$(7) \qquad (D + kD_1)a + (E + kE_1)b + F - k^2 F_1 = 0.$$

Pour discuter ce système, nous distinguerons deux cas :

1° $AC - B^2 \neq 0$. Les équations (5) et (6) déterminent a et b en fonction de k. En remplaçant a et b par leurs valeurs dans (7), on aura une équation qui déterminera k; cela revient à éliminer a et b entre ces trois équations du premier degré, ce qui donne

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} A & B & D - kD_1 \\ B & C & E - kE_1 \\ D + kD_1 & E + kE_1 & F - k^2 F_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Le développement de ce déterminant ne présente aucune difficulté.

On peut, en effet, le remplacer d'abord par

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D+kD_1 & E+kE_1 & F \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} A & B & D_1 \\ B & C & E_1 \\ D+kD_1 & E+kE_1 & kF_1 \end{vmatrix};$$

enfin, en décomposant chacun de ces déterminants en deux autres et simplifiant, on obtient

$$(9) \qquad \Delta - k^2\Delta_1 = 0,$$

où Δ et Δ_1 sont les discriminants des polynomes (1) et (4).

D'ailleurs, on voit que, si $k = 0$, le déterminant (8) se réduit à Δ; en le divisant par k^2 et posant ensuite $\frac{1}{k} = 0$, on trouve Δ_1; donc le coefficient de k^2 est Δ_1; enfin ce déterminant ne change pas quand on change k en $-k$, donc il ne contient pas de terme en k. Il a donc bien la forme (9).

On trouve ainsi pour k deux valeurs égales et de signes contraires. Ce résultat s'explique, puisque les deux courbes, ayant chacune un centre, doivent être à la fois homothétiques directes et inverses.

A chacune des valeurs de k correspond un centre d'homothétie dont les coordonnées sont $x_0 = \frac{a}{1-k}$, $y_0 = \frac{b}{1-k}$.

Si $\frac{\Delta}{\Delta_1} = 1$, le centre direct est à l'infini et le centre inverse a pour coordonnées $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$. Il peut arriver cependant que $a = 0$, $b = 0$, $k = 1$: alors x_0 et y_0 sont indéterminés. Et, en effet, s'il en est ainsi, les équations (5), (6), (7) donnent $D = D_1$, $E = E_1$, $F = F_1$; les deux coniques sont confondues et le centre d'homothétie directe est évidemment indéterminé; le centre d'homothétie inverse est le centre.

Il reste à savoir si k est réel; pour qu'il en soit ainsi, il faut que Δ et Δ_1 aient le même signe. Si les coniques sont du genre ellipse, la condition $\frac{\Delta}{\Delta_1} > 0$ exprime qu'elles sont toutes les deux réelles ou toutes les deux imaginaires.

Pour deux hyperboles, la condition précédente exprime que les deux courbes doivent être situées dans les angles correspondants de leurs asymptotes respectives, c'est-à-dire dans les angles que l'on peut faire coïncider par une translation. Lorsque $\frac{\Delta}{\Delta_1} < 0$, l'une des hyperboles est homothétique à la conjuguée de l'autre.

Il reste à examiner le cas où Δ ou bien Δ_1 serait nul. Si l'on suppose que Δ tende vers zéro, on voit que k tend aussi vers zéro, et x_0, y_0 deviennent les coordonnées du centre de la conique rectiligne (1). Si Δ_1 tend vers zéro, k augmente indéfiniment; enfin, si Δ et Δ_1 deviennent nuls, la valeur de k cesse d'être déterminée. Il est facile de se rendre compte de ces résultats. En effet, si l'on considère une hyperbole et ses asymptotes, en portant sur chaque rayon OM issu du centre une longueur égale à $OM \times k$, si $k = 0$ et si OM a une valeur finie $OM \times k = 0$, ce qui donne le centre pour point correspondant à M; mais, si le point M s'éloigne à l'infini sur l'une des branches, le produit $OM \times k$ est indéterminé et le point M' est l'un quelconque des points de l'asymptote correspondante. Enfin, quand il s'agit de deux droites concourantes, on vérifie bien facilement que ces deux systèmes sont homothétiques, le centre d'homothétie étant l'un quelconque des points situés sur la ligne joignant les centres de ces deux coniques rectilignes, le rapport de similitude pouvant avoir une valeur quelconque.

2° $AC - B^2 = 0$. Les coniques sont du genre parabole. Supposons qu'elles soient des paraboles proprement dites. Soit, pour fixer les idées, $A \neq 0$. Les équations (5) et (6) sont incompatibles, à moins qu'elles ne se réduisent à une seule, ce qui exige que

$$k = \frac{AE - BD}{AE_1 - BD_1}; \tag{10}$$

d'ailleurs les équations (5) et (7) donnent, pour a et b, des valeurs acceptables, car le déterminant du système de ces deux équations ne peut être nul.

L'équation (9) subsiste encore.

Si l'une des paraboles dégénère en deux droites parallèles, k devient nul ou infini, et enfin k est indéterminé si les deux paraboles sont dégénérées.

340. Théorème. — *Pour que deux coniques à centre soient homothétiques, il faut et il suffit que leurs axes soient parallèles et proportionnels.*

Considérons en effet, par exemple, deux ellipses réelles homothétiques; les termes du second degré de leurs équations étant les mêmes,

à un facteur près, les équations en S relatives à ces ellipses sont identiques, d'où l'on conclut que leurs axes sont parallèles et proportionnels. Réciproquement, s'il en est ainsi, les termes des équations réduites ont des coefficients proportionnels, et, comme les axes de coordonnées correspondants sont parallèles, les équations des deux ellipses rapportées à deux axes quelconques auront les mêmes termes du second degré, à un facteur près.

Raisonnement identique pour deux hyperboles; dans ce cas, les axes transverses sont parallèles, ainsi que les axes imaginaires et les axes de même nature sont proportionnels. Si les axes de natures différentes sont parallèles et proportionnels, l'une des hyperboles est homothétique à la conjuguée de l'autre.

On établit encore ces propositions en remarquant que, si deux coniques à centre sont homothétiques, les rayons vecteurs issus des centres et parallèles sont dans un rapport constant, et réciproquement.

341. Théorème. — *Pour que deux paraboles soient homothétiques, il faut et il suffit que leurs axes soient parallèles.*

En effet, pour que les axes de deux paraboles soient parallèles, il faut et il suffit que les termes du second degré de leurs équations soient identiques à un facteur près.

342. *Corollaire.* — Deux paraboles quelconques sont semblables; en effet, en faisant tourner une parabole P autour d'un point pris dans son plan, de manière que son axe devienne parallèle à celui d'une parabole P′, elle devient homothétique à celle-ci. Le rapport de similitude est égal au rapport des deux paramètres. En effet, considérons une parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet; son équation étant

$$y^2 - 2px = 0,$$

l'équation d'une courbe homothétique par rapport à l'origine sera

$$k^2y^2 - 2pkx = 0$$

ou

$$y^2 - \frac{2px}{k} = 0;$$

en appelant p' le paramètre de la parabole obtenue, on a bien $k = \frac{p}{p'}$; c'est d'ailleurs ce que donne la formule (10). La grandeur d'une parabole ne dépendant que de la valeur de son paramètre, on en conclut encore que toutes les paraboles sont semblables.

Les théorèmes précédents sont des cas particuliers de propositions plus générales.

343. Théorème. — *L'équation*

$$f(x, y, a) = 0, \tag{1}$$

dans laquelle a désigne une longueur variable, représente une famille de courbes homothétiques par rapport à l'origine des coordonnées.

En effet, soient a, a' deux valeurs du paramètre; posons $a = ka'$. La courbe homothétique de la courbe (1), k étant le rapport de similitude, a pour équation

$$f(kx, ky, \ a \ ) = 0$$

ou

$$f(kx, ky, ka') = 0.$$

Mais, en vertu du principe de l'homogénéité, cette équation n'est autre que

$$f(x, y, a') = 0; \tag{2}$$

donc les équations (1) et (2) représentent des courbes homothétiques par rapport à l'origine.

344. Théorème. — *L'équation*

$$f(x, y, a, b, c) = 0,$$

a, b, c, ... désignant des longueurs, représente des courbes homothétiques quand on fait varier proportionnellement ces paramètres.

En effet, si $a = ka'$, $b = kb'$, $c = kc'$, l'équation

$$f(kx, ky, ka', kb', kc') = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$f(x, y, a', b', c') = 0.$$

De là résulte que deux courbes planes C, C' étant données, si l'on peut déplacer l'une d'elles dans son plan de façon que les deux courbes soient, après ce déplacement, représentées par deux équations de la forme

$$f(x, y, a, b, c, \ldots) = 0, \qquad f(x, y, a', b', c', \ldots) = 0,$$

$a, b, c, \ldots, a', b', c', \ldots$ désignant des longueurs, et que l'on ait

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \cdots = k,$$

les deux courbes données sont semblables et le rapport de similitude est égal à k. En particulier, pour que deux coniques à centre soient semblables, il faut et il suffit que leurs axes soient proportionnels; dans le cas de deux hyperboles, le rapport des axes réels devra être égal au rapport des axes imaginaires.

345. Problème. — *Étant donnée l'équation $f(x,y) = 0$ d'une conique à centre, trouver l'équation de la conique concentrique et homothétique dans le rapport k.*

Si l'on pose $x = x_0 + x'$, $y = y_0 + y'$; x_0, y_0 étant les coordonnées du centre, l'équation donnée devient

$$\varphi(x', y') + \frac{\Delta}{\delta} = 0;$$

la conique homothétique a pour équation, par rapport aux nouveaux axes,

$$\varphi(x', y') + \frac{\Delta}{k^2 \delta} = 0.$$

Mais, comme

$$f(x,y) \equiv \varphi(x', y') + \frac{\Delta}{\delta},$$

son équation est, par rapport aux anciens axes,

$$f(x,y) + \frac{1 - k^2}{k^2} \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

En particulier, si $k = i$, on retrouve l'équation de l'hyperbole conjuguée; pour k infini, on obtient l'équation du *faisceau* des asymptotes.

346. Problème. — *Étant données les équations de deux coniques, exprimer que ces coniques sont semblables dans le rapport k.*

Soient a, b les demi-axes de la première conique et a', b' les demi-axes respectivement de même nature de la seconde; il s'agit d'exprimer que

$$a = ka', \qquad b = kb'.$$

En appelant S_1 et S_2 les racines de l'équation en S relative à la première conique, on a

$$a^2 = -\frac{\Delta}{\delta S_1}, \qquad b^2 = -\frac{\Delta}{\delta S_2}.$$

Pareillement

$$a'^2 = -\frac{\Delta'}{\delta' S'_1}, \qquad b'^2 = -\frac{\Delta'}{\delta' S'_2},$$

d'où

$$S'_1 = S_1 \times \frac{\Delta' \delta}{\Delta \delta'} k^2, \qquad S'_2 = S_2 \times \frac{\Delta' \delta}{\Delta \delta'} k^2.$$

Il s'agit donc d'exprimer que les racines de l'équation

$$S^2 \sin^2 \theta - \eta' S + \delta' = 0$$

sont égales à celles de l'équation

$$S^2 \sin^2 \theta - \eta S + \delta = 0,$$

multipliées par $\frac{\Delta' \delta}{\Delta \delta'} k^2$, c'est-à-dire égales aux racines de l'équation

$$S^2 \sin^2 \theta - \frac{\Delta' \delta}{\Delta \delta'} k^2 \eta S + \frac{\Delta'^2 \delta^2}{\Delta^2 \delta'^2} k^4 \delta = 0.$$

Les conditions demandées sont

$$\frac{\delta' \eta'}{\Delta'} = k^2 \frac{\delta \eta}{\Delta}, \qquad \frac{\eta'^2}{\delta'} = \frac{\eta^2}{\delta}.$$

En particulier, pour que deux coniques soient égales, il faut et il suffit que

$$\frac{\delta' \eta'}{\Delta'} = \frac{\delta \eta}{\Delta}, \qquad \frac{\eta'^2}{\delta'} = \frac{\eta^2}{\delta}.$$

On aurait pu aussi se servir de l'équation aux carrés des longueurs des demi-axes.

Autre méthode. — Remarquons d'abord que si une équation du second degré a pour racines a et $\frac{1}{a}$, elle peut évidemment se mettre sous la forme

$$x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a},$$

et réciproquement.

Cela posé, pour exprimer que deux coniques sont semblables, il suffit d'exprimer que les racines de l'équation en S de l'une sont proportionnelles aux racines de l'équation en S de l'autre. Mais, en désignant ces racines par S_1, S_2 et par S'_1, S'_2, on doit exprimer que $\frac{S_1}{S_2}$ est égal à $\frac{S'_1}{S'_2}$ ou à $\frac{S'_2}{S'_1}$; on doit donc poser

$$\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1} = \frac{S'_1}{S'_2} + \frac{S'_2}{S'_1}$$

ou, en ajoutant 2 à chaque membre,

$$\frac{(S_1+S_2)^2}{S_1 S_2} = \frac{(S'_1+S'_2)^2}{S'_1 S'_2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\eta^2}{\delta} = \frac{\eta'^2}{\delta'}.$$

Cette méthode élégante est due à M. G. Darboux.

Si l'on suit cette méthode, pour écrire que le rapport de similitude est égal à k, il suffit de poser $S'_1 + S'_2 = \frac{\Delta'\delta}{\Delta\delta'} k^2 (S_1 + S_2)$ ou $\eta' = \frac{\Delta'\delta}{\Delta\delta'} k^2 \eta$, ce qui donne la condition trouvée plus haut.

CHAPITRE XIV.

THÉORIE DES TANGENTES ET DES NORMALES.

Définition des points multiples dans les courbes algébriques.

347. Soient $A(a, b, c)$ un point d'une courbe algébrique ayant pour équation $f(x, y, z) = 0$ et (x, y, z) les coordonnées d'un point quelconque P du plan; les expressions $a + \lambda x$, $b + \lambda y$, $c + \lambda z$ sont les coordonnées d'un point M pris sur AP; ce point sera l'un des points d'intersection de la courbe donnée et de la sécante AP, si λ est racine de l'équation $f(a + \lambda x, b + \lambda y, c + \lambda z) = 0$ ou, en développant,

$$(1) \quad f(a, b, c) + \lambda(xf'_a + yf'_b + zf'_c) + \frac{\lambda^2}{1.2}(xf'_a + yf'_b + zf'_c)_2 + \ldots = 0.$$

Le terme constant est nul, puisque A est pris sur la courbe f; si l'une au moins des dérivées f'_a, f'_b, f'_c est différente de zéro, et si l'on donne à x, y, z des valeurs arbitraires, ou, d'une manière plus précise, si l'on suppose

$$xf'_a + yf'_b + zf'_c \neq 0,$$

l'équation (1) en λ a une racine nulle et $m - 1$ racines différentes de

zéro ; si, au contraire, on suppose $f'_a = 0$, $f'_b = 0$, $f'_c = 0$, quelle que soit la direction de la sécante AP, l'équation (1) a au moins deux racines nulles. Nous sommes ainsi conduits à considérer deux cas :

1° *Au point* A, *l'une au moins des dérivées* f'_a, f'_b, f'_c *est différente de zéro.*

Alors, toute sécante, autre que celle qui est représentée par l'équation

$$xf'_a + yf'_b + zf'_c = 0,$$

coupe la courbe en un seul point confondu avec A et en $m - 1$ autres points, tous différents de A. On dit alors que le point A est un *point simple.*

2° *Chacune des dérivées* f'_a, f'_b, f'_c *est nulle.*

Si l'on suppose $f'_a = 0$, $f'_b = 0$, $f'_c = 0$, on en déduit d'abord $f(a, b, c) = 0$ et, par suite, le point A est sur la courbe. En second lieu, toute sécante menée par le point A a au moins, avec la courbe f, deux points communs confondus avec le point A et, par suite, au plus $m - 2$ points distincts de A. On dit alors que le point A est un *point multiple* de la courbe f; et l'on ajoute que c'est un point multiple d'ordre p, si toute sécante qui y passe, rencontre la courbe au moins en p points confondus avec A.

On peut remarquer que si le point A est un point simple à distance finie, l'une au moins des dérivées f'_a ou f'_b est différente de zéro, quand on suppose que $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ sont les coordonnées cartésiennes. En effet, l'identité d'Euler $af'_a + bf'_b + cf'_c \equiv mf(a, b, c)$ nous montre que, si nous supposons $f'_a = 0$, $f'_b = 0$, $f(a, b, c) = 0$, il en résulte que $cf'_c = 0$; or le point A est à distance finie par hypothèse, donc $c \neq 0$; par suite, si l'on supposait $f'_a = 0$ et $f'_b = 0$, on aurait aussi $f'_c = 0$ et le point A serait un point multiple.

Application aux courbes du second degré.

348. Un point multiple d'une courbe du second degré est un point double. Cherchons si une courbe du second degré peut avoir un point double.

Remarquons d'abord que si A est un point double d'une conique et si M est un point quelconque de cette même conique, la droite AM appartient tout entière à cette conique qui, par suite, dégénère en un système de droites. En effet, AM a, dans ce cas, au moins trois points communs avec la courbe du second degré donnée : donc AM fait partie de cette courbe. D'ailleurs on suppose $f'_a = f'_b = f'_c = 0$, $f(x, y, z) = 0$; il en résulte que $f(a + \lambda x,\ b + \lambda y,\ c + \lambda z) = 0$, quelle que soit la valeur attribuée à λ; car, en développant, on voit que les coefficients de toutes les puissances de λ sont nuls.

En second lieu, si A et B sont deux points doubles, tout point de AB est un point double; si l'on suppose

$$f'_a = 0, \quad f'_b = 0, \quad f'_c = 0 \quad \text{et} \quad f'_{a'} = 0, \quad f'_{b'} = 0, \quad f'_{c'} = 0,$$

on en déduit $f'_{a+\lambda a'} = 0$, $f'_{b+\lambda b'} = 0$, $f'_{c+\lambda c'} = 0$.

Par hypothèse,

$$\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{D}c = 0, \qquad \mathrm{A}a' + \mathrm{B}b' + \mathrm{D}c' = 0;$$

donc

$$\mathrm{A}(a + \lambda a') + \mathrm{B}(b + \lambda b') + \mathrm{D}(c + \lambda c') = 0, \qquad \ldots.$$

Cela étant, les coordonnées d'un point double doivent vérifier les trois équations

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{D}z = 0, \qquad \mathrm{B}x + \mathrm{C}y + \mathrm{E}z = 0, \qquad \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F}z = 0.$$

Pour que ce système admette des solutions autres que $x = y = z = 0$, il faut supposer $\Delta = 0$.

Donc, 1° $\Delta \neq 0$; la conique est une ellipse, une hyperbole, ou une parabole. Aucune de ces courbes *n'a de point double*.

2° $\Delta = 0$. Ce cas se subdivise en deux autres.

(a). L'un des mineurs de Δ est différent de zéro; les équations précédentes se réduisent à deux; il n'y a qu'un seul point double A. Soit M un point de la conique différent de A; ce point est simple. La droite AM fait partie de la conique et tous ses points, sauf A, sont simples. Une sécante, menée par M, coupe donc la conique en un autre point simple M'; la droite AM' fait aussi partie de la conique; donc celle-ci se compose de deux droites AM, AM'. On obtient ainsi deux droites distinctes concourantes ou parallèles; leur point de concours à distance finie ou infinie est le *point double*.

(b). Tous les mineurs de Δ sont nuls; les équations se réduisent à

une seule qui représente une ligne de points doubles et la conique se réduit à cette ligne double. Si l'on suppose, par exemple, $A \neq 0$, cette ligne a pour équation

$$Ax + By + Dz = 0$$

et, dans ce cas,

$$Af(x, y, z) \equiv (Ax + By + Dz)^2.$$

Théorie générale des tangentes.

349. *Équation de la tangente en un point simple.* — Nous savons déjà que le coefficient angulaire de la tangente en un point d'une courbe rapportée à deux axes quelconques est égal à la dérivée y'_x ou $\frac{dy}{dx}$ de l'ordonnée y par rapport à l'abscisse du point de contact.

Nous pouvons ajouter que l'existence de la tangente est assurée en tout *point simple* d'une courbe algébrique. En effet, les coordonnées x, y vérifient l'équation $f(x, y) = 0$; en outre, nous savons que les dérivées f'_x et f'_y ne sont pas nulles toutes les deux en un point simple; soit, par exemple, $f'_y \neq 0$. Alors, on sait que $y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}$; donc l'équation de la tangente au point (x, y) est

$$Y - y = -\frac{f'_x}{f'_y}(X - x)$$

ou

$$(X - x)f'_x + (Y - y)f'_y = 0. \tag{1}$$

Il est bien évident que, si l'on suppose $f'_y = 0$, $f'_x \neq 0$, l'équation que nous venons de trouver est encore légitime, car, dans ce cas, $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ a pour limite zéro et, par suite, la tangente a pour équation $X - x = 0$; elle est parallèle à l'axe des y.

L'équation (1) convient en général à une courbe quelconque, algébrique ou non, pourvu que l'une des dérivées f'_x ou f'_y soit différente de zéro. Mais, si l'on suppose $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, elle ne représente plus rien ; c'est ce qui arrive en un point multiple. Nous nous occuperons de ce cas plus loin.

En employant des coordonnées homogènes, on donne une autre

forme à l'équation (1). Supposons qu'il s'agisse d'une courbe algébrique de degré m et posons

$$z^m f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \equiv F(x, y, z),$$

d'où

$$f(x, y) \equiv F(x, y, 1).$$

Posons

$$F'_x(x, y, z) \equiv \varphi(x, y, z), \qquad F'_y(x, y, z) \equiv \psi(x, y, z),$$
$$F'_z(x, y, z) \equiv \theta(x, y, z),$$

d'où

$$f'_x \equiv F'_x(x, y, 1) \equiv \varphi(x, y, 1), \qquad f'_y \equiv F'_y(x, y, 1) \equiv \psi(x, y, 1).$$

Avec ces notations, l'équation (1) devient

$$(2) \qquad X\varphi(x, y, 1) + Y\psi(x, y, 1) - [x\varphi(x, y, 1) + y\psi(x, y, 1)] = 0.$$

Mais l'identité d'Euler, que l'on peut écrire

$$x\varphi(x, y, z) + y\psi(x, y, z) + z\theta(x, y, z) = m F(x, y, z),$$

donne, pour $z = 1$,

$$(3) \qquad x\varphi(x, y, 1) + y\psi(x, y, 1) + \theta(x, y, 1) = m f(x, y) = 0.$$

Il en résulte que l'équation (2), en tenant compte de l'égalité (3), prend la forme suivante :

$$(4) \qquad X\varphi(x, y, 1) + Y\psi(x, y, 1) + \theta(x, y, 1) = 0.$$

On l'écrit sous cette forme

$$(5) \qquad Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = 0,$$

en convenant de faire $Z = z = 1$; de sorte que f'_z désigne alors la dérivée $F'_z(x, y, z)$ pour $z = 1$, c'est-à-dire $\theta(x, y, 1)$.

Mais il est inutile de conserver la restriction précédente. En effet, en se servant de coordonnées homogènes, l'équation (4) devient

$$\frac{X}{Z}\varphi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) + \frac{Y}{Z}\psi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) + \theta\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) = 0,$$

et, par conséquent, en multipliant tous les termes par Zz^{m-1} et, en se rappelant que les dérivées du premier ordre des fonctions homo-

gènes de degré m sont des fonctions homogènes de degré $m-1$, on obtient

$$X\varphi(x,y,z)+Y\psi(x,y,z)+Z\theta(x,y,z)=0,$$

c'est-à-dire

$$XF'_x+YF'_y+ZF'_z=0.$$

Telle est l'équation de la tangente en un point (x, y, z) d'une courbe représentée en coordonnées homogènes par l'équation

$$F(x,y,z)=0.$$

350. *Autre méthode.* — On peut obtenir l'équation précédente par une nouvelle méthode qui s'applique aux coordonnées trilinéaires.

Soient $f(x, y, z)=0$ l'équation d'une courbe et (a, b, c) les coordonnées d'un point A pris sur cette courbe; soient P un point, x, y, z ses coordonnées. Nous avons vu qu'on détermine les points communs à la sécante AP et à la courbe donnée, au moyen des racines de l'équation $f(a+\lambda x,\ b+\lambda y,\ c+\lambda z)=0$, c'est-à-dire, puisque $f(a, b, c)=0$,

$$\lambda(xf'_a+yf'_b+zf'_c)+\lambda^2(xf'_a+yf'_b+zf'_c)_2+\ldots=0.$$

La sécante AP coupe la courbe au point A; pour qu'un second point d'intersection M vienne se confondre avec A, il faut et il suffit, comme nous l'avons déjà remarqué, que $xf'_a+yf'_b+zf'_c=0$.

Cette équation, dans laquelle on regarde x, y, z comme étant les coordonnées courantes, représente donc une droite qui rencontre la courbe au moins en deux points confondus avec le point A; c'est la tangente en A, pourvu que l'une au moins des quantités f'_a, f'_b, f'_c soit différente de zéro, c'est-à-dire que le point A soit *simple*.

351. *Tangente à une courbe du second degré.* — Soit

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

l'équation d'une courbe du second degré. L'équation de la tangente au point (x_1, y_1) est

$$x(Ax_1+By_1+D)+y(Bx_1+Cy_1+E)+Dx_1+Ey_1+F=0,$$

ou

$$Axx_1 + B(xy_1 + yx_1) + Cyy_1 + D(x + x_1) + E(y + y_1) + F = 0,$$

avec la condition

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2Dx_1 + 2Ey_1 + F = 0.$$

De même, si l'équation de la courbe en coordonnées trilinéaires est

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0,$$

la tangente au point x_1, y_1, z_1 aura pour équation

$$Axx_1 + A'yy_1 + A''zz_1 + B(yz_1 + zy_1) + B'(zx_1 + xz_1) + B''(xy_1 + yx_1) = 0,$$

x_1, y_1, z_1 vérifiant la condition

$$Ax_1^2 + A'y_1^2 + A''z_1^2 + 2By_1z_1 + 2B'z_1x_1 + 2B''x_1y_1 = 0.$$

352. *Remarque.* — L'équation

$$\begin{aligned} Ax(x_1+x_2)+A'y(y_1+y_2)+A''z(z_1+z_2) &+ B\,[y(z_1+z_2)+z(y_1+y_2)] \\ &+ B'[z(x_1+x_2)+x(z_1+z_2)] \\ &+ B''[x(y_1+y_2)+y(x_1+x_2)] \\ = Ax_1x_2+A'y_1y_2+A''z_1z_2+B(y_1z_2+z_1y_2) & \\ +B'(z_1x_2+x_2z_2)+B''(x_1y_2+y_1x_2) & \end{aligned}$$

représente la corde passant par les points $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ quand on suppose ces points sur la courbe donnée. Si x_2, y_2, z_2 deviennent proportionnels à x_1, y_1, z_1, c'est-à-dire si M_2 se confond avec M_1, on retrouve l'équation de la tangente en M_1.

353. Problème. — *En désignant par $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ des fonctions linéaires des coordonnées cartésiennes x, y, trouver l'équation de la tangente en un point de la courbe représentée par l'équation $f(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) = 0$.*

Soient

$$\alpha = ax + by + c, \qquad \beta = a'x + b'y + c', \qquad \ldots.$$

Appelons x_1, y_1 les coordonnées du point donné et $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ ce que deviennent les fonctions $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ quand on y substitue x_1 et y_1 à x et y. Si l'on désigne par $F(x, y)$ la fonction qu'on obtient en remplaçant dans $f(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ les fonctions composantes par leurs expressions en x et y, de sorte que

$$F(x, y) \equiv f(\alpha, \beta, \ldots, \lambda),$$

il s'agit d'exprimer

$$(x-x_1)\frac{\partial F}{\partial x_1}+(y-y_1)\frac{\partial F}{\partial y_1}$$

au moyen des données. Or

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=a\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}+a'\frac{\partial f}{\partial \beta_1}+\ldots,\qquad \frac{\partial F}{\partial y_1}=b\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}+b'\frac{\partial f}{\partial \beta_1}+\ldots,$$

donc

$$(x-x_1)\frac{\partial F}{\partial x_1}+(y-y_1)\frac{\partial F}{\partial y_1}$$
$$\equiv\Big[a(x-x_1)+b(y-y_1)\Big]\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}+\Big[a'(x-x_1)+b'(y-y_1)\Big]\frac{\partial f}{\partial \beta_1}+\ldots$$

Mais

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=\alpha-\alpha_1,\quad \ldots.$$

L'équation de la tangente au point $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ est donc

$$(\alpha-\alpha_1)\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}+(\beta-\beta_1)\frac{\partial f}{\partial \beta_1}+\ldots+(\lambda-\lambda_1)\frac{\partial f}{\partial \lambda_1}=0.$$

Si la fonction $f(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ est homogène et que

$$\alpha=ax+by+cz,\qquad \beta=a'x+b'y+c'z,\qquad \ldots,$$

de façon que

$$f(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)\equiv F(x, y, z),$$

l'équation de la tangente est, au point x_1, y_1, z_1,

$$x\frac{\partial F}{\partial x_1}+y\frac{\partial F}{\partial y_1}+z\frac{\partial F}{\partial z_1}=0.$$

Or

$$\frac{\partial F}{\partial z_1}\equiv c\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}+c'\frac{\partial f}{\partial \beta_1}+\ldots.$$

On en conclut que l'équation de la tangente peut se mettre sous la forme

$$\alpha\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}+\beta\frac{\partial f}{\partial \beta_1}+\ldots+\lambda\frac{\partial f}{\partial \lambda_1}=0.$$

354. *Tangente à l'origine.* — Considérons un arc de courbe passant par l'origine des coordonnées et soit M un point pris sur cet arc; le coefficient angulaire de OM est égal à $\frac{y}{x}$, x et y étant les coordonnées du point M. Si le point M s'approche indéfiniment de l'origine, en restant sur l'arc considéré, le rapport $\frac{y}{x}$ aura pour limite le

coefficient angulaire de la tangente en O et, réciproquement, si $\frac{y}{x}$ tend vers une limite déterminée, le coefficient angulaire de la tangente en O sera égal à cette limite.

Par exemple, soit $y = \sin x$. Cette équation définit une courbe qui passe par l'origine; le rapport $\frac{\sin x}{x}$ ayant pour limite 1 quand x tend vers zéro, on en conclut que cette courbe est tangente à l'origine à la bissectrice de l'angle xOy.

Considérons une courbe algébrique passant par l'origine; son équation ne contiendra pas de terme constant; en l'ordonnant par groupes homogènes de degrés croissants, elle sera de la forme

$$ax + by + cx^2 + dxy + ey^2 + \ldots = 0.$$

Si nous posons $x = \alpha\rho$, $y = \beta\rho$, nous obtenons l'équation aux ρ des points d'intersection de la courbe avec la sécante menée par l'origine et dont la direction a pour paramètres α, β, savoir

$$\rho(a\alpha + b\beta) + \rho^2(c\alpha^2 + d\alpha\beta + e\beta^2) + \ldots = 0.$$

Cette équation a une racine nulle, et une seule, tant qu'on suppose $a\alpha + b\beta \neq 0$; mais, si la sécante coïncide avec la droite ayant pour équation

$$ax + by = 0,$$

deux au moins des points d'intersection seront confondus avec l'origine et, par suite, cette droite est la tangente à l'origine.

D'ailleurs, en posant $y = tx$, l'équation de la courbe donne

$$x(a + bt) + x^2(c + dt + et^2) + \ldots = 0,$$

équation qui admet une racine nulle; en supprimant cette racine, on obtient

$$a + bt + Px = 0,$$

P désignant un polynome entier en x et en t. Or, si x tend vers zéro, une détermination de t, c'est-à-dire de $\frac{y}{x}$, tend vers $-\frac{a}{b}$; puisque, pour $x = 0$, l'équation précédente se réduit à $a + bt = 0$. Donc $-\frac{a}{b}$ est bien le coefficient angulaire de la tangente au point O.

Si l'on suppose $a = b = 0$, toute sécante menée par l'origine

coupe la courbe au moins en deux points confondus avec l'origine et, par suite, l'origine est alors un point multiple.

En résumé, quand une courbe algébrique passe par l'origine, si ce point est un point simple, on obtient la tangente en ce point en égalant à zéro l'ensemble des termes du premier degré de l'équation de la courbe supposée mise sous forme entière.

Il est bon de remarquer que l'équation

$$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} = 0$$

se réduit dans ce cas à $ax + by = 0$, si l'on suppose $x_1 = y_1 = 0$, $z_1 = 1$.

La vérification n'offre aucune difficulté.

355. Problème. — *Exprimer que la droite*

$$ux + vy + wz = 0 \tag{1}$$

est tangente à la courbe ayant pour équation

$$f(x, y, z) = 0. \tag{2}$$

On exprime qu'il y a un point $M(x_1, y_1, z_1)$ situé sur la courbe donnée et tel que la tangente en ce point coïncide avec la droite donnée. En d'autres termes, l'équation

$$x\frac{\partial f}{\partial x_1} + y\frac{\partial f}{\partial y_1} + z\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0 \tag{3}$$

doit être équivalente à l'équation (1); par conséquent, on doit pouvoir trouver un nombre λ, différent de zéro, et tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda u, \qquad \frac{\partial f}{\partial y_1} = \lambda v, \qquad \frac{\partial f}{\partial z_1} = \lambda w, \tag{4}$$

et, en outre, le point M devant être sur la courbe donnée, il faut que

$$f(x_1, y_1, z_1) = 0. \tag{5}$$

Mais, au moyen des équations (4), on peut simplifier l'équation (5); en effet,

$$mf(x_1, y_1, z_1) \equiv x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + z_1\frac{\partial f}{\partial z_1} \equiv \lambda(ux_1 + vy_1 + wz_1),$$

m étant le degré de la courbe donnée; donc, comme on suppose $\lambda \neq 0$, on peut remplacer l'équation (5) par la suivante

$$(6) \qquad ux_1 + vy_1 + wz_1 = 0.$$

On aura la condition demandée en éliminant λ, x_1, y_1, z_1 entre les équations (4) et (6); on doit remarquer d'ailleurs qu'en réalité on devra éliminer $\frac{x_1}{z_1}$, $\frac{y_1}{z_1}$ et $\frac{\lambda}{z_1^{m-1}}$. On obtiendra ainsi une équation en u, v, w que l'on nomme l'*équation tangentielle de la courbe* (2).

Trouver l'équation tangentielle d'une conique.

356. Écrivons l'équation du second degré sous la forme symétrique

$$(1) \qquad f(x, y, z) \equiv A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz + 2 B' zx + 2 B'' xy = 0.$$

En appliquant la méthode précédente et en supprimant les indices pour abréger l'écriture, c'est-à-dire en représentant les coordonnées du point de contact par x, y, z et remplaçant λ par 2λ, nous devons éliminer x, y, z, λ entre les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} Ax + B''y + B'z - \lambda u = 0, \\ B''x + A'y + Bz - \lambda v = 0, \\ B'x + By + A''z - \lambda w = 0, \\ ux + vy + wz = 0, \end{cases}$$

ce qui donne la condition

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} A & B'' & B' & u \\ B'' & A' & B & v \\ B' & B & A'' & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous représentons par a, a', a'', b, b', b'' les mineurs du discriminant Δ, de sorte que

$$A'A'' - B^2 = a, \qquad B'B'' - AB = b, \qquad \ldots,$$

l'équation précédente s'écrit

$$(4) \qquad au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0.$$

Nous représenterons désormais par $F(u, v, w)$ le premier membre de cette équation; mais il faut remarquer que le déterminant précédent est égal à $-F(u, v, w)$.

Si l'on suppose remplie la condition

$$F(u, v, w) = 0,$$

l'équation

$$ux + vy + wz = 0$$

représente une tangente à la conique ayant pour équation

$$f(x, y, z) = 0.$$

Les coordonnées du point de contact sont déterminées par les équations (2). Nous supposons $\Delta \neq 0$; en résolvant les équations (2) par les formules de Cramer, on obtient

$$x = \frac{\lambda}{\Delta} \times \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial u}, \qquad y = \frac{\lambda}{\Delta} \times \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial v}, \qquad z = \frac{\lambda}{\Delta} \times \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial w};$$

par suite, les coordonnées du point de contact sont, à un facteur près,

$$\frac{\partial F}{\partial u}, \quad \frac{\partial F}{\partial v}, \quad \frac{\partial F}{\partial w}.$$

Lorsque $\Delta = 0$, on sait que $F(u, v, w)$ est un carré parfait; si l'on suppose l'un des mineurs symétriques différent de zéro, par exemple $a'' \neq 0$, l'équation (4) devient

$$(bu + b'v + a''w)^2 = 0;$$

elle exprime que la droite

$$ux + vy + wz = 0$$

passe par le point (b, b', a''). Or l'équation $f(x, y, z) = 0$ représente alors deux droites qui se coupent précisément en ce point; l'équation tangentielle $F(u, v, w) = 0$ exprime alors que la droite (u, v, w) passe par le point de concours des deux droites.

Si l'on suppose $\Delta = 0$ et $a = a' = a'' = 0$, $F(u, v, w)$ est identiquement nul; dans ce cas, l'équation $f(x, y, z) = 0$ représente une droite double, et toute droite du plan rencontre la conique en deux points confondus.

357. *La fonction* $F(u, v, w)$ *est un invariant.* — En effet, on peut considérer $-F(u, v, w)$ comme le discriminant de la forme

quadratique

$$f(x, y, z) + 2t(ux + vy + wz),$$

t étant une variable indépendante.

En particulier, si x, y, z sont des coordonnées homogènes, un changement de coordonnées correspond à la substitution

$$\begin{aligned} x &= \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z, \\ y &= \beta X + \beta' Y + \beta'' Z, \\ z &= Z, \\ t &= T \qquad (z = Z = t = T = 1); \end{aligned}$$

le module de la substitution est égal à $\pm \frac{\sin \theta'}{\sin \theta}$, θ et θ' désignant les angles des axes anciens et nouveaux.

358. *Déterminer la nature des points communs à la droite et à la conique représentées par les équations*

$$ux + vy + w = 0, \qquad f(x, y) = 0.$$

Prenons la droite donnée pour axe des y; en désignant par X, Y les nouvelles coordonnées, on aura

$$ux + vy + w \equiv v_1 Y, \qquad A x^2 + 2 B xy + \ldots \equiv A_1 X^2 + 2 B_1 XY + \ldots;$$

d'ailleurs,

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 & 0 \\ B_1 & C_1 & E_1 & v_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 & 0 \\ 0 & v_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = v_1^2 (D_1^2 - A_1 F_1).$$

Or l'équation aux abscisses des points communs à la conique et au nouvel axe des Y étant

$$A_1 X^2 + 2 D_1 X + F_1 = 0,$$

les points d'intersection seront réels ou imaginaires suivant qu'on supposera

$$D_1^2 - A_1 F_1 > 0 \quad \text{ou} \quad < 0,$$

c'est-à-dire suivant que le déterminant précédent sera positif ou négatif.

Mais le signe de $F(u, v, w)$ ne change pas quand on fait un chan-

gement de coordonnées : donc la condition

$$F(u, v, w) < 0$$

exprime que la droite (u, v, w) coupe la conique donnée en des points réels, et

$$F(u, v, w) > 0$$

exprime qu'elle la coupe en deux points imaginaires conjugués. Tous les coefficients, bien entendu, sont supposés réels.

339. *Autres méthodes pour exprimer qu'une droite est tangente à une courbe.* — Soit $y = ax + h$ l'équation d'une droite; pour exprimer que cette droite est tangente à la courbe $f(x, y) = 0$, il suffit, en général, d'exprimer que l'équation aux abscisses des points d'intersection, c'est-à-dire l'équation

$$(1) \qquad f(x, ax + h) = 0$$

a une racine double. On exprime ainsi que deux des points communs à la droite et à la courbe sont confondus en un seul. D'ailleurs, si la tangente en un point (x, y) de la courbe a pour coefficient angulaire a, on a $-\frac{f'_x}{f'_y} = a$, c'est-à-dire $f'_x + af'_y = 0$. Or cette équation est précisément celle qu'on obtient en égalant à zéro la dérivée de $f(x, ax + h)$ prise par rapport à x. Par conséquent, en écrivant que l'équation (1) a une racine double, on écrit par cela même que la tangente à la courbe en l'un des points où elle est rencontrée par la droite donnée se confond avec cette droite; mais la conclusion n'est légitime que si ce point est simple.

Dans le cas du second degré, on peut employer souvent avec avantage la méthode suivante. On forme l'équation du faisceau des droites joignant l'origine (ou le point $x = 0$, $y = 0$) aux points d'intersection de la droite et de la conique donnée, et l'on exprime que le faisceau se compose de deux droites confondues. On peut aussi, par ce procédé, retrouver la condition de réalité des deux points d'intersection d'une droite et d'une conique.

Supposons $w \neq 0$; l'équation du faisceau des droites joignant le point $(x = 0, y = 0)$ aux points communs à la conique et à la droite représentées par les équations

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0, \qquad ux + vy + wz = 0,$$

est la suivante

$$w^2(Ax^2+A'y^2+2B''xy)-2(By+B'x)(ux+vy)w+A''(ux+vy)^2=0.$$

Le discriminant de ce polynome du second degré en x et y est égal à $w^2F(u, v, w)$.

On retrouve donc les résultats déjà obtenus, et l'on peut remarquer en outre que le résultat trouvé au n° 358 s'applique aux coordonnées trilinéaires. Si $w=0$ et $v\neq 0$, on éliminera y et l'on aura encore le même résultat.

Exemple. — La conique a pour équation

$$Ax^2+Cy^2+Fz^2=0.$$

Le discriminant de

$$w^2(Ax^2+Cy^2)+F(ux+vy)^2$$

ou

$$(Aw^2+Fu^2)x^2+2Fuvxy+(Cw^2+Fv^2)y^2$$

est égal à

$$w^2(CFu^2+AFv^2+ACw^2).$$

L'équation tangentielle de la conique est donc

$$\frac{u^2}{A}+\frac{v^2}{C}+\frac{w^2}{F}=0.$$

La condition pour que la droite (u, v, w) coupe la conique en deux points réels est

$$CFu^2+AFv^2+ACw^2<0.$$

En particulier, l'équation tangentielle de l'ellipse rapportée à ses axes de symétrie ou à deux diamètres conjugués et ayant, par suite, pour équation ponctuelle

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

est

$$a^2u^2+b^2v^2-w^2=0.$$

La condition pour que la droite (u, v, w) coupe cette ellipse en deux points réels est

$$a^2u^2+b^2v^2-w^2>0.$$

En changeant b^2 en $-b^2$, nous avons des résultats analogues

pour l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

L'équation tangentielle est

$$a^2 u^2 - b^2 v^2 - w^2 = 0,$$

et la condition pour que la sécante (u, v, w) coupe l'hyperbole en deux points réels est

$$a^2 u^2 - b^2 v^2 - w^2 < 0.$$

On voit, en outre, aisément que si, cette condition étant remplie, on a

$$a^2 u^2 - b^2 v^2 > 0,$$

les deux points d'intersection appartiennent à une seule branche; si

$$a^2 u^2 - b^2 v^2 < 0,$$

les deux points d'intersections sont réels et il y en a un sur chaque branche.

Considérons encore la parabole ayant pour équation

$$y^2 - 2px = 0;$$

en appliquant la même méthode, on trouve l'équation tangentielle de la parabole

$$2uw - pv^2 = 0.$$

La condition pour que la droite (u, v, w) coupe la parabole en deux points réels est

$$p(2uw - pv^2) < 0.$$

360. *Mener à une courbe une tangente passant par un point donné.* — Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point donné A et $f(x, y, z) = 0$ l'équation de la courbe. Le problème consiste à trouver sur cette courbe un point M tel que la tangente en ce point passe par A. Les coordonnées (x, y, z) du point M sont assujetties à vérifier les deux équations

$$f(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

$$x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z = 0. \tag{2}$$

Nous supposons l'équation (1) algébrique et de degré m; l'équation (2) est aussi algébrique et de degré $m-1$; elle représente une courbe algébrique que l'on nomme *la polaire* du point A et que nous étudierons plus loin. La forme de l'équation (2) montre que la polaire du point A passe par les points multiples de la courbe f.

Les solutions du système (1), (2) qui correspondent à ces points doivent être laissées de côté, car, pour l'un de ces points, l'équation générale de la tangente disparaît identiquement. Il est donc *indispensable* d'examiner si tout point commun aux courbes représentées par les équations (1) et (2) convient; il en est ainsi pour tout point commun à ces courbes et qui n'est pas un point multiple de la première, car si (x, y, z) sont les coordonnées d'un pareil point, l'équation

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = 0$$

représente une droite déterminée qui est la tangente en ce point et l'égalité (2) exprime que cette tangente passe par le point A. Les courbes (1) et (2) ont, en général, $m(m-1)$ points communs.

Le nombre des tangentes que l'on peut mener par un point arbitraire à une courbe algébrique, se nomme *la classe* de cette courbe. Il résulte de ce qui précède que la classe d'une courbe algébrique d'ordre m est, au plus, égale à $m(m-1)$.

Une courbe du second degré proprement dite n'ayant pas de point multiple, sa classe est égale à 2.

La classe d'une courbe est égale au degré de son équation tangentielle. En effet, soit $F(u, v, w) = 0$ l'équation tangentielle d'une courbe. Pour savoir combien on peut mener à cette courbe de tangentes par le point $A(x_1, y_1, z_1)$, il suffit de résoudre le système

$$F(u, v, w) = 0, \qquad ux_1 + vy_1 + wz_1 = 0.$$

Soit μ le degré du polynome homogène $F(u, v, w)$. Si l'on regarde u, v, w comme des coordonnées ponctuelles, les équations précédentes représentent une courbe de degré μ et une droite; le nombre de tangentes cherché est donc égal à μ.

Remarque. — Les points de contact des tangentes issues du point (x_1, y_1), x_1 et y_1 désignant des coordonnées cartésiennes, sont à l'intersection de la courbe proposée et de la courbe qui a pour équation

$$(x_1 - x)f'_x + (y_1 - y)f'_y = 0. \tag{3}$$

On obtient cette équation en exprimant que l'équation

$$(X-x)f'_x+(Y-y)f'_y=0$$

de la tangente au point (x, y) est vérifiée par les coordonnées x_1, y_1 du point A.

L'équation (3) est du degré m; la courbe qu'elle représente coupe la courbe donnée en m^2 points; mais on reconnaît immédiatement que les directions asymptotiques de ces deux courbes sont les mêmes; par conséquent, elles n'ont que $m(m-1)$ points communs à distance finie.

361. *Mener à une courbe une tangente parallèle à une direction donnée.* — Soient α, β les paramètres de la direction donnée; on exprime que la tangente au point (x, y) est parallèle à cette direction en posant

$$\alpha f'_x+\beta f'_y=0. \tag{4}$$

Les points de contact des tangentes parallèles à la direction donnée sont donc à l'intersection de la courbe f et de la courbe de degré $m-1$ représentée par l'équation (4). Il y a donc, au plus, $m(m-1)$ solutions.

D'ailleurs ce problème ne diffère pas du précédent; il suffit de supposer que le point A s'éloigne à l'infini dans la direction (α, β); il suffit donc de poser $x_1=\alpha$, $y_1=\beta$, $z_1=0$; l'équation (2) se confond alors avec l'équation (4).

362. *Former l'équation du faisceau des tangentes à une courbe, issues d'un point donné ou parallèles à une droite donnée. Cas du second degré.* — Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point A; on obtiendra l'équation du faisceau des tangentes à la courbe ayant pour équation

$$f(x, y, z)=0,$$

issues de A, en éliminant x, y, z entre l'équation précédente et les deux équations

$$Xf'_x+Yf'_y+Zf'_z=0, \qquad x_1f'_x+y_1f'_y+z_1f'_z=0.$$

Mais on peut opérer autrement. Soient x, y, z les coordonnées d'un point M; pour que la droite AM soit tangente, il faut que l'équation en λ

$$f(x_1+\lambda x, y_1+\lambda y, z_1+\lambda z)=0$$

ait une racine double. En exprimant cette condition, on obtiendra l'équation du faisceau formé par toutes les tangentes issues de A et, en outre, par les droites obtenues en joignant le point A aux points multiples de la courbe f.

Mais la méthode s'applique aux courbes du *second degré* et ne donne que les tangentes issues de A, puisqu'une courbe du second degré, non dégénérée, n'a pas de point multiple.

Supposons donc que le polynome $f(x, y, z)$ soit du second degré; l'équation précédente développée étant

$$f(x_1, y_1, z_1) + \lambda\,(xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1}) + \lambda^2 f(x, y, z) = 0,$$

l'équation

$$4f(x, y, z)f(x_1, y_1, z_1) - (x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z)^2 = 0$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que la droite AM coupe la conique en deux points confondus en un seul; cette équation est donc vérifiée par les coordonnées d'un point pris sur l'une quelconque des deux tangentes issues du point A, et comme elle est du second degré, elle ne représente que ces tangentes. C'est l'équation du faisceau des tangentes issues du point A.

Si l'on pose $x_1 = \alpha$, $y_1 = \beta$, $z_1 = 0$, l'équation

$$4f(x, y, z)\,\varphi(\alpha, \beta) - (\alpha f'_x + \beta f'_y)^2 = 0$$

représente le faisceau des tangentes à la conique f, parallèles à la direction (α, β). On voit que, dans ce cas, la corde des contacts est le diamètre conjugué à la direction donnée.

On peut obtenir directement cette équation. D'une manière générale, si l'on désigne par x, y les coordonnées d'un point, la droite menée par ce point, parallèlement à la direction (α, β), sera tangente, ou passera par un point multiple de la courbe $f(x, y, z) = 0$ si l'équation en ρ

$$f(x + \alpha\rho, y + \beta\rho) = 0$$

a une racine double. Dans le cas du second degré, cette équation étant développée devient

$$\rho^2\varphi(\alpha, \beta) + \rho\,(\alpha f'_x + \beta f'_y) + f(x, y) = 0;$$

en écrivant que cette équation a une racine double, on retrouve l'équation obtenue plus haut.

363. *Condition pour que les tangentes menées d'un point* A *à une conique soient réelles.* — Pour que les tangentes issues du point A (x_1, y_1) soient réelles, il faut et il suffit que la polaire du point A coupe la courbe en des points réels; l'équation de la polaire

$$x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z = 0$$

peut s'écrire, dans le cas du second degré,

$$x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1} = 0;$$

la condition de réalité des points d'intersection de cette droite et de la courbe du second degré donnée est

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & f'_{x_1} \\ B'' & A' & B & f'_{y_1} \\ B' & B & A'' & f'_{z_1} \\ f'_{x_1} & f'_{y_1} & f'_{z_1} & 0 \end{vmatrix} > 0.$$

On peut transformer aisément ce déterminant en ajoutant à la dernière colonne les éléments des trois premières multipliés respectivement par $-2x_1$, $-2y_1$, $-2z_1$, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & 0 \\ B'' & A' & B & 0 \\ B' & B & A'' & 0 \\ f'_{x_1} & f'_{y_1} & f'_{z_1} & -4f(x_1, y_1, z_1) \end{vmatrix} > 0,$$

c'est-à-dire

$$-4f(x_1, y_1, z_1)\Delta > 0.$$

Donc, si

$$f(x_1, y_1, z_1)\Delta < 0,$$

les tangentes issues de A sont réelles et distinctes; si

$$f(x_1, y_1, z_1)\Delta > 0,$$

elles sont imaginaires.

Pareillement, la condition

$$\varphi(\alpha, \beta)\Delta < 0,$$

exprime que les tangentes parallèles à la direction (α, β) sont réelles et si

$$\varphi(\alpha, \beta)\Delta > 0,$$

elles sont imaginaires.

Appliquons ces résultats aux formes réduites.

1° *Ellipse* : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $\Delta=-\frac{1}{a^2b^2}$. La condition pour que les tangentes issues du point (x_1, y_1) soient réelles est donc

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1>0.$$

Les tangentes parallèles à la direction (α, β) sont toujours réelles.

2° *Hyperbole* : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $\Delta=\frac{1}{a^2b^2}$. — La condition de réalité des tangentes issues du point (x_1, y_1) est

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}-1<0.$$

La corde des contacts a pour équation

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}-1=0;$$

pour que cette droite ne coupe qu'une seule branche, il faut que l'on ait

$$b^2x_1^2-a^2y_1^2<0.$$

Le faisceau des tangentes parallèles à la direction (α, β) est réel si

$$\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}<0,$$

ce qui exprime que la parallèle à la direction donnée, menée par le centre, ne doit pas couper l'hyperbole.

3° *Parabole* : $y^2-2px=0$, $\Delta=-p^2$. — On peut donc mener des tangentes réelles du point (x_1, y_1) si l'on suppose

$$y_1^2-2px_1>0.$$

On ne peut mener à la parabole qu'une seule tangente parallèle à la direction donnée; en effet, la tangente au point (x, y) est parallèle à la direction α, β si $\beta y-p\alpha=0$. La droite représentée par cette équation ne coupe la parabole qu'en un seul point à distance finie.

La condition $\Delta\,\varphi(\alpha, \beta)<0$ se réduit d'ailleurs à $-p^2\beta^2<0$; elle

est donc remplie, sauf si $\beta = 0$: on ne peut mener à la parabole aucune tangente parallèle à l'axe.

Il nous reste à interpréter la condition $\Delta f(x_1, y_1 z_1) < 0$ que nous avons trouvée plus haut; pour cela, nous devons présenter quelques considérations générales.

Remarques sur l'inégalité $f(x, y) > 0$.

364. Soit $f(x, y)$ un polynome entier de degré m; soient $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ deux points donnés. Nous savons que

$$\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

sont les coordonnées d'un point P situé sur la droite AB. Les points d'intersection de AB et de la courbe C ayant pour équation $f(x, y) = 0$, ou, sous forme homogène, $f(x, y, z) = 0$, sont les points ayant pour coordonnées les résultats obtenus, en remplaçant dans les expressions précédentes λ par les racines de l'équation

$$(1) \qquad f(x_1 + \lambda x_2,\ y_1 + \lambda y_2,\ 1 + \lambda) = 0.$$

Le terme indépendant de λ étant égal à $f(x_1, y_1)$ et le coefficient de λ^m étant égal à $f(x_2, y_2)$, le produit des racines de l'équation précédente est égal à

$$\frac{(-1)^m f(x_1, y_1)}{f(x_2, y_2)}.$$

Mais, si λ_k est l'une de ces racines et P_k le point d'intersection correspondant, on a

$$\frac{P_k A}{P_k B} = -\lambda_k;$$

donc, en appelant $P_1, P_2, \ldots, P_m$ les m points d'intersection de AB et de la courbe C, on a

$$(2) \qquad \frac{P_1 A}{P_1 B} \times \frac{P_2 A}{P_2 B} \times \ldots \times \frac{P_m A}{P_m B} = \frac{f(x_1, y_1)}{f(x_2, y_2)}.$$

Parmi les points d'intersection, quelques-uns peuvent être imaginaires : ce sont ceux qui correspondent aux racines imaginaires de l'équation (1); mais, ces racines étant conjuguées deux à deux, le

nombre des points d'intersection imaginaires est pair et le produit des rapports segmentaires correspondants est positif. En second lieu, pour tout point réel P de la droite AB, non situé entre A et B, le rapport $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ est positif. Donc $f(x_1, y_1)$ et $f(x_2, y_2)$ ont le même signe ou des signes contraires, suivant que le nombre des points d'intersection de la courbe C et de la droite AB qui sont situés entre A et B est pair ou impair; ou, sous une autre forme, suivant qu'un mobile qui décrit le segment $\overline{AB}$ rencontre la courbe C un nombre pair ou un nombre impair de fois. Seulement, il faut avoir égard à une considération importante. Si, par exemple, la courbe C est du second degré, il peut arriver que la droite AB soit tangente à C en un point P situé entre A et B; ce point devra compter pour deux, car il correspond à une racine double de l'équation (1). D'une manière générale, chaque point de rencontre doit compter autant de fois qu'il y a d'unités dans l'ordre de multiplicité de la racine λ correspondante.

365. Cela étant, la courbe C partage le plan en un certain nombre de régions dans chacune desquelles le polynome $f(x, y)$ a un signe déterminé. Pour plus de clarté, supposons que C soit une ellipse; cette ellipse partage le plan en deux régions, l'une contenant son centre et que nous pouvons appeler *la région intérieure*, l'autre étant *la région extérieure*. Si les points A et B sont dans la région intérieure, le segment $\overline{AB}$ ne rencontre pas l'ellipse; donc $f(x_1, y_1)$ et $f(x_2, y_2)$ ont le même signe et, par suite, si (x, y) sont les coordonnées d'un point intérieur, $f(x, y)$ a un signe déterminé. Si le point A est à l'intérieur et B à l'extérieur, $f(x_1, y_1)$ et $f(x_2, y_2)$ ont des signes contraires; donc $f(x, y)$ a des signes différents suivant que le point (x, y) est à l'intérieur ou à l'extérieur de l'ellipse. Mais on ne peut pas dire *a priori* quel signe correspond à l'une ou à l'autre de ces régions, car, si l'équation de la courbe est $f(x, y) = 0$, elle est aussi bien $k(x, y) = 0$, k étant un facteur arbitraire; or, pour remédier à cette difficulté, il suffit évidemment de multiplier $f(x, y)$ par un invariant impair et de considérer par exemple le produit $\Delta f(x, y)$; on reconnaît en effet immédiatement que ce produit conserve un signe absolument déterminé pour un point donné, quels que soient les axes auxquels on rapporte la courbe. S'il s'agit de l'ellipse

et si x_0, y_0 sont les coordonnées du centre, on a

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\Delta^2}{\delta};$$

donc l'inégalité

$$\Delta f(x_1, y_1) < 0$$

exprime que le point x_1, y_1 est *extérieur*. Ainsi, pour qu'on puisse mener à une ellipse des tangentes par un point A, il faut et il suffit que ce point soit extérieur à l'ellipse, ou sur l'ellipse; dans le dernier cas, les tangentes se confondent en une seule.

C'est d'ailleurs ce que l'on peut vérifier en rapportant l'ellipse à ses deux axes de symétrie par exemple, car la condition

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 > 0$$

exprime que le point (x_1, y_1) est à l'extérieur, puisque, en remplaçant x et y par zéro, on a un résultat négatif.

Considérons maintenant une hyperbole; elle partage le plan en trois régions. On appellera *région extérieure* celle où se trouve le centre; les deux autres régions sont regardées comme constituant l'intérieur. Si nous substituons à x et y les coordonnées du centre dans l'expression $\Delta f(x, y)$, nous trouvons encore $\frac{\Delta^2}{\delta}$. Mais ce résultat est négatif, donc la condition

$$\Delta f(x_1, y_1) < 0$$

exprime que le point (x_1, y_1) doit être à l'extérieur. Donc, pour qu'on puisse mener d'un point A à une hyperbole deux tangentes réelles, il faut et il suffit que le point A soit *extérieur*. Il convient de remarquer que, si le point A coïncide avec le centre, les tangentes issues de ce point sont les asymptotes. Enfin, si le point A est sur l'hyperbole, les deux tangentes se confondent.

Reste à examiner la parabole. Nous appellerons *région intérieure* celle où se trouve le foyer. Soient (x, y) les coordonnées d'un point situé sur la tangente au sommet; pour déterminer le signe de $\Delta f(x, y)$, nous pouvons supposer la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet; on a alors

$$f(x, y) \equiv k(Y^2 - 2pX),$$

k étant une constante; mais on n'a pas à tenir compte de ce facteur k, car, en le supprimant, $\Delta f(x, y)$ est divisé par k^4. Donc il suffit de considérer le produit $-p^2(Y^2 - 2pX)$; or, si $X = 0$, le résultat est négatif; donc l'inégalité $\Delta f(x, y) < 0$ exprime que le point (x_1, y_1) est extérieur à la parabole. Donc enfin, pour qu'on puisse mener d'un point A deux tangentes à une parabole, il faut et il suffit que A soit extérieur à cette parabole.

En résumé, suivant qu'on a $\Delta f(x, y) > 0$ ou < 0, le point (x, y) est intérieur ou extérieur à la conique f.

Il convient de remarquer que, si $f(x, y)$ est de degré m, on a, en posant $x_1 = \frac{X_1}{Z_1}$, $y_1 = \frac{Y_1}{Z_1}$, l'identité

$$Z_1^m f\left(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}\right) = f(X_1, Y_1, Z_1);$$

$f(X_1, Y_1, Z_1)$ a donc le même signe que $f(x_1, y_1)$ quand m est *pair*.

De même, si α, β, γ sont des fonctions linéaires, $f(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $f(\lambda\alpha_1, \lambda\beta_1, \lambda\gamma_1)$ ont le même signe quand le degré est pair.

366. *Trouver le lieu des points d'où l'on peut mener à une conique deux tangentes rectangulaires.* — Supposons la conique rapportée à deux axes rectangulaires, son équation étant

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Nous savons former l'équation du faisceau des tangentes issues du point (x_1, y_1); en ne conservant dans cette équation que les termes du plus haut degré, nous aurons l'équation du faisceau des parallèles à ces tangentes, menées par l'origine des coordonnées, savoir

$$4(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) f(x_1, y_1) - (x f'_{x_1} + y f'_{y_1})^2 = 0.$$

La condition pour que ces droites soient rectangulaires est

$$4(A + C) f(x_1, y_1) - f'^2_{x_1} - f'^2_{y_1} = 0.$$

Cette équation est celle du lieu demandé, si l'on remplace x_1, y_1 par des coordonnées courantes. Or l'ensemble des termes du second degré est

$$4(A + C)(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) - 4(Ax + By)^2 - 4(Bx + Cy)^2$$

ou, en réduisant,

$$4\delta(x^2 + y^2).$$

Le lieu est donc un cercle, s'il s'agit de l'ellipse ou de l'hyperbole; une droite, dans le cas de la parabole.

Examinons successivement les trois courbes.

1° *Ellipse.* — Si l'on prend pour axes les deux axes de symétrie, l'équation du lieu sera

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)-\frac{x^2}{a^4}-\frac{y^2}{b^4}=0$$

ou

$$x^2+y^2-a^2-b^2=0.$$

Le lieu est donc le cercle circonscrit au rectangle ayant pour côtés les tangentes aux sommets; dès que l'on a su que le lieu est un cercle, ce résultat était évident.

2° *Hyperbole.* — Le même calcul donne, pour l'hyperbole,

$$x^2+y^2=a^2-b^2.$$

Le lieu est donc encore un cercle, qui n'est réel que si $a>b$, et qui se réduit au centre de l'hyperbole si $a=b$.

3° *Parabole.* — En mettant l'équation de la parabole sous la forme

$$y^2-2px=0,$$

l'équation du lieu devient

$$x+\frac{p}{2}=0:$$

le lieu est donc la *directrice*.

Il résulte de là que, si l'équation de la parabole est donnée sous la forme générale, avec des axes rectangulaires quelconques, l'équation de la directrice est

$$(A+C)(2Dx+2Ey+F)-2D(Ax+By)-D^2-2E(Bx+Cy)-E^2=0$$

ou, en simplifiant encore,

$$2x(CD-BE)+2y(AE-BD)+F(A+C)-D^2-E^2=0.$$

Le cercle que nous avons obtenu, dans le cas de l'ellipse ou de l'hyperbole, se nomme *le cercle de Monge* ou *le cercle orthoptique.*

367. *Exprimer que deux courbes se coupent sous un angle donné.* — Soient

(1) $$f(x,y)=0,$$

(2) $$g(x,y)=0$$

les équations de deux courbes, rapportées à deux axes rectangu-

laires. Soient (x, y) les coordonnées d'un point commun à ces deux courbes; si la tangente à la première courbe fait, avec la tangente à la seconde, en ce point, un angle égal à V, on a

$$\frac{f'_x g'_y - f'_y g'_x}{f'_x g'_x + f'_y g'_y} = \operatorname{tang} V. \tag{3}$$

On obtiendra donc la condition demandée en éliminant x et y entre les équations (1), (2) et (3).

Si les courbes doivent être tangentes au point (x, y), on a

$$\operatorname{tang} V = 0,$$

et, par suite, on remplace l'équation (3) par celle-ci

$$f'_x g'_y - f'_y g'_x = 0; \tag{4}$$

et, pour exprimer qu'elles sont orthogonales, on éliminera x et y entre les équations (1) (2) et l'équation

$$f'_x g'_x + f'_y g'_y = 0. \tag{5}$$

Pour exprimer que deux courbes sont tangentes, on se sert avantageusement des coordonnées homogènes. En écrivant que les tangentes aux deux courbes au point (x, y) coïncident, on obtient les équations

$$\frac{f'_x}{g'_x} = \frac{f'_y}{g'_y} = \frac{f'_z}{g'_z}, \tag{6}$$

et l'on élimine x, y, z entre ces équations et les équations des deux courbes mises sous forme homogène.

Il convient de remarquer que, si l'on suppose qu'un système de valeurs x, y, z vérifient l'équation (6) et l'équation $f(x, y, z) = 0$, l'équation $g(x, y, z) = 0$ sera aussi vérifiée, car, si l'on suppose que

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = 0,$$

les dérivées du polynome $g(x, y, z)$ étant, en vertu des équations (6), proportionnelles à celles de $f(x, y, z)$, on aura encore

$$xg'_x + yg'_y + zg'_z = 0,$$

c'est-à-dire $g(x, y, z) = 0$.

368. Exemples. — 1° *Exprimer que les cercles ayant pour équations*

$$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad x^2+y^2+2D'x+2E'y+F=0$$

se coupent à angle droit.

Nous devons éliminer x et y entre ces deux équations et la suivante

$$(x+D)(x+D')+(y+E)(y+E')=0.$$

Il suffit d'ajouter membre à membre, après avoir multiplié le premier membre de la dernière équation par -2; on trouve immédiatement

$$2DD'+2EE'=F+F',$$

condition déjà obtenue par une autre voie.

2° *Exprimer que les cercles ayant pour équations*

$$x^2+y^2-R^2=0, \qquad (x-a)^2+y^2-R'^2=0$$

sont tangents.

En écrivant que les tangentes au point (x, y) ont même direction, on obtient l'équation

$$xy-(x-a)y=0$$

ou

$$ay=0,$$

c'est-à-dire $y=0$, en supposant $a \neq 0$.

Il reste donc à éliminer x entre les deux équations

$$x^2-R^2=0, \qquad (x-a)^2-R^2=0:$$

la condition demandée est

$$a=\pm R \pm R';$$

en supposant $a>0$, $R>R'$, cette condition devient

$$a=R+R' \qquad \text{ou} \qquad a=R-R',$$

résultats connus en Géométrie élémentaire.

Remarque. — Si l'on écrit que les coefficients des équations des tangentes au point (x, y) sont proportionnels, on obtient les équations

$$\frac{x}{x-a}=\frac{y}{y}=\frac{R^2}{a(x-a)+R'^2}.$$

On ne peut remplacer $\frac{y}{y}$ par 1, car on devrait avoir aussi $\frac{x}{x-a}=1$, ce qui ne peut avoir lieu pour aucune valeur finie de x; donc $y=0$, ...

3° *Condition pour que deux coniques coaxiales se coupent à angle droit.* — Soient

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}-1=0, \qquad \frac{x^2}{\alpha'}+\frac{y^2}{\beta'}-1=0$$

deux coniques dont les axes de symétrie coïncident; on obtient la condition demandée en éliminant x et y entre les deux équations précédentes et celle-ci

$$\frac{x^2}{\alpha\alpha'}+\frac{y^2}{\beta\beta'}=0.$$

On trouve $\alpha-\beta=\alpha'-\beta'$; en outre, pour que les points d'intersection soient réels, il faut supposer $\alpha\beta.\alpha'\beta'<0$; donc, l'une des coniques doit être une ellipse et l'autre une hyperbole; si l'on suppose, par exemple, que les deux équations soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \qquad \frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}-1=0,$$

la condition $a^2-b^2=a'^2+b'^2$ exprime que les deux courbes doivent avoir les mêmes foyers; et alors elles se coupent à angle droit en chacun de leurs quatre points d'intersection.

Normales.

369. On appelle *normale* à une courbe la perpendiculaire à une tangente à cette courbe menée par le point de contact. Ce point s'appelle le *pied* ou le *point d'incidence* de la normale.

Si les axes sont rectangulaires, la normale au point (x, y) de la courbe $f(x, y)=0$ a pour équation

$$\frac{X-x}{f'_x}=\frac{Y-y}{f'_y},$$

et, si les axes sont obliques,

$$\frac{X-x}{f'_x-f'_y\cos\theta}=\frac{Y-y}{f'_y-f'_x\cos\theta},$$

θ étant l'angle des axes.

On peut encore, quand les axes sont rectangulaires, mettre l'équation de la normale sous la forme

$$X-x+(Y-y)y'_x=0$$

ou

$$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy=0.$$

370. *Mener par un point une normale à une courbe donnée.* —

Supposons les coordonnées rectangulaires. Soient

(1) $$f(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe et x_1, y_1 les coordonnées d'un point donné A. Il s'agit de trouver un point M sur la courbe donnée, tel que la droite AM soit normale en M à cette courbe; les coordonnées (x, y) du point M doivent donc vérifier l'équation (1) et l'équation

(2) $$\frac{x_1 - x}{f'_x} = \frac{y_1 - y}{f'_y}.$$

Tout point commun aux courbes représentées par les équations (1) et (2) satisfait à la question, pourvu que ce point ne soit pas un point multiple de la courbe proposée. Si la courbe donnée f est du degré m, il en est de même de la courbe représentée par l'équation (2); donc on peut mener par un point donné au plus m^2 normales à une courbe algébrique de degré m.

En particulier, on peut mener à une courbe du second degré *quatre normales* par un point donné. L'équation (2) représente alors une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes de la conique et qui passe par son centre et par le point donné. Nous reprendrons plus loin ce problème.

Si x_1, y_1 sont les coordonnées du centre, l'équation (2) représente le faisceau des axes de la conique (1).

371. *Mener à une courbe une normale parallèle à une direction donnée.* — Exprimons que la normale au point (x, y) est parallèle à une direction (α, β), ce qui donne l'équation

(3) $$\alpha f'_y - \beta f'_x = 0.$$

Les pieds des normales parallèles à la direction donnée sont donc les points simples de la courbe proposée qui sont sur la courbe d'ordre $m - 1$ représentée par l'équation (3); il y a, au plus, $m(m - 1)$ solutions, ce que l'on pouvait prévoir, car il y a autant de normales parallèles à une direction donnée que de tangentes perpendiculaires à cette direction.

Remarque. — Supposons que le point A (x_1, y_1) s'éloigne indéfiniment dans la direction (α, β) et cherchons ce que devient alors l'équation (2). Pour cela, remplaçons x_1 et y_1 par $\frac{X_1}{Z_1}$, $\frac{Y_1}{Z_1}$ et les coordonnées courantes x, y par

$\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}$; par cette substitution, l'équation devient

$$(X_1 Z - X Z_1) f'_Y - (Y_1 Z - Y Z_1) f'_X = 0.$$

et si $X_1 = \alpha$, $Y_1 = \beta$, $Z_1 = 0$, on obtient, à la limite,

$$Z(\alpha f'_Y - \beta f'_X) = 0.$$

La courbe représentée par l'équation (2) se décompose donc en deux parties : la droite de l'infini et la courbe (3). Donc, m des points d'intersection des courbes (1) et (2) sont rejetés à l'infini et il ne reste que $m^2 - m$ ou $m(m-1)$ solutions finies, au plus.

372. *Exprimer qu'une droite est normale à une courbe donnée.* — On identifie l'équation de la droite donnée avec celle de la normale en un point (x_1, y_1) appartenant à la courbe et l'on élimine x_1, y_1 entre les deux relations fournies par l'identification et la condition $f(x_1, y_1) = 0$.

Application au second degré. — 1° Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} - 1 = 0$$

l'équation d'une conique à centre rapportée à ses axes de symétrie. La normale au point (x_1, y_1) ayant pour équation

$$\frac{a^2(x - x_1)}{x_1} = \frac{\varepsilon b^2(y - y_1)}{y_1},$$

identifions cette équation avec

$$ux + vy + w = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{ux_1}{a^2} = \frac{vy_1}{-\varepsilon b^2} = \frac{w}{\varepsilon b^2 - a^2},$$

d'où, en posant, pour abréger, $a^2 - \varepsilon b^2 = c^2$,

$$\frac{x_1}{a} = -\frac{a}{c^2} \cdot \frac{w}{u}, \qquad \frac{y_1}{b} = \varepsilon \frac{b}{c^2} \cdot \frac{w}{v}.$$

La condition demandée est donc

$$\frac{a^2}{u^2} + \varepsilon \frac{b^2}{v^2} = \frac{c^4}{w^2}.$$

2° Considérons en second lieu la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet :

$$y^2 - 2px = 0.$$

Il s'agit d'identifier les équations

$$\frac{x-x_1}{-p}=\frac{y-y_1}{y_1}, \qquad ux+vy+w=0,$$

ce qui fournit les deux équations

$$\frac{y_1}{u}=\frac{p}{v}=-\frac{y_1(x_1+p)}{w}.$$

On en tire

$$y_1=p.\frac{u}{v}, \qquad x_1=-\left(p+\frac{w}{u}\right),$$

et, par suite, la condition demandée est

$$pu^3+2puv^2+2wv^2=0.$$

373. Théorème. — *Le cercle est la seule courbe dont toutes les normales passent par un point fixe.*

Prenons deux axes rectangulaires passant par le point fixe. Pour que la normale au point (x, y) passe par l'origine, il faut que

$$x+yy'_x=0.$$

Il s'agit de déterminer la fonction y qui vérifie l'équation précédente. Le premier membre est la dérivée de $\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, par rapport à x; donc

$$x^2+y^2=C,$$

C désignant une constante arbitraire, ce qui démontre la proposition.

Détermination de la tangente et de la normale à une courbe dont les coordonnées sont des fonctions d'un paramètre.

374. Supposons que les coordonnées cartésiennes d'un point M soient des fonctions, pourvues de dérivées, d'un paramètre variable t

$$x=f(t), \qquad y=\varphi(t).$$

Quand on fait varier ce paramètre, le point M décrit une courbe dont on obtiendrait l'équation en éliminant t. Supposons, pour plus de simplicité, les axes rectangulaires et, en outre, les fonctions $f(t)$ et $\varphi(t)$ uniformes, c'est-à-dire n'ayant qu'une seule détermination pour chaque valeur de t. Le coefficient angulaire de la tangente au point pour lequel le paramètre a une valeur particulière t a pour

valeur $\frac{dy}{dx}$, ou $\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$, c'est-à-dire $\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}$; la tangente en ce point a donc pour équation

$$\frac{X - f(t)}{f'(t)} = \frac{Y - \varphi(t)}{\varphi'(t)},$$

et l'équation de la normale au même point est

$$[X - f(t)]f'(t) + [Y - \varphi(t)]\varphi'(t) = 0.$$

375. *Exemples.* — 1° Les formules $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ définissent une ellipse. La tangente et la normale au point t ont respectivement pour équations

$$\frac{x\cos t}{a} + \frac{y\sin t}{b} = 1,$$

$$\frac{ax}{\cos t} - \frac{by}{\sin t} = c^2, \qquad (c^2 = a^2 - b^2).$$

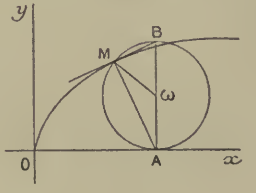
2° De même $x = a\,\mathrm{Ch}\,t$, $y = b\,\mathrm{Sh}\,t$ représentent une hyperbole; la tangente et la normale au point t ont pour équations

$$\frac{x\,\mathrm{Ch}\,t}{a} - \frac{y\,\mathrm{Sh}\,t}{b} = 1,$$

$$\frac{ax}{\mathrm{Ch}\,t} + \frac{by}{\mathrm{Sh}\,t} = c^2, \qquad (c^2 = a^2 + b^2).$$

3° Soient Ox, Oy deux axes rectangulaires (*fig.* 90); un cercle variable de rayon constant a se déplace en restant constamment tangent à l'axe des x. On prend un point M tel que arc AM $=$ OA; on demande la tangente en M à la courbe décrite par le point M.

Fig. 90.



Si l'on nomme t l'angle $\widehat{A\omega M}$, les coordonnées x, y du point M sont données, comme on le voit aisément en calculant les projections du chemin $OA\omega M$ sur les deux axes, par les formules

$$x = at - a\sin t, \qquad y = a - a\cos t.$$

La normale en M a pour équation

$$x - at)(1 - \cos t) + y\sin t = 0.$$

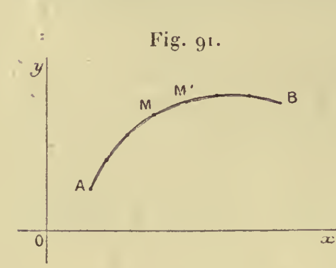
Sous cette forme, on reconnaît que cette normale coïncide avec la droite MA. La tangente en M est donc la droite MB.

Si l'on imagine que le cercle ω roule sans glisser sur Ox, le lieu du point M est la courbe décrite par celui des points liés invariablement au cercle, qui était confondu avec le point O, quand ce cercle était tangent en O à l'axe Ox. Cette courbe se nomme *cycloïde*.

Longueur d'un arc de courbe.

376. Soit AB un arc de courbe plane (*fig.* 91); nous allons démontrer que le périmètre d'une ligne brisée inscrite à cet arc et dont chaque côté tend vers zéro, les extrémités de cette brisée étant confondues avec celles de l'arc, tend vers une limite déterminée, indépendante du mode d'inscription de la brisée et de la loi suivant laquelle ses côtés tendent vers zéro.

Fig. 91.



Pour le prouver, rapportons la figure à deux axes rectangulaires Ox, Oy tracés dans son plan. Soient M, M' deux sommets consécutifs de la brisée. En appelant x et y les coordonnées de M et $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ celles de M', on a, en supposant $\Delta x > 0$ pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, abscisses de A et de B,

$$\text{corde MM}' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{+1 \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Nous supposons que l'ordonnée y soit une fonction de x pourvue d'une dérivée y'; chaque côté de la brisée tendant vers zéro, nous pouvons poser

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + y'^2} + \alpha,$$

α tendant vers zéro en même temps que Δx. Le périmètre de la brisée est égal à la somme

$$\Sigma \Delta x \left(\sqrt{1 + y'^2} + \alpha\right).$$

Cette somme se compose de deux parties; la première, $\Sigma \sqrt{1 + y'^2}.\Delta x$, a pour limite l'intégrale

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

La seconde partie, $\Sigma \alpha \Delta x$, a pour limite zéro; nous supposons en effet, comme nous l'avons dit, que si un point M parcourt l'arc AB de A vers B,

l'abscisse de ce point va en croissant de A vers B. S'il n'en était pas ainsi, on partagerait l'arc AB en portions remplissant cette condition. Dès lors, les infiniment petits Δx étant tous positifs et leur somme $\Sigma\Delta x$ étant égale à $b-a$, on sait que $\Sigma\alpha\Delta x$ a pour limite zéro. Donc la limite du périmètre de la brisée inscrite à l'arc AB est égale à l'intégrale précédente; elle est, par suite, indépendante de la loi suivant laquelle les côtés tendent vers zéro. Cette limite est, par définition, la longueur de l'arc AB. Cela étant, si l'on suppose le point M mobile et que l'on désigne par s la longueur de l'arc AM, on a

$$s = \int_a^x \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

et, par suite,

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx = \sqrt{dx^2+dy^2}, \qquad \text{d'où} \qquad ds^2 = dx^2+dy^2.$$

On voit encore que, si M et M' sont deux points infiniment voisins de l'arc de courbe que nous avons considéré, on a

$$\text{arc MM}' = \Delta s, \qquad \text{corde MM}' = \Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2};$$

on en conclut que le rapport de l'arc MM' à sa corde a pour limite 1, quand l'arc tend vers zéro.

377. *Exemple.* — Si l'on désigne par C la longueur de la circonférence d'un cercle de rayon R rapporté à deux diamètres rectangulaires, on a

$$C = 4R\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

ou, en posant $x = Ru$,

$$C = 4R\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Le rapport $\frac{C}{2R}$ est donc constant; en le désignant par π on a

$$C = 2\pi R, \qquad \pi = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

378. Soit α l'angle que la tangente en M fait avec l'axe des x. En supposant les axes rectangulaires, $\tang\alpha = \frac{dy}{dx}$, donc

$$\frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\sin\alpha} = \varepsilon\,ds, \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

d'où, en prenant $\varepsilon = +1$,

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \sin\alpha = \frac{dy}{ds}.$$

L'angle α ainsi défini est déterminé à un multiple près de 2π.

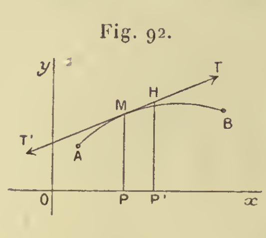


Fig. 92.

Soit A l'origine des arcs (*fig.* 92); l'arc AM croît avec x, donc $\cos\alpha$ est positif. L'angle α est celui que la demi-tangente MT fait avec $\overline{Ox}$. Si l'origine des arcs est en B, de sorte que l'arc s décroisse quand x croît, $\cos\alpha$ est négatif, et, par suite, α est l'angle que la demi-tangente MT′ fait avec l'arc $\overline{Ox}$. On peut encore remarquer que, si $PP' = dx$, on a $\overline{MH} = ds$, le segment MH étant sur la tangente T′T. (On peut remarquer que l'angle α est celui que la *vitesse* d'un mobile décrivant l'arc de courbe donné fait avec $\overline{Ox}$.)

Tangente, normale, sous-tangente, sous-normale.

379. Considérons une courbe rapportée à deux axes rectangulaires (*fig.* 93), et soient T et N les points où la tangente et la normale en un point N rencontrent l'axe des x. On nomme *longueur de la tangente,* ou simplement *tangente,* le segment MT, et *normale* le segment MN.

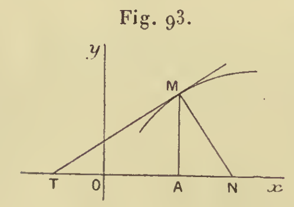


Fig. 93.

Soit A le pied de l'ordonnée du point M; on nomme *sous-normale* le segment $\overline{AN}$ et *sous-tangente* le segment $\overline{AT}$; nous poserons

$$S_N = \overline{AN}, \qquad S_T = \overline{AT}, \qquad T = |MT|, \qquad N = |MN|.$$

L'équation de la tangente en M étant

$$Y - y = y'_x(X - x),$$

si l'on désigne par x' l'abscisse du point T, on trouve, en faisant $Y = 0$,

$$x' - x = -\frac{y}{y'_x},$$

ce qui donne

$$S_T = -\frac{y}{y'}.$$

Pareillement, l'équation de la normale en M étant

$$X - x + y'(Y - y) = 0,$$

si l'on nomme x'' l'abscisse de la trace N de la normale sur l'axe des x, on a

$$x'' - x = yy',$$

c'est-à-dire

$$S_N = yy'.$$

Comme vérification, on peut remarquer que $S_N . S_T = -y^2$.

On a ensuite

$$T = \frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}, \qquad N = y\sqrt{1+y'^2}.$$

On peut écrire les formules précédentes de cette manière

$$S_T = -y\frac{dx}{dy}, \qquad S_N = y\frac{dy}{dx}, \qquad T = y\frac{ds}{dy}, \qquad N = y\frac{ds}{dx}.$$

380. Applications. — 1° *La sous-normale d'une parabole, relative à son axe, est constante et réciproquement.*

En effet, soit $y^2 = 2px$ l'équation d'une parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet : $S_N = yy' = p$.

Réciproquement, si $S_N = p$, on a $yy'_x = p$, donc $y^2 = 2px + C$.

2° Toutes les courbes représentées par l'équation

$$Ax^2 + Cy^2 = h,$$

dans laquelle h est un paramètre variable, ont la même sous-normale, aux points qui correspondent à une même abscisse, car on tire de l'équation précédente

$$Ax + Cyy'_x = 0.$$

On déduit de cette remarque une construction très simple de la normale en un point d'une hyperbole. En effet, l'hyperbole ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

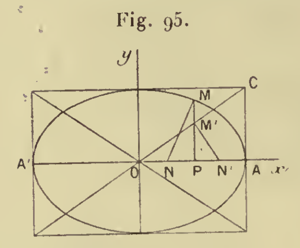
le faisceau de ses asymptotes est représenté par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Soit M un point de l'hyperbole (*fig.* 94); l'ordonnée de M coupe en M' l'une des asymptotes; menons M'N perpendiculaire à cette asymptote; la nor-

male en M à l'hyperbole est la droite obtenue en joignant le point M au point de rencontre N de M'N avec l'axe transverse.

Fig. 94.



Pareillement, les courbes définies par les deux équations

$$Ax^2 + Cy^2 = h, \qquad Ax^2 - Cy^2 = k,$$

ont des sous-normales égales et de signes contraires, aux points qui correspondent à une même abscisse; d'après cela (*fig.* 95), en remarquant que l'équation d'une ellipse rapportée à ses axes est

Fig. 95.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

et que le faisceau des diagonales du rectangle ayant pour côtés les tangentes aux sommets a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

soit M un point de cette ellipse (*fig.* 95); l'ordonnée MP rencontre en M' la diagonale OC de ce rectangle; si la perpendiculaire M'N' à OC rencontre le grand axe au point N' et si l'on prend $\overline{PN} = -\overline{PN'}$, MN est la normale en M à l'ellipse.

EXERCICES.

1. On mène d'un point P des tangentes à la courbe $y = x^3$: 1° trouver dans quelles régions du plan doit se trouver le point P pour que ces tangentes soient toutes réelles; 2° les axes étant rectangulaires, former l'équation du cercle qui passe par les points de contact; 3° lieu du point P tel que ce cercle passe par l'origine.

2. Étant donnée la courbe $x^3 - 3py^2 = 0$ (axes rectangulaires) : 1° former l'équation du cercle qui passe par les points de contact des tangentes issues d'un point P; 2° lieu du point P pour lequel le rayon de ce cercle est constant; 3° lieu du point P pour lequel le centre du cercle est sur la courbe donnée; 4° lieu du point P pour lequel le cercle est tangent à cette courbe.

3. Étant donnée la courbe $x^3 + y^3 = a^3$, trouver les points de contact des tangentes issues du point $P(\alpha, \beta)$. — Équation aux y de ces points de contact. — En déduire les x par une équation du premier degré en x. — Quelle particularité présente l'équation aux y, quand le point P est sur la courbe? — Former, dans ce cas, l'équation des coniques passant par les points de contact.

4. Étant donné un cercle de rayon variable, tangent en A à la droite AB, on mène à ce cercle des tangentes par deux points fixes pris sur AB. Lieu du point de rencontre de ces tangentes.

5. Remplacer dans l'énoncé précédent le cercle par une conique ayant un sommet en A, la droite AB étant la tangente en ce point.

6. Trouver l'expression de ds^2 avec des axes obliques.

7. Même question avec des coordonnées polaires.
— Si l'on pose $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, on a

$$dx + i\,dy = (\cos\omega + i\sin\omega)(d\rho + i\,d\omega),$$
$$dx - i\,dy = (\cos\omega - i\sin\omega)(d\rho - i\,d\omega), \text{ etc.}$$

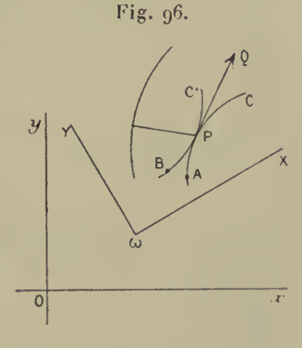
Détermination géométrique des tangentes à quelques courbes.

381. Nous allons d'abord établir, par le calcul, une proposition fondamentale.

Si une figure plane de forme invariable se déplace dans son plan, pour chaque position de cette figure, les normales aux courbes décrites par ses différents points se coupent en un même point, qu'on nomme le centre instantané de rotation.

Soient (*fig.* 96) Ox, Oy deux axes rectangulaires fixes et ωX, ωY deux axes également rectangulaires et liés invariablement à la figure mobile. Nous supposerons que l'on puisse amener, à l'aide d'un déplacement effectué dans le plan donné, les axes mobiles à coïncider respectivement avec les axes fixes, de sorte que, ωX coïncidant avec Ox, ωY coïncide avec Oy. Les coordonnées X, Y d'un point déterminé M de la figure mobile restent constantes, tandis que ses coordonnées x, y sont variables. Pour définir le déplacement de la figure mobile, nous prendrons, pour variable indépendante, l'angle α que la demi-droite $\overline{\omega X}$ fait avec $\overline{Ox}$ et nous supposerons que les coordonnées x_1, y_1 de ω soient des fonctions déterminées de α. On sait que

Fig. 96.



$$(1)\qquad x = x_1 + X\cos\alpha - Y\sin\alpha,\qquad y = y_1 + X\sin\alpha + Y\cos\alpha.$$

On en déduit

$$(2)\qquad \frac{dx}{d\alpha} = \frac{dx_1}{d\alpha} - (y - y_1),\qquad \frac{dy}{d\alpha} = \frac{dy_1}{d\alpha} + (x - x_1).$$

Considérons le point P ayant pour coordonnées

$$(3) \qquad x_0 = x_1 - \frac{dy_1}{d\alpha}, \qquad y_0 = y_1 + \frac{dx_1}{d\alpha}.$$

Ces formules combinées avec les formules (2) montrent que

$$(4) \qquad \frac{dx}{d\alpha} = y_0 - y, \qquad \frac{dy}{d\alpha} = x - x_0,$$

par conséquent

$$(5) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x - x_0}{y - y_0},$$

ce qui prouve que MP est normale à la courbe décrite par le point M(X, Y).

La position du point P, indépendante de M, dépend de la valeur de α; je dis que tout se passe, pour chaque valeur de α, comme si la figure tout entière tournait autour de P.

Supposons, en effet, que le point M tourne effectivement autour d'un point fixe coïncidant avec le point P, d'un angle égal à $\Delta\alpha$. En désignant par r le rayon PM et par φ l'angle que $\overline{\text{PM}}$ fait avec $\overline{\text{O}x}$,

$$x - x_0 = r\cos\varphi, \qquad y - y_0 = r\sin\varphi;$$

par conséquent,

$$\frac{dx}{d\alpha} = -r\sin\varphi \cdot \frac{d\varphi}{d\alpha} = = (y - y_0)\frac{d\varphi}{d\alpha}, \qquad \frac{dy}{d\alpha} = r\cos\varphi \cdot \frac{d\varphi}{d\alpha} = (x - x_0)\frac{d\varphi}{d\alpha},$$

mais nous supposons $\Delta\varphi = \Delta\alpha$, ce qui donne $\frac{d\varphi}{d\alpha} = 1$; ces formules coïncident donc avec les formules (4).

Cela étant, le point P n'est pas fixe non plus par rapport à ωX et ωY; soient X_0, Y_0 ses coordonnées qui dépendent de α. Posons

$$X_0 = F(\alpha), \qquad Y_0 = \Phi(\alpha).$$

Ces équations définissent une courbe C′ liée invariablement aux axes mobiles; soient encore

$$x_0 = f(\alpha), \qquad y_0 = \varphi(\alpha),$$

ces équations définissent une courbe fixe C. La courbe C′, lieu des positions successives que le point P occupe par rapport aux axes mobiles, est entraînée dans le mouvement de ces axes. En appliquant les formules (1) au point P, on obtient

$$x_0 = x_1 + X_0\cos\alpha - Y_0\sin\alpha, \qquad y_0 = y_1 + X_0\sin\alpha + Y_0\cos\alpha$$

et, par conséquent, en se rappelant que X_0 et Y_0 sont variables,

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_0}{d\alpha} &= \frac{dx_1}{d\alpha} + \frac{dX_0}{d\alpha}\cos\alpha - \frac{dY_0}{d\alpha}\sin\alpha - (y_0 - y_1), \\ \frac{dy_0}{d\alpha} &= \frac{dy_1}{d\alpha} - \frac{dX_0}{d\alpha}\sin\alpha + \frac{dY_0}{d\alpha}\cos\alpha + (x_0 - x_1) \end{aligned} \right.$$

et, en tenant compte des équations (4),

$$(7) \qquad dx_0 = dX_0 \cos\alpha - dY_0 \sin\alpha, \qquad dy_0 = dX_0 \sin\alpha + dY_0 \cos\alpha.$$

Cela étant, prenons un point fixe A sur la courbe C et, sur la courbe C', un point B lié invariablement à cette courbe et posons

$$\text{arc AP} = s, \qquad \text{arc BP} = \sigma.$$

Si nous posons

$$(8) \quad dx_0 = ds \cos\beta, \qquad dy_0 = ds \sin\beta; \qquad dX_0 = d\sigma \cos\gamma, \qquad dY_0 = d\sigma \sin\gamma,$$

β sera l'un des angles que la tangente en P à la courbe C fait avec Ox et γ l'un des angles que la tangente au même point à la courbe C' fait avec ωX; or, les formules (7) donnent $ds^2 = d\sigma^2$.

En plaçant convenablement l'origine B de l'arc σ, on peut supposer $ds = d\sigma$ et, par suite, si arc AP = arc BP, cette égalité subsistera. En comparant les formules (7) et (8) et en tenant compte de l'égalité $ds = d\sigma$, on obtient

$$\beta = \alpha + \gamma + 2k\pi,$$

ce qui prouve que les courbes C et C' sont tangentes en P. Il résulte de là que la courbe C' roule sans glisser sur la courbe C et que le centre instantané de rotation est, pour chaque position de la figure mobile, le point de contact des courbes C et C'.

Réciproquement, supposons qu'une courbe mobile, de forme invariable C', roule sans glisser sur une courbe fixe C, et soient x_0, y_0 les coordonnées du point de contact, rapportées à deux axes fixes; X_0, Y_0 étant les coordonnées du même point, relatives à deux axes mobiles liés invariablement à C'. En conservant les notations précédentes et tenant compte de l'équation $ds = d\sigma$, la formule

$$\beta = \alpha + \gamma + 2k\pi$$

donne, en vertu des équations (8),

$$\frac{dx_0}{d\alpha} = \frac{dX_0}{d\alpha}\cos\alpha - \frac{dY_0}{d\alpha}\sin\alpha, \qquad \frac{dy_0}{d\alpha} = \frac{dX_0}{d\alpha}\sin\alpha + \frac{dY_0}{d\alpha}\cos\alpha.$$

Mais, en comparant ces équations avec les équations (6) qui s'appliquent à un point quelconque (x_0, y_0), on retrouve les équations (3), ce qui prouve que le point (x_0, y_0) est précisément le centre instantané de rotation correspondant à la valeur considérée de α.

382. *Déplacement d'une figure plane de forme invariable et dont deux points* P, Q *décrivent des lignes droites.* — Nous supposerons que les deux droites fixes données soient concourantes et nous prendrons pour axes les bissectrices de leurs angles; nous prendrons le milieu de PQ pour origine ω des axes mobiles, $\overline{\omega X}$ coïncidant avec $\overline{\omega P}$. Si l'on pose $\overline{\omega P} = a$, les formules de transformation appliquées au point P donnent

$$x = x_1 + a\cos\alpha, \qquad y = y_1 + a\sin\alpha.$$

Soit $y + mx = 0$ l'équation de la droite décrite par le point P; on doit poser

$$(1) \qquad y_1 + a\sin\alpha + mx_1 + ma\cos\alpha = 0.$$

Le point Q décrivant la droite ayant pour équation $y - mx = 0$, nous devons poser, de même encore,

$$(2) \qquad y_1 - a\sin\alpha - mx_1 + ma\cos\alpha = 0.$$

De ces deux équations on tire $y_1 = -ma\cos\alpha$, $x_1 = -\frac{a}{m}\sin\alpha$.

Cela étant, les formules de transformation relatives à un point M de la figure mobile sont

$$(3) \qquad x = X\cos\alpha - \left(Y + \frac{a}{m}\right)\sin\alpha, \qquad y = (Y - ma)\cos\alpha + X\sin\alpha.$$

Ces équations donnent $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$; on en déduit l'équation du lieu de M

$$\left[Xx + \left(Y + \frac{a}{m}\right)y\right]^2 + [Xy - (Y - ma)x]^2 = \left[X^2 + (Y - ma)\left(Y + \frac{a}{m}\right)\right]^2.$$

Cette équation représente une ellipse, pourvu toutefois qu'on suppose

$$X^2 + (Y - ma)\left(Y + \frac{a}{m}\right) \neq 0.$$

Or, l'équation

$$(4) \qquad X^2 + (Y - ma)\left(Y + \frac{a}{m}\right) = 0$$

représente un cercle C'; je dis que tous les points de la figure mobile qui sont sur ce cercle décrivent des droites passant par le point O. En effet, si l'équation (4) est vérifiée, le déterminant des équations (3) est nul; pour que ces équations soient compatibles, il faut qu'elles deviennent identiques et, par suite, que l'on ait

$$Xx + \left(Y + \frac{a}{m}\right)y = 0, \qquad Xy - (Y - ma)x = 0.$$

Ces deux conditions sont d'ailleurs identiques, en vertu même de l'équation (4).

Cela posé, les extrémités P', Q' du diamètre du cercle C' qui passe par le point M décrivent, d'après ce qui précède, deux droites OP', OQ' qui sont évidemment rectangulaires. Les calculs seront simplifiés si nous prenons ces deux droites pour axes; les points P' et Q' vont remplacer les points P, Q et le milieu de P'Q' sera l'origine ω des axes mobiles, $\overline{\omega X}$ coïncidant avec $\overline{\omega P'}$. Nous désignerons encore par α l'angle de $\overline{\omega X}$ avec $\overline{Ox}$. Si l'on remarque que ω est le centre du cercle C', on a $\overline{\omega P'} = R$, R étant son rayon; on trouve

immédiatement

(5) $$x_1 = R\cos\alpha, \qquad y_1 = -R\sin\alpha.$$

On voit tout d'abord que si l'on appelle h le segment $\overline{\omega M}$, les formules de transformation donnent pour le point M

$$x = R\cos\alpha + h\cos\alpha, \qquad y = -R\sin\alpha + h\sin\alpha;$$

donc l'ellipse que décrit le point M a pour équation

$$\frac{x^2}{(R+h)^2} + \frac{y^2}{(R-h)^2} = 1.$$

Les axes de cette ellipse sont donc les droites joignant le point O aux extrémités du diamètre du cercle C′ qui passe par le point M, et les longueurs des demi-axes sont les distances du point M à ces deux extrémités.

Cela fait, le centre du cercle C′ est précisément le point ω et, comme les formules (5) donnent

$$x_1^2 + y_1^2 = R^2,$$

on voit que ce point décrit un cercle de rayon R ayant le point O pour centre. Les coordonnées du centre instantané sont définies par les formules

$$x = x_1 - \frac{dy_1}{d\alpha}, \qquad y = y_1 + \frac{dx_1}{d\alpha};$$

donc

$$x = 2R\cos\alpha = 2x_1, \qquad y = -2R\sin\alpha = 2y_1,$$

de sorte que

$$x^2 + y^2 = 4R^2.$$

Le centre instantané est donc le point de contact du cercle C′ avec un cercle de rayon double C qui lui est tangent, le cercle C′ étant à l'intérieur du cercle C.

Les formules de transformation appliquées à un point M quelconque sont

(6) $$x = (X+R)\cos\alpha - Y\sin\alpha, \qquad y = Y\cos\alpha + (X-R)\sin\alpha;$$

on vérifie ainsi d'abord que le cercle C′ a pour équation

$$X^2 + Y^2 - R^2 = 0.$$

Soit H(X, Y) un point de ce cercle; posons

$$X = R\cos\varphi, \qquad Y = R\sin\varphi;$$

ce qui donne, pour les coordonnées x, y du point H,

$$x = R[(1+\cos\varphi)\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha], \quad y = R[\sin\varphi\cos\alpha - (1-\cos\varphi)\sin\alpha].$$

Mais on sait que

$$\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \tang\tfrac{1}{2}\varphi,$$

ce qui permet d'écrire

$$x = R(1+\cos\varphi)[\cos\alpha - \tang\tfrac{1}{2}\varphi\sin\alpha], \qquad y = R\sin\varphi[\cos\alpha - \tang\tfrac{1}{2}\varphi\sin\alpha];$$

donc

$$y = x\tang\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Il convient d'ajouter que la première des équations (6), par exemple, ne peut donner pour α une valeur réelle que si l'on suppose

$$x^2 < (X+R)^2 + Y^2$$

ou

$$x^2 < 2R^2 + 2R^2\cos\varphi,$$

c'est-à-dire

$$x^2 < 4R^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Cela prouve que le point H est toujours compris entre les extrémités du diamètre du cercle C sur lequel il se trouve; résultat évident *a priori*.

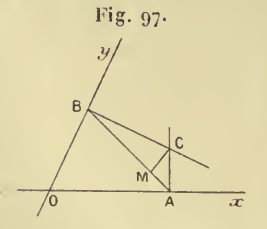
En résumé, quand deux points d'une figure mobile de forme invariable se déplacent sur deux droites fixes qui se coupent en un point O, le mouvement de cette figure peut être produit par le roulement d'un cercle C′ passant constamment par le point O, sur un cercle C de rayon double, ayant son centre au point O. Tous les points du cercle C′ décrivent des portions de droite qui sont des diamètres du cercle C et les autres points décrivent des ellipses ayant leur centre en O.

Il est évident que si les droites fixes données étaient parallèles, la figure mobile aurait un mouvement de translation.

Tous ces résultats se démontrent très simplement par la Géométrie élémentaire.

383. *Applications.* — 1° Soient AB une droite de longueur constante (*fig.* 97) dont les extrémités glissent sur deux droites fixes et M un point de cette droite tel que AM et BM aient des longueurs constantes $BM = a$, $AM = b$. Le point M décrit une ellipse, comme nous le savons déjà; si l'on désigne par x, y les coordonnées de M, en posant $\overline{OA} = \alpha$, $\overline{OB} = \beta$, on a

Fig. 97.



$$x = \frac{a\alpha}{a+b}, \qquad y = \frac{b\beta}{a+b}$$

et

$$(a+b)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta,$$

l'équation de l'ellipse décrite par le point M est donc

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy\cos\theta}{ab} = 1.$$

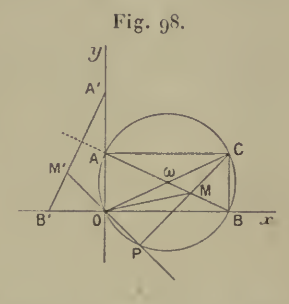
Le centre instantané de rotation de la droite AB est le point de concours

des normales en A et B aux trajectoires de ces points; c'est donc le point de rencontre de la perpendiculaire AC à l'axe des x et de la perpendiculaire BC à l'axe des y; il en résulte que la normale en M à l'ellipse est la droite CM.

Considérons le cas particulier où les extrémités de la droite se déplacent sur deux droites rectangulaires (*fig.* 98).

Soit AB une position de la droite mobile et supposons, comme plus haut, $AM = a$, $MB = b$. En joignant M au centre instantané de rotation C, nous obtenons, comme nous venons de le voir, la normale CM au point M, à l'ellipse décrite par le point M.

Fig. 98.



Si nous prenons $OA' = OB$ et $OB' = OA$, la droite A'B' sera perpendiculaire à AB et, par suite, si $A'M' = a$, OM' est perpendiculaire à CM: par conséquent, OM' est le diamètre conjugué à OM; et, en outre, $OM' = MC$. On voit, en effet, que si l'on fait tourner le triangle ABC de 90° autour de B, de manière que le côté BC vienne dans la direction $\overline{Ox}$, les côtés de ce triangle deviendront parallèles à ceux du triangle A'OB'. Cela posé, si ω est le centre du rectangle OBCA, on a

$$\overline{OM}^2 + \overline{MC}^2 = 2\,\overline{O\omega}^2 + 2\,\overline{\omega M}^2 = \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(a-b)^2}{2},$$

c'est-à-dire

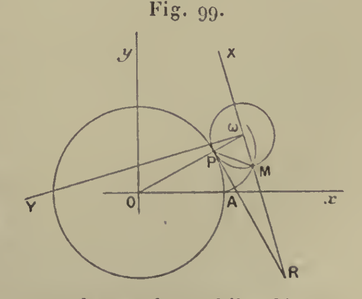
$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

L'aire du parallélogramme construit sur OM et OM' a pour mesure $OM' \times MP$, c'est-à-dire $MC \times MP$, P étant le point de rencontre de M'O et de CM. Mais l'angle OPC étant droit, le point P est sur le cercle circonscrit au rectangle OBCA; donc, $MC \times MP = AM.MB = ab$.

Si l'on donne OM et OM', on peut construire facilement OA et OB. En effet, il suffit de décrire un cercle sur OC comme diamètre; les points A et B sont les extrémités du diamètre ωM. On a ainsi résolu ce problème : *Construire les axes d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués.*

2° Nous avons trouvé la normale en un point d'une cycloïde. Plus généralement, si un cercle roule sur un second cercle fixe, sans glisser, la normale en un point quelconque de la courbe décrite par un point M lié au cercle mobile, s'obtiendra en joignant le point M au point de contact du cercle mobile et du cercle fixe.

Fig. 99.



Prenons (*fig.* 99) pour axes fixes deux diamètres rectangulaires du cercle fixe, et prenons sur le cercle mobile un point M tel que arc PM = arc PA. Supposons que ωX passe par M et que les coordonnées du point M soient $X = -b$, $Y = 0$, b étant le rayon du cercle mobile. Si a est

le rayon du cercle fixe, et si l'on appelle φ et φ' les angles AOP, PωM, on a

$$a\varphi = b\varphi', \qquad \alpha = \varphi + \varphi' = \varphi\left(1 + \frac{a}{b}\right),$$

par suite, x, y étant les coordonnées absolues de M,

$$x = (a+b)\cos\varphi - b\cos\frac{a+b}{b}\varphi, \qquad y = (a+b)\sin\varphi - b\sin\frac{a+b}{b}\varphi.$$

Ces équations représentent le lieu du point M. Si l'on prend $\omega R = mb$, les coordonnées du point R seront

$$(1)\qquad \begin{cases} x = (a+b)\cos\varphi - mb\cos\dfrac{a+b}{b}\varphi, \\ y = (a+b)\sin\varphi - mb\sin\dfrac{a+b}{b}\varphi. \end{cases}$$

On vérifiera sans difficulté, par le calcul, que RP et MP sont les normales en R et M, respectivement, aux courbes décrites par les deux points.

Lorsque $m > 1$, le point R décrit une *épicycloïde allongée;* si $m < 1$, une *épicycloïde raccourcie.*

Si le cercle mobile était tangent intérieurement au cercle fixe, on aurait, pour déterminer le lieu d'un point M de cercle mobile, les équations

$$(2)\qquad \begin{cases} x = (a-b)\cos\varphi + b\cos\dfrac{a-b}{b}\varphi, \\ x = (a-b)\sin\varphi + b\sin\dfrac{a-b}{b}\varphi; \end{cases}$$

la courbe décrite serait alors une *hypocycloïde*. Si $a = 2b$, ces formules donnent

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = 0.$$

On sait, en effet, que si un cercle roule intérieurement sur un cercle de rayon double, un point du cercle mobile décrit un diamètre du cercle fixe.

Si l'on remplace, dans les formules (2), φ par ψ et b par $a+b$, on obtient

$$x = -b\cos\psi + (\alpha+b)\cos\frac{b}{a+b}\psi, \quad y = -b\sin\psi + (a+b)\sin\frac{b}{a+b}\psi,$$

et, si l'on pose $\dfrac{b}{a+b}\psi = \varphi$, il vient

$$x = (a+b)\cos\varphi - b\cos\left(1+\frac{a}{b}\right)\varphi, \quad y = (a+b)\sin\varphi - b\sin\left(1+\frac{a}{b}\right)\varphi.$$

Ce qui prouve qu'une épicycloïde est susceptible d'un double mode de génération par le roulement d'un cercle mobile sur un cercle fixe. On peut, en effet, faire rouler sur un cercle fixe de rayon a un cercle tangent extérieure-

ment de rayon b, ou un cercle tangent intérieurement et de rayon $a+b$. On vérifie aisément la proposition par la Géométrie élémentaire en considérant le cercle passant par M et tangent au cercle fixe au second point d'intersection de MP avec ce cercle.

De la même manière, en remplaçant, dans les formules (2), b par $a-b$ et φ par θ, on obtient les formules

$$x = b\cos\theta + (a-b)\cos\frac{b}{a-b}\theta, \qquad y = b\sin\theta - (a-b)\sin\frac{b}{a-b}\theta;$$

en posant $\frac{b}{a-b}\theta = -\varphi$, c'est-à-dire $\theta = \left(1-\frac{a}{b}\right)\varphi$, ces formules deviennent

$$x = (a-b)\cos\varphi + b\cos\frac{a-b}{b}\varphi, \qquad y = (a-b)\sin\varphi - b\sin\frac{a-b}{b}\varphi,$$

ce qui étend la proposition précédente au cas où l'hypocycloïde est extérieure au cercle fixe; comme dans le cas précédent, le point de contact variable du cercle intérieur de rayon $a-b$ est le second point de rencontre du cercle fixe avec la droite MP.

3° *Tangentes aux conchoïdes.* — Soient C une courbe quelconque (*fig.* 100) et O un point fixe. Sur une sécante variable menée par O et rencontrant la courbe C en P, on porte une longueur constante PM. On demande de construire la tangente en M à la courbe décrite par le point M, en supposant connue la tangente en P à la courbe C.

Fig. 100.

Considérons un point P′ infiniment voisin de P et prenons sur OP′ un segment O′P′ égal à OP et soit P′M′ = PM.

On peut regarder les points O, P, M comme appartenant à une figure plane de forme invariable; la trajectoire du point P étant la courbe C, nous connaissons, par hypothèse, la normale à la trajectoire du point P. Le point de la sécante OP qui est en O venant prendre la position O′, la normale en O à la trajectoire de ce point est la limite de la perpendiculaire menée au milieu de OO′, c'est-à-dire la perpendiculaire à OP menée par le point O. Le centre instantané de rotation I est donc le point d'intersection de cette droite et de la normale en P; il en résulte que la normale en M à la courbe décrite par ce point est la droite IM.

Pareillement, si la longueur PN est constante, IN est la normale à la courbe décrite par le point N.

Si l'on suppose NP = PM = a, le lieu décrit par les points M et N se nomme une *conchoïde de la courbe* C.

Si l'on prend le point O pour origine des coordonnées rectangulaires, en appelant x_0, y_0 les coordonnées du point P, on aura l'équation de la conchoïde

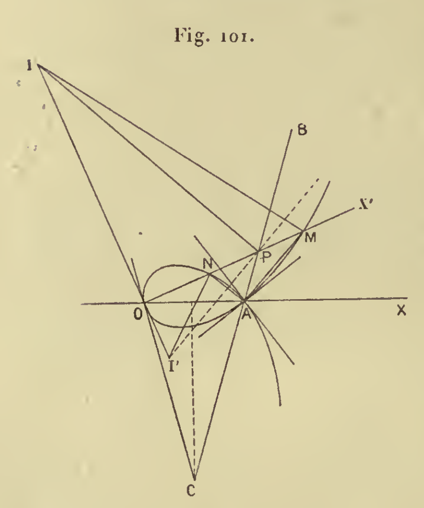
en éliminant x_0, y_0 entre les équations

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2, \qquad xy_0-yx_0=0, \qquad f(x_0,y_0)=0,$$

en supposant que la courbe C ait pour équation $f(x,y)=0$.

4° *Tangente à la strophoïde.* — On donne deux droites OA, AB et un point fixe O sur l'une d'elles (*fig.* 101). Sur une sécante variable rencontrant AB en P, on porte des longueurs PM = PN = AP; la courbe décrite par les points M, N se nomme *strophoïde*. Il s'agit de trouver la tangente en un point quelconque de la strophoïde.

Fig. 101.



Pour cela, nous remarquerons d'abord que, si la sécante se confond avec OA, les points M et N viennent se confondre tous les deux avec le point A.

La tangente à l'arc décrit par le point M est la limite de la sécante AM; or le triangle PAM est isoscèle; si l'on nomme α la valeur commune des angles à la base de ce triangle, β l'angle AOM et θ l'angle BAX, on a

$$\theta-\alpha=\alpha+\beta \quad \text{ou} \quad \alpha=\tfrac{1}{2}(\theta-\beta);$$

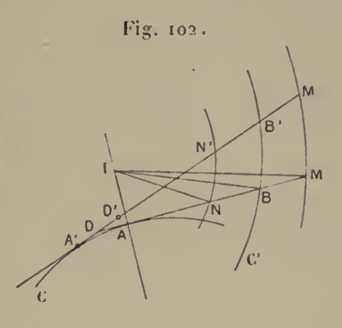
comme β a pour limite zéro, on en conclut que $\lim\alpha=\frac{1}{2}\theta$. Donc la tangente à l'arc AM est la bissectrice de l'angle BAX; on verrait de même que la tangente à l'arc décrit par le point N est la bissectrice de l'angle BAO. Au surplus, l'angle NAM étant droit, les deux tangentes considérées doivent être rectangulaires.

Cela posé, on peut déduire aisément de cette construction celle de la tangente en un point quelconque de la strophoïde. Soit, en effet, un point M de cette courbe. Si l'on remplace la droite fixe OX par OX', on peut considérer une strophoïde auxiliaire définie au moyen des droites AB, OX', O étant toujours le pôle. La première strophoïde peut être regardée comme étant la conchoïde de la seconde, les rayons vecteurs de celle-ci étant augmentés ou diminués d'une constante égale à AP. Or, d'après la construction donnée plus haut, l'une des tangentes en P à la strophoïde auxiliaire étant la bissectrice de l'angle BPX', si nous menons les droites : OI, perpendiculaire à OM, PI, bissectrice de l'angle OPB, ces droites se coupant en I, IM sera la normale en M à la première strophoïde. De même, I' étant le point de rencontre de OI avec la bissectrice de l'angle BPX', I'N est la normale en N à la première strophoïde. Cette ingénieuse construction est due à Desboves.

La tangente en O est évidemment la droite OC, telle que $OC = AC$; le point C est donc à l'intersection de AB avec la perpendiculaire élevée au milieu de OA.

5° *Courbes conchoïdales.* — Soient C et C′ deux courbes fixes (*fig.* 102), une tangente AB à la courbe C rencontre la courbe C′ au point B à partir duquel on porte des longueurs constantes $NB = BM = a$. Connaissant la tangente en A à la courbe C et la tangente en B à la courbe C′, construire la tangente en M ou en N à la courbe décrite par chacun de ces points.

Fig. 102.



Considérons la figure de forme invariable formée par les points D, N, B, M; D étant le point de rencontre de deux tangentes à la courbe C, infiniment voisines, AB, A′B′. Si l'on prend une longueur $B'D' = BD$ dans un sens convenable, le point D viendra en D′ quand la tangente AB prendra la position A′B′; la perpendiculaire au milieu de DD′ aura pour limite la normale en A à la courbe C; le centre instantané de rotation sera donc le point de concours I de cette normale avec la normale en B à la courbe C′; il en résulte que IM et IN sont les normales en M et en N aux courbes décrites par M et N.

Usage des infiniment petits dans la construction des tangentes.

384. On peut dans quelques cas faire usage, pour la détermination des tangentes, des deux théorèmes suivants de Géométrie infinitésimale :

1° *Soient* A *un point donné sur une courbe, et* M *un point infiniment voisin de* A, *situé sur la même courbe : la distance* MP *du point* M *à la tangente en* A *est un infiniment petit du second ordre au moins,* AM *étant l'infiniment petit principal.*

En effet, si nous prenons pour axes de coordonnées la tangente et la normale en A, l'ordonnée y du point M est une fonction de x que l'on peut développer par la formule de Taylor; en posant $y = f(x)$ et remarquant que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$, on voit que la première dérivée de $f(x)$, qui soit différente de zéro pour $x = 0$, est au moins du second ordre; si elle est d'ordre p, on a

$$y = \frac{x^p}{p!} f'(\theta x), \qquad 0 < \theta < 1,$$

ce qui démontre que y est infiniment petit d'ordre p par rapport à x; or $x = AM \cos MAP$; donc $\lim \frac{AM}{x} = 1$ quand x tend vers zéro et, par conséquent, la conclusion subsiste quand AM est l'infiniment petit principal.

Remarque. — La proposition précédente peut servir à la définition de la tangente en un point A (x, y) d'une courbe ayant pour équation $y = f(x)$. En effet, la distance du point $M(x + \Delta x, y + \Delta y)$ à la droite Δ, définie par l'équation

$$Y - y = m(X - x)$$

est égale à

$$\frac{\Delta y - m\,\Delta x}{\sqrt{1 + m^2}};$$

développons Δy par la formule de Taylor, ce qui donne

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x + \theta\,\Delta x);$$

donc la distance du point M à la droite Δ a pour expression

$$\frac{[f'(x) - m]\,\Delta x + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x + \theta\,\Delta x)}{\sqrt{1 + m^2}};$$

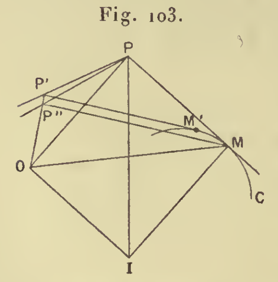
cette distance sera un infiniment petit d'ordre supérieur au premier si $m = f'(x)$.

2° *Si dans un triangle* ABC *le rapport* $\frac{BC}{AB}$ *a pour limite zéro, l'angle* A *a pour limite zéro.*

Cela résulte immédiatement de la formule $\sin A = \frac{BC}{AB} \sin C$; on voit d'abord que l'angle A est aigu, puisque le rapport $\frac{BC}{AB}$ est supposé plus petit que 1: $\sin A$ ayant pour limite zéro, A a aussi pour limite zéro.

385. *Applications. Tangente à une podaire.* — On abaisse d'un point fixe O (*fig.* 103) une perpendiculaire OP sur chaque tangente MP à une courbe fixe C; le lieu du pied P de cette perpendiculaire est la podaire de C relative au point O. Si M'P' est la tangente à C, en un point M' infiniment voisin de M, il s'agit de trouver la limite de PP'. Si nous admettons que PP' est infiniment petit du premier ordre, en menant MP'' parallèle à M'P' et rencontrant OP' et P'', P'P'' sera un infiniment petit du second ordre et, par suite, au lieu de chercher la limite de la direction de PP', on peut chercher la limite de la direction de PP''; or celle-ci est facile à trouver, car le quadrilatère OP''PM étant inscriptible, la sécante PP'' au cercle circonscrit à ce quadrilatère a pour limite la tangente en P à ce cercle. On peut remarquer que la diagonale PI du rectangle OPMI est précisément la normale en P au cercle considéré.

Fig. 103.



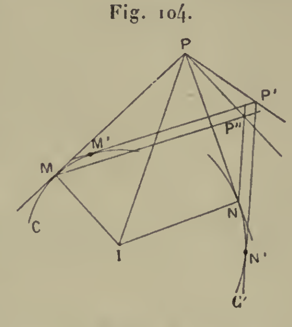
Si l'on considère l'angle droit dont un côté passe constamment par le point O

et dont l'autre côté reste tangent à la courbe C, comme étant une figure plane de forme invariable, on reconnaîtra aisément que le point I est précisément le centre instantané de rotation.

Remarque. — Pour compléter la démonstration donnée plus haut, il serait indispensable de prouver que PP′ est un infiniment petit du premier ordre, MM′ étant l'infiniment petit principal; ce qui ne présente d'ailleurs aucune difficulté.

Généralisation. — On généralise aisément la construction précédente en supposant que l'angle P soit constant; plus généralement encore, on peut considérer le lieu du sommet d'un angle constant P dont les côtés restent tangents à deux courbes fixes C, C′ (*fig.* 104). Soient M et N les points de contact des côtés MP, NP, et M′ et N′ les points de contact infiniment voisins des côtés M′P′, N′P′. On remplacera, comme plus haut, le point P′ par le point de rencontre P″ de MP″ parallèle à M′P′ avec NP″ parallèle à N′P′; PP′ est, en général, infiniment petit du premier ordre et P′P″ du second ordre; on voit en outre que PP″ a pour limite la tangente en P au cercle circonscrit au triangle MPN. Il en résulte que la normale en P, au lieu décrit par P, passe par le point de concours I des normales menées en M et N aux deux courbes C, C′ respectivement.

Fig. 104.



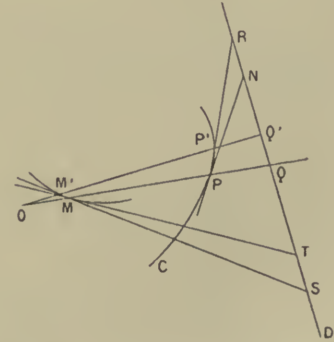
Le point I est le centre instantané de la figure formée par les côtés de l'angle variable P.

Méthode des transversales réciproques.

386. Cette méthode a été appliquée par M. G. de Longchamps dans un assez grand nombre de cas. Nous en donnerons un exemple simple.

Étant donnés un point fixe O, une courbe C et une droite D (*fig.* 105), on mène une sécante OPQ rencontrant la courbe C en P et la droite D en Q; on prend $\overline{OM} = \overline{PQ}$ et l'on demande la tangente en M à la courbe C′ décrite par le point M.

Fig. 105.



Soit OP′Q′ une sécante infiniment voisine de la première, de sorte que

$$\overline{OM'} = \overline{P'Q'}.$$

En nommant R et S les points de rencontre de la droite D avec PP′ et M′M, on sait que QS = Q′R. Il en résulte

immédiatement que, si la tangente en P à la courbe C rencontre D au point N et si l'on prend $\overline{QT} = \overline{NQ}$, MT est la tangente cherchée.

CHAPITRE XV.

THÉORIE DES ENVELOPPES.

387. Considérons une famille de courbes, définie par l'équation

$$(1) \qquad f(x, y, a) = 0,$$

qui renferme un paramètre variable a. A chaque valeur a du paramètre correspond une courbe C de la famille considérée; si a varie d'une manière continue, la courbe C se déforme et se déplace d'une manière continue. Considérons deux valeurs infiniment voisines du paramètre : a_0 et $a_0 + h$, auxquelles correspondent les courbes C_0, et C_1 définies par les équations

$$(2) \qquad f(x, y, a_0) = 0,$$

$$(3) \qquad f(x, y, a_0 + h) = 0.$$

Les coordonnées des points communs à ces deux courbes sont les solutions du système formé par les équations (2) et (3). Soit M_0 (*fig.* 106) l'un de ces points; quand h tend vers zéro, le point M_0 tend vers une limite déterminée M. En effet, on peut remplacer l'équation (3) par la suivante :

Fig. 106.

$$(4) \qquad \frac{f(x, y, a_0 + h) - f(x, y, a_0)}{h} = 0;$$

le point M_0 est donc l'un des points d'intersection de la courbe C_0 et d'une courbe déterminée Γ_0; lorsque h tend vers zéro, la courbe Γ_0 a pour limite la

courbe Γ représentée par l'équation

$$(5) \qquad f'_{a_0}(x, y, a_0) = 0$$

et, par suite, M_0 tend vers l'un des points communs aux courbes C_0 et Γ, soit M.

Les coordonnées du point M sont définies par le système (2), (5). Ainsi, à chaque valeur a_0 du paramètre a correspondent un ou plusieurs points M appartenant à la courbe C_0; nous appellerons chacun de ces points un point *caractéristique*. Si l'on fait varier a, le lieu des caractéristiques s'obtiendra en éliminant a entre les deux équations

$$(1) \qquad f(x, y, a) = 0,$$

$$(6) \qquad f'_a(x, y, a) = 0.$$

Ce lieu est ce que l'on nomme l'*enveloppe* des courbes représentées par l'équation (1); celles-ci sont dites des *enveloppées*. Ces noms sont justifiés par le théorème suivant.

388. Théorème. — *Par chaque point de l'enveloppe, il passe au moins une enveloppée qui lui est tangente en ce point.*

En effet, soit M un point de l'enveloppe; ce point correspond à une valeur particulière a_0 du paramètre a; il est à l'intersection des courbes définies par les équations

$$(2) \qquad f(x, y, a_0) = 0,$$

$$(5) \qquad f'_{a_0}(x, y, a_0) = 0.$$

Le coefficient angulaire de la tangente en M à la courbe (2) est donné par l'équation

$$f'_x(x, y, a_0) + y' f'_y(x, y, a_0) = 0,$$

x, y étant les coordonnées du point M. Or, on peut regarder les coordonnées d'un point quelconque de l'enveloppe comme étant définies par le système

$$(1) \qquad f(x, y, a) = 0,$$

$$(6) \qquad f'_a(x, y, a) = 0.$$

On a donc

$$f'_x(x, y, a)\frac{dx}{da} + f'_y(x, y, a)\frac{dy}{da} + f'_a(x, y, a) = 0.$$

Mais le dernier terme de cette équation est nul; par conséquent, pour le point M de l'enveloppe,

$$f'_x(x, y, a_0) + \frac{dy}{dx} f'_y(x, y, a_0) = 0.$$

Le coefficient angulaire de la tangente en M à l'enveloppe est donc le même que le coefficient angulaire de la tangente à l'enveloppée au même point.

389. Applications. — 1° *Le point de rencontre des tangentes à une courbe en deux points* A, B *a pour limite le point* A *lorsque le point* B *vient se confondre avec* A.

C'est ce que l'on peut vérifier aisément par la théorie précédente. En effet, la tangente à une courbe représentée par l'équation $y = f(x)$, au point ayant pour abscisse a, a pour équation

$$y - f(a) - f'(a)(x - a) = 0.$$

Si nous égalons à zéro la dérivée par rapport à a, nous obtenons

$$f''(a)(x - a) = 0.$$

On ne peut supposer $f''(a) = 0$ quel que soit a, car on en conclurait

$$f(a) = Aa + B;$$

en d'autres termes, l'équation donnée se réduirait à $y = Ax + B$ et représenterait une droite. Donc le point de rencontre de la tangente considérée avec la tangente infiniment voisine a pour limite le point défini par les équations $x = a$, $y = f(a)$, c'est-à-dire le point de contact.

Il en résulte qu'*une courbe plane peut être considérée comme étant l'enveloppe de ses tangentes.*

2° *Trouver l'enveloppe du cercle ayant pour diamètre une corde perpendiculaire à l'axe d'une parabole donnée.*

L'équation de la parabole donnée étant $y^2 - 2px = 0$, l'équation

d'un cercle décrit sur la corde parallèle à l'axe des y ayant pour équation $x = a$, prise pour diamètre, est

$$(x-a)^2 + y^2 - 2pa = 0,$$

L'enveloppe demandée s'obtiendra donc en éliminant a entre cette équation et l'équation

$$-(x-a) - p = 0,$$

obtenue en prenant la dérivée par rapport à a du premier membre de l'équation du cercle; l'équation de l'enveloppe est donc

$$y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right).$$

C'est l'équation d'une parabole égale à la proposée et que l'on obtient en faisant subir à tous les points de cette dernière une translation parallèle à l'axe des x et égale à $-\frac{p}{2}$, de sorte que le foyer de la seconde parabole sera placé au sommet de la première.

Remarque. — Les points de contact d'un des cercles considérés avec l'enveloppe trouvée sont à l'intersection de ce cercle avec la droite définie par l'équation $x - a + p = 0$; pour que cette droite coupe le cercle correspondant en des points réels, il faut et il suffit que a vérifie la condition $a > \frac{p}{2}$.

Si l'on suppose $a < \frac{p}{2}$, les points de contact avec l'enveloppe seront imaginaires; si deux cercles C′, C″ correspondent à deux valeurs de a telles que $a' < a'' < \frac{p}{2}$, le cercle C′ sera intérieur au cercle C″.

390. *Cas où l'équation de l'enveloppée est algébrique par rapport au paramètre.* — Lorsque l'équation (1) est algébrique par rapport à a, éliminer a entre cette équation et l'équation (6) revient à exprimer que l'équation (1), dans laquelle le paramètre a est regardé comme étant la seule inconnue, a une racine double.

On peut préciser davantage. Supposons que l'équation (1) soit du degré m par rapport à (a); par chaque point (x_0, y_0) du plan, il passe m courbes C correspondant aux valeurs du paramètre qui

sont égales aux racines de l'équation

$$f(x_0, y_0, a) = 0.$$

Ces m courbes sont, en général, distinctes au moins de position; l'enveloppe peut être considérée comme le lieu des points du plan tels que, parmi les courbes C qui y passent, deux au moins soient confondues. En particulier, si l'équation en a est du second degré, l'enveloppe partagera le plan en régions de deux espèces, correspondant à des valeurs réelles ou à des valeurs imaginaires de a.

Ainsi, par exemple, l'équation d'un des cercles considérés dans l'exemple précédent étant mise sous la forme

$$a^2 - 2(x+p)a + x^2 + y^2 = 0,$$

on obtient immédiatement l'équation de l'enveloppe en annulant le discriminant par rapport à a

$$x^2 + y^2 - (x+p)^2 = 0$$

ou

$$y^2 - 2px - p^2 = 0.$$

Par tout point intérieur à la parabole trouvée, passent deux cercles réels de la famille, et par tout point extérieur à cette parabole on n'en peut faire passer aucun.

391. La remarque précédente permet d'expliquer un résultat paradoxal en apparence.

Supposons que l'on puisse résoudre l'équation (1) par rapport à a; si l'on trouve $a - \varphi(x, y) = 0$, on n'obtiendrait pas l'enveloppe en égalant à zéro la dérivée par rapport à a, puisque cette dérivée est égale à 1. Or, si l'on considère une seule détermination de la fonction $\varphi(x, y)$, deux courbes, représentées par les équations

$$a = \varphi(x, y), \qquad a + h = \varphi(x, y),$$

n'ont évidemment aucun point commun. Considérons, par exemple, les cercles définis par l'équation $(x-a)^2 + y^2 = R^2$; l'enveloppe se compose évidemment des deux parallèles à l'axe des x définies par l'équation $y^2 - R^2 = 0$. Or, si l'on résout l'équation du cercle par rapport à a, on trouve

$$a = x + \varepsilon\sqrt{R^2 - y^2} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Si l'on donne à ε une valeur déterminée, l'équation précédente ne représente qu'un demi-cercle, qui n'a aucun point commun avec le demi-cercle dé-

fini par l'équation

$$a+h=x+\varepsilon\sqrt{R^2-y^2}.$$

Au contraire, si l'on considère le demi-cercle défini par l'équation

$$a+h=x-\varepsilon\sqrt{R^2-y^2},$$

il aura avec le premier deux points communs, déterminés par l'équation de l'un de ces demi-cercles et l'équation

$$h=-2\varepsilon\sqrt{R^2-y^2};$$

si h tend vers zéro, on trouve bien, à la limite, $R^2-y^2=0$.

Si l'on cherche pour quelle valeur de a l'un des cercles passe par le point x_0, y_0, on aura deux solutions,

$$a'=x_0+\sqrt{R^2-y_0^2},\qquad a''=x_0-\sqrt{R^2-y_0^2}.$$

Pour que le point x_0, y_0 appartienne à l'enveloppe, il faut que $a'=a''$, ce qui donne

$$R^2-y_0^2=0.$$

392. D'après ce qui précède, P, Q, R désignant des fonctions déterminées de x et de y, l'équation

(1) $$a^2P+2aQ+R=0$$

représente une famille de courbes enveloppées par la courbe

(2) $$Q^2-PR=0,$$

et réciproquement.

Ainsi, par exemple, si P, Q, R sont du premier degré, l'équation précédente représente une conique C tangente aux droites $P=0$, $R=0$, la corde des contacts étant la droite $Q=0$; la droite R correspond à $a=0$, et la droite P à a infini.

Le point de contact de la droite (1) est défini par les équations $aP+Q=0$, $-a^2P+R=0$. En prenant pour triangle de référence le triangle formé par les trois droites définies par les équations $P=0$, $Q=0$, $R=0$, ce point a pour coordonnées 1, $-a$, a^2.

Pareillement, $b^2P+2bQ+R=0$ représente une tangente au point 1, $-b$, b^2; la droite joignant ces deux points a pour équation

$$Pab+Q(a+b)+R=0.$$

On a ainsi formé les équations de deux tangentes et de la corde des contacts, ce qui conduit à l'identité

$$\begin{aligned}&[Pab+Q(a+b)+R]^2-(Pa^2+2aQ+R)(Pb^2+2bQ+R)\\&\quad=(Q^2-PR)(a-b)^2.\end{aligned}$$

393. Considérons encore l'équation

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

On peut regarder la parabole représentée par cette équation comme l'enveloppe des droites définies par l'équation

$$a^2(2Dx + 2Ey + F) + 2a(\alpha x + \beta y) - 1 = 0.$$

On a ainsi l'équation générale des tangentes à la parabole. En particulier, si l'on donne l'équation

$$y^2 - 2px = 0,$$

on obtient

$$2a^2x - 2ay + p = 0$$

ou

$$y = ax + \frac{p}{2a},$$

et plus généralement, P et Q étant des fonctions du premier degré,

$$Q = aP + \frac{1}{2a}$$

est l'équation d'une tangente à la parabole représentée par l'équation

$$Q^2 - 2P = 0.$$

394. *Cas où l'équation de l'enveloppée renferme plus d'un paramètre.* — Considérons d'abord le cas où l'enveloppée a pour équation

(1) $$f(x, y, a, b) = 0,$$

les deux paramètres a, b étant liés par la relation

(2) $$\varphi(a, b) = 0.$$

On peut regarder b comme une fonction de a définie par l'équation (2). On aura donc l'équation de l'enveloppe en éliminant a entre l'équation (1) et l'équation dérivée

$$\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b} b' = 0,$$

b' étant la dérivée de b par rapport à a; or cette dérivée est définie par l'équation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} b' = 0;$$

par suite, on doit, en définitive, éliminer a et b entre les équations (1), (2) et la suivante

$$(3)\qquad \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0,$$

qui exprime que les dérivées des fonctions f et φ, prises par rapport à a et b, sont proportionnelles.

Plus généralement, supposons que l'équation de l'enveloppée renferme n paramètres liés par $n-1$ équations. Pour abréger l'écriture, nous ne considérerons que trois paramètres liés par deux relations; soit donc

$$(1)\qquad f(x, y, a, b, c) = 0,$$

les paramètres a, b, c étant liés par les équations

$$(2)\qquad \varphi(a, b, c) = 0,$$

$$(3)\qquad \psi(a, b, c) = 0.$$

Nous pouvons regarder ces équations comme définissant b et c en fonction de a. En désignant par b' et c' les dérivées de b et c par rapport à a, nous devrons poser

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b} b' + \frac{\partial f}{\partial c} c' = 0,\\ &\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} b' + \frac{\partial \varphi}{\partial c} c' = 0,\\ &\frac{\partial \psi}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial b} b' + \frac{\partial \psi}{\partial c} c' = 0.\end{aligned}\right.$$

Il en résulte que l'équation de l'enveloppe s'obtiendra en éliminant a, b, c entre les équations (1), (2), (3), et l'équation obtenue en éliminant b' et c' entre les trois dernières équations, savoir :

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} & \frac{\partial f}{\partial c}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} & \frac{\partial \varphi}{\partial b} & \frac{\partial \varphi}{\partial c}\\ \frac{\partial \psi}{\partial a} & \frac{\partial \psi}{\partial b} & \frac{\partial \psi}{\partial c}\end{vmatrix} = 0.$$

Il convient de remarquer qu'on obtient cette dernière équation en égalant

à zéro les dérivées prises par rapport à a, b, c de la fonction

$$f + \lambda\varphi + \mu\psi = 0,$$

et en éliminant λ et μ entre les trois équations obtenues.

On peut encore observer que les équations (4) peuvent être mises sous la forme

$$(4') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a}\,da + \dfrac{\partial f}{\partial b}\,db + \dfrac{\partial f}{\partial c}\,dc = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial a}\,da + \dfrac{\partial \varphi}{\partial b}\,db + \dfrac{\partial \varphi}{\partial c}\,dc = 0, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial a}\,da + \dfrac{\partial \psi}{\partial b}\,db + \dfrac{\partial \psi}{\partial c}\,dc = 0; \end{cases}$$

l'équation (5) exprime qu'il existe des valeurs non toutes nulles de da, db, dc vérifiant les équations $(4)'$. En procédant ainsi, on exprime que $df = 0$, les différentielles da, db, dc étant assujetties à vérifier les relations obtenues en différentiant les équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$; de cette façon, les trois paramètres sont traités d'une manière symétrique.

395. Applications : 1° *Trouver l'enveloppe d'une droite de longueur constante dont les extrémités glissent sur deux droites rectangulaires fixes.* — Soit

$$(1) \quad \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$$

l'équation d'une droite, les paramètres α, β vérifiant la relation

$$(2) \quad \alpha^2 + \beta^2 = l^2.$$

En appliquant la méthode générale, nous éliminerons α et β entre les équations précédentes et l'équation

$$\frac{-\dfrac{x}{\alpha^2}}{\alpha} = \frac{-\dfrac{y}{\beta^2}}{\beta},$$

que nous écrirons ainsi

$$\frac{\dfrac{x}{\alpha}}{\alpha^2} = \frac{\dfrac{y}{\beta}}{\beta^2} = \frac{1}{l^2},$$

en tenant compte des équations (1) et (2). On a ainsi

$$\alpha^3 = l^2 x, \qquad \beta^3 = l^2 y$$

et, par suite,

$$l^2 = (l^2 x)^{\frac{2}{3}} + (l^2 y)^{\frac{2}{3}}$$

ou, en simplifiant,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}.$$

2° *Enveloppe des ellipses décrites par les différents points de la droite précédente.* — L'une de ces ellipses a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

avec la condition $a + b = l$. En procédant comme dans le cas précédent, on obtient pour enveloppe la même courbe.

L'enveloppe trouvée est une hypocycloïde, obtenue en faisant rouler un cercle de rayon $\frac{l}{4}$ sur un cercle de rayon l, le premier cercle étant intérieur au second. Les formules relatives à l'hypocycloïde sont alors, en effet,

$$x = \frac{3}{4} l \cos\alpha + \frac{l}{4} \cos 3\alpha, \qquad y = \frac{3}{4} l \sin\alpha - \frac{l}{4} \sin 3\alpha$$

ou, en simplifiant,

$$x = l \cos^3\alpha, \qquad y = l \sin^3\alpha,$$

d'où l'on tire

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}.$$

396. Nous venons de voir que l'enveloppe d'une droite de longueur constante dont les extrémités glissent sur deux droites rectangulaires est la même que l'enveloppe des trajectoires de ses différents points. Cette proposition n'est qu'un cas particulier d'une proposition générale que nous allons établir. Pour cela, nous allons d'abord considérer un autre cas de la théorie des enveloppes.

Considérons deux équations

$$(1) \qquad f(x, y, a, b) = 0,$$

$$(2) \qquad \varphi(x, y, a, b) = 0,$$

où entrent les coordonnées x, y et deux paramètres a, b. Si l'on donne à a une valeur constante a_0, les deux équations

$$(3) \qquad f(x, y, a_0, b) = 0,$$

$$(4) \qquad \varphi(x, y, a_0, b) = 0,$$

représentent une courbe dont on aurait l'équation en éliminant b entre les

équations (3), (4). Cette courbe est définie par l'équation $a = a_0$; il y a lieu de chercher son enveloppe quand a_0 varie d'une manière continue.

On peut dire que l'équation (4) définit b comme fonction de x, y, a_0, et en posant

$$b = \psi(a_0, x, y),$$

on voit que l'équation de la courbe correspondant à $a = a_0$ est

$$f[x, y, a_0, \psi(a_0, x, y)] = 0.$$

Nous devons égaler à zéro la dérivée du premier membre de cette équation prise par rapport à a_0. Cela revient à poser

$$f'_{a_0} + f'_b \frac{\partial b}{\partial a_0} = 0, \qquad \varphi'_{a_0} + \varphi'_b \frac{\partial b}{\partial a_0} = 0.$$

Donc nous avons à éliminer a_0 et b entre les équations (3), (4) et l'équation $f'_{a_0} \cdot \varphi'_b - f'_b \cdot \varphi'_{a_0} = 0$ ou, en définitive, à éliminer a et b entre les équations (1), (2) et l'équation

$$(5) \qquad f'_a \cdot \varphi'_b - f'_b \varphi'_a = 0.$$

Il en résulte que *l'enveloppe des courbes* $b =$ const. *est la même que celle des courbes* $a =$ const.

Cela posé, considérons une courbe mobile de forme invariable rapportée à deux axes rectangulaires $X\omega Y$ auxquels elle est liée invariablement, et dont l'équation, par rapport à ces axes, est $Y = f(X)$.

Soit, en outre, xOy un système d'axes rectangulaires fixes; en appelant α l'angle que ωX fait avec Ox, les formules de transformation

$$x = x_1 + X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \qquad y = y_1 + X\sin\alpha + Y\cos\alpha$$

montrent que x et y sont fonctions des deux paramètres α, X. Si l'on donne à α une valeur constante, les équations précédentes représentent la courbe mobile dans une position particulière; si, au contraire, X est constant et α variable, elles représentent la trajectoire d'un point M de cette courbe. Donc, en vertu du théorème que l'on vient d'établir :

Lorsqu'une courbe plane de forme invariable se déplace dans son plan, les trajectoires de tous ses points ont la même enveloppe que la courbe mobile elle-même.

397. *Trouver l'enveloppe d'un cercle de rayon constant dont le centre décrit une courbe donnée.* — L'équation de la courbe étant $f(x, y) = 0$, celle du cercle sera de la forme

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0$$

avec la condition

$$f(a, b) = 0.$$

Il faudra, par suite, éliminer a, b entre les deux équations précédentes et l'équation

$$\frac{x-a}{f'_a} = \frac{y-b}{f'_b}.$$

Cette dernière équation représente la normale à la courbe donnée au point (a, b), résultat que l'on obtient immédiatement en remarquant que l'axe radical de deux cercles égaux, ayant leurs centres en deux points M, M', est la perpendiculaire élevée au milieu de MM'; les points M et M' étant supposés sur la courbe donnée, l'axe radical a pour limite la normale en M. quand M' vient se confondre avec M.

Il résulte immédiatement de là que, si l'on porte sur la normale en un point M d'une courbe deux longueurs MP et MQ égales à une ligne donnée R, le lieu des extrémités P, Q de ces segments est une courbe qui admet les mêmes normales que la proposée; c'est ce que l'on nomme une courbe parallèle à la courbe donnée.

398. *Enveloppe d'un cercle passant par un point fixe et dont le centre décrit une courbe donnée.* — Prenons deux axes rectangulaires passant par le point fixe donné; le cercle variable est représenté par l'équation

$$x^2+y^2-2ax-2by=0,$$

avec la condition

$$f(a, b)=0.$$

L'équation de l'enveloppe s'obtiendra en éliminant a, b entre ces deux équations et l'équation

$$\frac{x}{f'_a} = \frac{y}{f'_b}.$$

Cette équation représente la perpendiculaire menée de l'origine à la tangente à la courbe donnée au point (a, b), ce que l'on vérifie géométriquement, comme dans le problème précédent. On en déduit sans difficulté que l'enveloppe cherchée est homothétique à la podaire de la courbe par rapport à l'origine, les rayons vecteurs de la podaire étant multipliés par 2.

399. *Enveloppe d'un cercle dont le centre décrit une courbe fixe et qui reste orthogonal à un cercle fixe.* — Prenons pour axes deux diamètres rectangulaires du cercle fixe et soit R le rayon de ce cercle. Le cercle mobile aura une équation de la forme

$$x^2+y^2-2ax-2by+R^2=0,$$

a, b étant liés par l'équation

$$f(a, b)=0.$$

On obtiendra l'équation de l'enveloppe en éliminant a, b entre ces équa-

tions et l'équation

$$\frac{x}{f'_a} = \frac{y}{f'_b}.$$

On voit encore que les points P, Q où le cercle touche l'enveloppe sont à l'intersection de ce cercle et de la perpendiculaire menée par l'origine à la tangente au point (a, b), à la courbe que décrit le centre du cercle mobile. On en déduit une propriété remarquable de l'enveloppe; l'équation

$$\text{OP}.\text{OQ} = \text{R}^2$$

montre, en effet, que, si l'on transforme cette enveloppe par inversion, le cercle d'inversion étant le cercle fixe donné, elle se transforme en elle-même : c'est une *anallagmatique*.

400. Réciproquement, toute *anallagmatique* est susceptible de ce mode de génération. Considérons, en effet, une courbe C telle qu'à tout point P de cette courbe corresponde un second point Q lui appartenant, situé sur OP et tel que $\text{OP}.\text{OQ} = \text{R}^2$, R étant une constante et O étant un point fixe. Soit P′ un point de la courbe donnée infiniment voisin de P, et soit Q′ le point correspondant. La relation $\text{OP}.\text{OQ} = \text{OP}'.\text{OQ}'$ montre que le quadrilatère PP′QQ′ est inscriptible à un cercle dont le centre est le point de rencontre des perpendiculaires menées respectivement au milieu de PQ et au milieu de P′Q′. Supposons que P′ vienne se confondre avec P. Le cercle que nous venons de définir a pour limite un cercle passant par P et Q et tangent en chacun de ces points à la courbe donnée. D'autre part, la perpendiculaire menée au milieu de PQ enveloppe, quand PQ tourne autour du point O, une courbe déterminée C′, le point de contact étant précisément le centre du cercle bitangent en P et Q à la courbe C. Il est clair que ce cercle est orthogonal au cercle d'inversion, c'est-à-dire au cercle ayant pour centre le point O et pour rayon R et son centre décrit la courbe C′; l'enveloppe de ce cercle est la courbe C. Ainsi toute anallagmatique est l'enveloppe d'un cercle orthogonal à un cercle fixe, et dont le centre décrit une courbe appelée *déférente*; et cela est vrai d'autant de manières qu'il y a de centres d'inversion pour lesquels la courbe se transforme en elle-même.

Équations homogènes par rapport aux paramètres.

401. Supposons que l'équation de l'enveloppée

$$f(x, y, a, b, c) = 0 \tag{1}$$

soit homogène par rapport aux paramètres a, b, c liés eux-mêmes par une équation homogène

$$\varphi(a, b, c) = 0. \tag{2}$$

Dans ce cas, il n'y a en réalité que deux paramètres; en effet, si nous posons $a = c\alpha$, $b = c\beta$, les équations précédentes pourront être mises sous la forme

$$f(x, y, \alpha, \beta, 1) = 0, \qquad \varphi(\alpha, \beta, 1) = 0$$

et nous devons écrire que les dérivées de ces deux dernières fonctions sont proportionnelles, ce qui revient à déterminer un facteur λ tel que

$$(3) \qquad f'_\alpha = \lambda\varphi'_\alpha, \qquad f'_\beta = \lambda\varphi'_\beta.$$

Or, en vertu de l'identité d'Euler,

$$(4) \qquad \begin{cases} af'_a + bf'_b + cf'_c = mf(x, y, a, b, c) = 0, \\ a\varphi'_a + b\varphi'_b + c\varphi'_c = p\varphi(a, b, c) = 0, \end{cases}$$

m et p étant les degrés d'homogénéité des fonctions f et φ; en outre, les équations (3) reviennent à celles-ci :

$$f'_a = \lambda c^{m-p}\varphi'_a, \qquad f'_b = \lambda c^{m-p}\varphi'_b,$$

et, en tenant compte des équations (4), on en déduit $f'_c = \lambda c^{m-p}\varphi'_c$.

De tout cela, il résulte que l'équation de l'enveloppe des courbes (1) s'obtiendra en éliminant a, b, c entre les équations (1), (2) et les suivantes :

$$\frac{f'_a}{\varphi'_a} = \frac{f'_b}{\varphi'_b} = \frac{f'_c}{\varphi'_c}.$$

402. *Applications.* — Si les coefficients u, v, w de l'équation d'une droite

$$(1) \qquad ux + vy + wz = 0$$

sont liés par une équation homogène

$$(2) \qquad f(u, v, w) = 0,$$

cette droite a pour enveloppe une courbe déterminée C dont on obtiendra l'équation en éliminant u, v, w entre les équations (1), (2) et

$$(3) \qquad \frac{x}{f'_u} = \frac{y}{f'_v} = \frac{z}{f'_w}.$$

L'équation (2) est l'*équation tangentielle de la courbe* C, et

l'on voit que les coordonnées ponctuelles du point de contact de la tangente (u, v, w) sont proportionnelles aux dérivées du premier membre de l'équation tangentielle.

403. Il convient de rapprocher le résultat qu'on vient d'obtenir de celui-ci. Si l'on écrit sous la forme suivante :

$$uX + vY + wZ = 0$$

l'équation de la tangente au point (x, y, z) de la courbe définie par l'équation $f(x, y, z) = 0$, on a

$$\frac{u}{f'_x} = \frac{v}{f'_y} = \frac{w}{f'_z}.$$

404. *Trouver l'équation ponctuelle de la courbe ayant pour équation tangentielle*

$$au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0. \tag{1}$$

Les coordonnées x, y, z du point de contact d'une droite dont les coefficients u, v, w vérifient l'équation (1) avec son enveloppe sont assujetties à vérifier les équations

$$\begin{aligned} au + b''v + b'w &= \lambda x, \\ b''u + a'v + bw &= \lambda y, \\ b'u + bv + a''w &= \lambda z, \\ ux + vy + wz &= 0, \end{aligned}$$

λ étant un paramètre arbitraire; l'équation ponctuelle demandée est donc

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & x \\ b'' & a' & b & y \\ b' & b & a'' & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

L'équation (1) représente donc, en général, une conique.

405. *Remarques.* — 1° Si l'on considère la conique ayant pour équation ponctuelle

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0, \tag{3}$$

l'équation tangentielle de cette conique est précisément l'équation (1), si l'on

suppose que a, a', a'', b, b', b'' soient les mineurs du discriminant Δ de la forme (3). Dans ce cas, l'équation (2) développée est $\Delta f(x, y, z) = 0$.

2° On sait que si $\Delta = 0$, la forme (1) est un carré parfait. Si l'équation $f(x, y, z) = 0$ représente alors deux droites distinctes D, D', les mineurs de Δ ne sont pas tous nuls, et l'on a

$$au^2 + a'v^2 + a'w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv \equiv k(ux_0 + vy_0 + wz_0)^2,$$

k étant une constante et x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point de concours des droites D, D'. On déduit de l'identité précédente les formules suivantes, qui nous seront utiles :

$$\frac{x_0^2}{a} = \frac{y_0^2}{a'} = \frac{z_0^2}{a''} = \frac{y_0 z_0}{b} = \frac{z_0 x_0}{b'} = \frac{x_0 y_0}{b''}.$$

406. Lorsque les coefficients de la forme (1) ne sont pas les mineurs du discriminant d'une forme quadratique, il peut arriver que cette forme soit un produit de deux facteurs linéaires distincts; l'équation (1) devient alors

$$(a_1 u + b_1 v + c_1 w)(a_2 u + b_2 v + c_2 w) = 0,$$

a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 étant des constantes; elle se décompose en deux. L'équation $a_1 u + b_1 v + c_1 w = 0$ exprime que la droite ayant pour équation $ux + vy + wz = 0$ passe par le point (a_1, b_1, c_1). L'équation (1) représente donc alors deux points.

407. *Remarque.* — Si l'on cherche, par la méthode générale, l'enveloppe de la droite dont les coefficients u, v, w vérifient l'équation

$$a_1 u + b_1 v + c_1 w = 0,$$

on doit éliminer u, v, w entre cette équation et les suivantes :

$$ux + vy + wz = 0, \qquad \frac{x}{a_1} = \frac{y}{b_1} = \frac{z}{c_1}.$$

La dernière équation montre que l'enveloppe se réduit au point (a_1, b_1, c_1).

Si l'on considère la droite ayant pour équation

$$(1) \qquad ux + vy + 1 = 0,$$

et si l'on demande son enveloppe, sachant que

$$(2) \qquad ua + vb + 1 = 0;$$

en écrivant que les dérivées des polynomes (1) et (2) par rapport à u et

sont proportionnelles, on obtient

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}. \tag{3}$$

Il reste à éliminer u et v entre les équations (1), (2), (3). Il ne faudrait pas faire le raisonnement suivant : l'équation (3) ne contenant ni u ni v est le résultat de l'élimination; ce qui conduirait à une conclusion évidemment absurde. Il convient de se rappeler la définition exacte de l'élimination : éliminer u et v entre les équations (1), (2), (3), c'est trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces équations soient compatibles. Or, si l'équation (3) est vérifiée, les équations (1) et (2) sont incompatibles, à moins qu'elles ne soient identiques, ce qui exige que les rapports $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{b}$ aient pour valeur commune l'unité. Le résultat cherché est donc donné par les équations

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = 1,$$

ou $x = a$, $y = b$.

Développées.

408. On appelle *développée* d'une courbe plane, l'enveloppe de ses normales.

La normale au point $M(x, y)$ a pour équation, les axes étant rectangulaires,

$$X - x + y'(Y - y) = 0. \tag{1}$$

Pour trouver les coordonnées du point où cette droite touche son enveloppe, nous devons résoudre le système formé par cette équation et par l'équation

$$-(1 + y'^2) + y''(Y - y) = 0, \tag{2}$$

obtenue en égalant à zéro la dérivée du premier membre de l'équation (1) par rapport au paramètre x; y étant regardé comme une fonction connue de x dont les dérivées première et seconde sont y' et y''.

En résolvant les équations (1) et (2) on obtient

$$X - x = -\frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \qquad Y - y = \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Le point C ayant pour coordonnées les valeurs de X, Y définies par les deux équations précédentes se nomme le *centre de cour-*

bure. La distance R du point M au centre de courbure est donnée par la formule

$$R^2 = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}.$$

Le centre de courbure est la limite du point de rencontre d'une normale avec la normale infiniment voisine.

409. On nomme *cercle osculateur* relatif au point M la limite du cercle tangent en M à la courbe donnée et passant par un point infiniment voisin M', appartenant à la même courbe. Il est facile de voir que ce cercle a pour centre le point C. En effet, l'équation générale des cercles tangents en M à la courbe donnée est

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+\lambda[Y-y-y'(X-x)]=0.$$

Effectivement, cette équation représente un cercle passant par M, et ayant, avec le cercle de rayon nul représenté par l'équation

$$(X-x)^2+(Y-y)^2=0,$$

pour axe radical la tangente en M à la courbe donnée et, d'autre part, on peut déterminer λ de manière que cette équation représente un cercle passant par un point donné. Déterminons λ de façon que le cercle considéré passe par le point $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$; ce qui donne

$$\Delta x^2+\Delta y^2+\lambda[\Delta y-y'\Delta x]=0.$$

Or $\Delta y - y'\Delta x = (y''+\alpha)\,\dfrac{\Delta x^2}{2}$, α étant un infiniment petit; l'équation qui détermine λ est donc

$$1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\lambda\frac{(y''+\alpha)}{2}=0,$$

et à la limite, on doit prendre $\lambda = -\dfrac{2(1+y'^2)}{y''}$. L'équation demandée est, par suite,

$$(X-x)^2+(Y-y)^2-\frac{2(1+y'^2)}{y''}[Y-y-y'(X-x)]=0$$

ou

$$\left[X-x+\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right]^2+\left(Y-y-\frac{1+y'^2}{y''}\right)^2=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}.$$

Ce qui démontre la proposition.

410. On étudie très facilement les développées par le procédé suivant.

L'équation

$$(1)\qquad x\cos\alpha + y\sin\alpha = f(\alpha)$$

peut représenter la tangente à la courbe donnée C (*fig.* 107); cette courbe est considérée comme l'enveloppe de la droite mobile représentée par l'équation (1). On voit immédiatement que la podaire de la courbe C, par rapport à l'origine, a pour équation, en coordonnées polaires,

$$p = f(\alpha),$$

p étant le rayon vecteur et α l'angle polaire.

En second lieu, le point de contact M de la tangente (1) est sur la droite définie par l'équation

$$(2)\qquad -x\sin\alpha + y\cos\alpha = f'(\alpha).$$

Cette équation représente la normale en M.

Si l'on peut éliminer α entre les équations (1) et (2), on aura l'équation ponctuelle de la courbe C; on peut du moins exprimer les coordonnées du point M en fonction de α; les équations (1) et (2) résolues donnent

$$x = f(\alpha)\cos\alpha - f'(a)\sin\alpha, \qquad y = f(\alpha)\sin\alpha + f'(\alpha)\cos\alpha.$$

La normale en M étant représentée par l'équation (2), on obtiendra la développée de la courbe C en éliminant α entre l'équation (2) et sa dérivée, c'est-à-dire

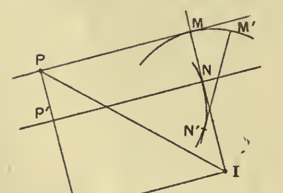
$$(3)\qquad x\cos\alpha + y\sin\alpha = -f''(\alpha).$$

Les équations (2) et (3) définissent un point N de la développée. Ce point est le point de contact de la normale en M à la courbe C avec sa développée. La normale en un point M' infiniment voisin de M coupe la normale en M en un point qui a pour limite le point N. Les coordonnées du point N sont

$$(4)\qquad x_1 = -f'(\alpha)\sin\alpha - f''(\alpha)\cos\alpha, \qquad y_1 = f'(\alpha)\cos\alpha - f''(\alpha)\sin\alpha.$$

L'équation (3) représente une parallèle à la tangente en M à la courbe C, menée par le point N. Ce point est le centre de courbure, et le segment $\overline{\text{NM}}$, le rayon de courbure R de la courbe C au point M. On a

Fig. 107.



$$(5)\qquad R = f(\alpha) + f''(\alpha).$$

Les formules (4), différentiées par rapport à α, donnent

$$dx_1 = -[f'(\alpha) + f'''(\alpha)]\cos\alpha\, d\alpha,$$
$$dy_1 = -[f'(\alpha) + f'''(\alpha)]\sin\alpha\, d\alpha,$$

c'est-à-dire, en tenant compte de l'équation (5),

$$dx_1 = -dR\cos\alpha, \qquad dy_1 = -dR\sin\alpha,$$

d'où

$$dx_1^2 + dy_1^2 = dR^2;$$

donc, en nommant s_1 l'arc de développée compté à partir d'une origine arbitraire,

$$ds_1 = \pm dR.$$

Soit NN′ un arc de développée; on a, d'après l'équation précédente,

$$\text{arc}\, NN' = M'N' - MN.$$

On peut encore vérifier la construction de la tangente à la podaire. Soient P un point de la podaire et I le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la normale en M.

Les coordonnées x_2, y_2 de P sont

$$x_2 = f(\alpha)\cos\alpha, \qquad y_2 = f(\alpha)\sin\alpha;$$

celles de I sont

$$x_3 = -f'(\alpha)\sin\alpha, \qquad y_3 = f'(\alpha)\cos\alpha.$$

Or

$$\frac{dx_2}{d\alpha} = y_3 - y_2, \qquad \frac{dy_2}{d\alpha} = -x_3 + x_2;$$

par suite,

$$-\frac{dx_2}{dy_2} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2},$$

ce qui prouve bien que la droite PI est la normale en P à la podaire.

EXERCICES.

1. Trouver l'enveloppe des positions d'une droite mobile qui tourne uniformément autour d'un de ses points pendant que ce point se meut lui-même d'un mouvement rectiligne et uniforme.

2. Trouver l'enveloppe des rayons lumineux émanant d'une courbe fixe A et réfléchis par une courbe donnée C (caustique par réflexion). Démontrer que cette caustique est la développée de la courbe obtenue en doublant les rayons vecteurs de la podaire de C par rapport au centre A; c'est aussi la développée de l'enveloppe d'un cercle variable dont le centre décrit la courbe C et qui passe par le point A. (QUÉTELET.)

3. Caustique par réflexion d'une droite.

4. Caustique par réflexion d'un cercle.

5. Trouver la caustique par réflexion des rayons lumineux perpendiculaires à l'axe d'une parabole sur laquelle se réfléchissent les rayons.

6. Étant donnés deux axes Ox, Oy et un point fixe F sur Ox, détermi-

ner une courbe telle que la longueur de la normale MN soit dans un rapport constant avec MF, M étant le pied de la normale et N son point de rencontre avec Oy. (Ramener la question à chercher l'enveloppe d'un cercle, ayant son centre sur Oy et vu de F sous un angle constant.)

7. Un triangle ABC a un sommet fixe A, l'angle A est constant, et les deux autres sommets glissent sur une droite fixe; trouver l'enveloppe des cercles inscrits et exinscrits.

8. Étant donnée une conique, trouver l'enveloppe d'une corde vue d'un point fixe sous un angle droit; en déduire le lieu de la projection du point fixe sur la corde.

9. Trouver l'enveloppe des droites menées par les extrémités de deux diamètres conjugués d'une conique.

10. Quand une droite se déplace dans un plan, les tangentes aux trajectoires de ses différents points, pour une position déterminée de la droite, enveloppent une parabole ayant pour foyer le centre instantané de rotation, et pour tangente au sommet la droite elle-même.

11. Enveloppe de la courbe ayant pour équation $P\cos\varphi + Q\sin\varphi = R$. Application à $\frac{x}{a}\cos\varphi + \frac{y}{b}\sin\varphi = 1$.

12. Enveloppe de la courbe $P\,\mathrm{Ch}\,\varphi + Q\,\mathrm{Sh}\,\varphi = R$. Application à

$$\frac{x}{a}\mathrm{Ch}\,\varphi - \frac{y}{b}\mathrm{Sh}\,\varphi = \pm 1.$$

13. Enveloppe de $\frac{P}{\cos\varphi} + \frac{Q}{\sin\varphi} = R$. — On trouve $P^{\frac{2}{3}} + Q^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$.

14. Enveloppe de $P\cos\varphi + Q\sin\varphi = R\cos 2\varphi$. — On écrit

$$(P+Q)(\cos\varphi + \sin\varphi) + (P-Q)(\cos\varphi - \sin\varphi) = 2R(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

ou

$$\frac{P}{\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{Q}{\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)} = 2R\sqrt{2}. \qquad \text{(Salmon.)}$$

15. Enveloppe de $\frac{P}{\mathrm{Ch}\,\varphi} + \frac{Q}{\mathrm{Sh}\,\varphi} = 1$.

CHAPITRE XVI.

POLES ET POLAIRES.

Pôles et polaires dans les coniques.

411. Soient A et M deux points et une courbe du second degré donnée C; nous dirons que A et M sont conjugués par rapport à C si ces points sont conjugués harmoniques par rapport aux points d'intersection P, Q de la droite AM et de la courbe C. Soient x_0, y_0, z_0 et x, y, z les coordonnées des points A et M et $f(x, y, z) = 0$ l'équation de la conique. L'équation $f(x_0 + \lambda x, y_0 + \lambda y, z_0 + \lambda z) = 0$, c'est-à-dire

$$f(x_0, y_0, z_0) + \lambda(x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z) + \lambda^2 f(x, y, z) = 0,$$

ayant pour racines les rapports $-\frac{\text{PA}}{\text{PM}}, -\frac{\text{QA}}{\text{QM}}$; la condition

$$\frac{\text{PA}}{\text{PM}} + \frac{\text{QA}}{\text{QM}} = 0, \quad \text{ou, ce qui revient au même,} \quad \frac{\text{AP}}{\text{AQ}} + \frac{\text{MP}}{\text{MQ}} = 0,$$

s'exprime par l'une ou l'autre des équations

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0 \quad \text{ou} \quad x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0} = 0,$$

dont les premiers membres sont identiques.

On nomme *polaire* du point A, par rapport à une conique C, le lieu des points conjugués de A par rapport à C. L'équation de la polaire du point A est donc

$$x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0} = 0.$$

Cette équation étant du premier degré, la polaire d'un point A est une droite D; le point A se nomme le *pôle* de la droite D. Quand le point A est sur la conique, sa polaire se confond avec la tangente en A.

412. *Discussion de l'équation de la polaire. Condition pour que la polaire d'un point soit à l'infini.* — Supposons que $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ soient des coordonnées cartésiennes, l'équation de la polaire du point $A(x_0, y_0)$ cesse d'être du premier degré si l'on suppose que x_0, y_0 vérifient les équations $f'_x = 0$, $f'_y = 0$. D'ailleurs, si ces conditions sont remplies, et si la conique ne dégénère pas en droites, on ne pourra supposer $f'_{z_0} = 0$ et, par suite, la polaire de A sera rejetée à l'infini.

Il résulte de là que, si la conique a un centre, la polaire du centre est à l'infini et la polaire de tout autre point du plan est une droite déterminée et à distance finie. Dans le cas de la parabole, la polaire d'un point à distance finie est toujours une droite à distance finie.

On établit facilement ces résultats par la Géométrie. En effet, soit A un point; pour qu'une sécante passant par ce point rencontre la conique considérée en deux points P, Q symétriques par rapport à A, il faut et il suffit que le conjugué de A par rapport à la corde PQ soit rejeté à l'infini et, par suite, si le point A est le milieu de deux cordes distinctes passant par A, la polaire de A sera rejetée à l'infini, d'où il résulte que toute corde passant par le point A sera partagée par ce point en deux parties égales. On peut donc prendre pour définition du centre d'une conique un point dont la polaire est rejetée à l'infini. On a ainsi une nouvelle théorie du centre.

413. *Polaire d'un point à l'infini.* — Si l'on pose $x_0 = \alpha$, $y_0 = \beta$, $z_0 = 0$, le point $(\alpha, \beta, 0)$ est à l'infini dans la direction ayant pour paramètres directeurs α, β; la polaire de ce point a pour équation

$$\alpha f'_x + \beta f'_y = 0:$$

elle se confond alors avec le diamètre conjugué à la direction donnée; ce qui est évident *a priori*. En effet, si un point A est à l'infini dans la direction D, sa polaire est le lieu des milieux des cordes parallèles à la direction D. On peut ainsi donner une nouvelle définition du diamètre conjugué à une direction donnée. On vérifie aisément que, si la direction donnée est asymptotique, la polaire correspondante est l'asymptote parallèle à cette direction. Dans le cas de la parabole, la polaire d'un point à l'infini dans la direction de l'axe est rejetée à l'infini.

414. Problème inverse : *Trouver le pôle d'une droite donnée.* — Soient $ux + vy + wz = 0$ l'équation d'une droite D et $f(x, y, z) = 0$ l'équation d'une conique C. Cherchons s'il y a un point dont la polaire, par rapport à C, soit la droite D. Pour cela, il faut et il suffit

que les coordonnées x, y, z du point cherché vérifient les équations

$$f'_x = 2\lambda u, \qquad f'_y = 2\lambda v, \qquad f'_z = 2\lambda w,$$

λ étant un coefficient différent de zéro. En posant

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy,$$

les équations précédentes sont, sous forme explicite,

$$(1) \qquad Ax + B''y + B'z = \lambda u,$$

$$(2) \qquad B''x + A'y + Bz = \lambda v,$$

$$(3) \qquad B'x + By + A''z = \lambda w.$$

Discussion. — 1° $\Delta \neq 0$. Dans ce cas, quelle que soit la valeur de λ, les équations précédentes ont une solution; ces équations déterminent un point et un seul. D'ailleurs, en appliquant les formules de Cramer, on obtient immédiatement

$$x = \frac{\lambda F'_u}{2\Delta}, \qquad y = \frac{\lambda F'_v}{2\Delta}, \qquad z = \frac{\lambda F'_w}{2\Delta},$$

$F(u, v, w) = 0$ étant l'équation tangentielle de la conique donnée.

Le calcul précédent montre que *toute droite a un pôle déterminé, à distance finie ou infinie,* par rapport à une conique proprement dite. Cherchons dans quel cas ce pôle est à distance finie. Pour résoudre cette question importante, supposons que $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ soient les coordonnées cartésiennes du pôle de la droite D; pour que le pôle soit à l'infini, il faut et il suffit que $F'_w = 0$, c'est-à-dire

$$b'u + bv + a''w = 0.$$

Supposons d'abord $a'' \neq 0$; cette équation exprime que la droite donnée doit passer par le point ayant pour coordonnées cartésiennes

$$\frac{x}{z} = \frac{b'}{a''}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{b}{a''},$$

c'est-à-dire par le centre de la conique; en second lieu, si $a'' = 0$, c'est-à-dire si $AA' - B''^2 = 0$, la conique C est une parabole et la condition

$$b'u + bv = 0$$

exprime que la droite D est parallèle à l'axe de la parabole.

D'ailleurs, si l'on suppose l'équation de la parabole mise sous la forme

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

on voit que la condition $b'u + bv = 0$ peut s'écrire

$$(\alpha E - \beta D)(\beta u - \alpha v) = 0;$$

le premier facteur étant différent de zéro, c'est le second qui doit être nul.

Donc, toute droite ne passant pas par le centre de la conique, ou, dans le cas de la parabole, toute droite non parallèle à l'axe, a un pôle à distance finie.

2° $\Delta = 0$. Pour traiter ce cas simplement, remarquons que, si la conique C a un point double, la polaire d'un point quelconque y passe, car, si les coordonnées d'un point (x, y, z) vérifient les équations $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f'_z = 0$, elles vérifient aussi, quels que soient x_0, y_0, z_0, l'équation

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0.$$

Cela dit, supposons que la conique ait un seul point double, à distance finie, c'est-à-dire que $\Delta = 0$, $a'' \neq 0$; cette conique dégénère en deux droites concourantes et la polaire d'un point quelconque passe par le point de concours de ces deux droites. En ajoutant les équations (1), (2), (3), après avoir multiplié les deux membres successivement par b', b, a'', on obtient

$$\lambda(b'u + bv + a''w) = 0,$$

et, comme on doit supposer $\lambda \neq 0$, on obtient la condition

$$b'u + bv + a''w = 0,$$

qui exprime que la droite D doit passer par le point double de la conique C.

Si cette condition n'est pas remplie, la droite D n'a pas de pôle; supposons-la remplie; alors l'équation (3) est une conséquence des équations (1) et (2). On n'a plus que deux équations pour déterminer le pôle de la droite D : cette droite a donc une infinité de pôles qui sont tous les points de la droite ayant pour équation

$$v f'_x - u f'_y = 0,$$

équation obtenue en éliminant λ et qui représente le diamètre de la conique C, conjuguée à la direction de la droite D elle-même.

Si le point double de la conique C est à l'infini, cette conique se réduit à deux droites parallèles D_1, D_2 et la polaire d'un point quelconque est parallèle aux droites D_1, D_2; le problème n'est donc possible que si la droite D est elle-même parallèle à D_1 et D_2.

Si nous supposons, par exemple, $A \neq 0$, nous pouvons remarquer que $f'_y \equiv h f'_x$, h étant une constante; donc, on doit supposer $v = hu$, ce qui

exprime, comme on le vérifie immédiatement, que la droite D doit être parallèle aux droites D_1, D_2 qui constituent la conique C. Si cette condition est remplie, la droite D a une infinité de pôles situés sur la droite ayant pour équation

$$wf'_x - uf'_z = 0,$$

et qui est parallèle à D_1.

Enfin, supposons que C ait une ligne de points doubles, c'est-à-dire se réduise à deux droites confondues en une seule, D_1; dans ce cas, la droite D doit être confondue avec cette ligne et le problème est évidemment indéterminé. D'ailleurs, en supposant $A \neq 0$, on a, dans ce cas, $f'_y \equiv hf'_x$, $f'_z \equiv h'f'_y$, et l'on doit supposer $v = hu$, $w = h'u$; si ces conditions sont remplies, la droite D se confond avec D_1 et son pôle est indéterminé.

415. *Propriétés des pôles et des polaires.* — 1° *Si la polaire d'un point* A *passe par* B, *réciproquement, la polaire de* B *passe par* A, car les points A et B sont conjugués.

2° *Si un point* m *décrit une droite* P, *la polaire de* m *tourne autour du pôle* p *de* P. — En effet, le point m étant sur la droite P, p et m sont conjugués; donc la polaire de m passe par p.

3° *Si une droite* P *tourne autour d'un point* m, *son pôle* p *décrit la polaire* M *du point* m. — Cette proposition ne diffère pas, au fond, de la précédente; en effet, le point m étant sur la droite P, la polaire M du point m passe par p.

Les droites M, P, telles que chacune d'elles passe par le pôle de l'autre, sont dites *conjuguées* par rapport à la conique donnée.

Ces propositions se vérifient aisément par le calcul.

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point p; sa polaire a pour équation

$$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} = 0;$$

l'équation

$$x_1f'_{x_0} + y_1f'_{y_0} + z_1f'_{z_0} = 0,$$

qui exprime que le point $m(x_1, y_1, z_1)$ est sur cette droite, exprime aussi que la polaire de m passe par p.

416. *Corollaires.* — Le pôle d'une droite est à l'intersection des polaires de deux quelconques de ses points; la polaire d'un point est la droite qui joint les pôles de deux droites quelconques passant par ce point.

Nous savons que la polaire d'un point passe par les points de con-

tact des tangentes issues de ce point. Cela résulte aussi de ce que le pôle d'une tangente est son point de contact, de sorte que la droite qui joint les points de contact de deux tangentes est la polaire de leur point de concours.

Si l'on représente par P_1, P_2 les premiers membres des équations des polaires de deux points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), la polaire du point $x_1 + \lambda x_2$, $y_1 + \lambda y_2$, $z_1 + \lambda z_2$ a pour équation $P_1 + \lambda P_2 = 0$. On voit que si λ varie de $-\infty$ à $+\infty$, la polaire du point λ tourne toujours dans le même sens.

417. *Condition pour que deux droites soient conjuguées par rapport à une conique donnée.* — Soient

$$ux + vy + wz = 0, \qquad u'x + v'y + w'z = 0$$

les équations des deux droites. Pour que le pôle de la première soit sur la seconde, il faut qu'il y ait des valeurs non toutes nulles de x, y, z, λ qui vérifient les équations

$$\begin{aligned} Ax + B''y + B'z &= \lambda u, \\ B''x + A'y + Bz &= \lambda v, \\ B'x + By + A''z &= \lambda w, \\ u'x + v'y + w'z &= 0, \end{aligned}$$

ce qui donne la condition

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & u \\ B'' & A' & B & v \\ B' & B & A'' & w \\ u' & v' & w' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

La symétrie de cette relation prouve que, si le pôle p d'une droite P est sur la droite P', le pôle p' de P' sera sur la droite P. On peut mettre cette relation sous une forme très utile. Les coordonnées du pôle de la droite (u, v, w) sont, comme nous l'avons vu plus haut, proportionnelles à F'_u, F'_v, F'_w. La condition pour que ce point soit sur la seconde droite est donc

$$u'F'_u + v'F'_v + w'F'_w = 0;$$

c'est d'ailleurs ce qu'on obtient en développant le déterminant précédent.

418. Théorème. — *Deux droites conjuguées par rapport à une conique donnée sont conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes à cette conique menées par leur point d'intersection, et réciproquement.*

En effet, soient

$$P \equiv ux + vy + wz = 0, \qquad P' \equiv u'x + v'y + w'z = 0$$

les équations de deux droites D, D'. L'équation

$$(u+\lambda u')x+(v+\lambda v')y+(w+\lambda w')z=0$$

représentera une tangente passant par le point d'intersection A de ces droites, si λ est racine de l'équation

$$F(u+\lambda u',\ v+\lambda v',\ w+\lambda w')=0$$

ou, en développant,

$$F(u,v,w)+\lambda(u'F'_u+v'F'_v+w'F'_w)+\lambda^2 F(u',v',w')=0.$$

Si λ', λ'' sont les racines de cette équation, les tangentes issues du point A sont définies par les équations

$$P+\lambda' P'=0, \qquad P+\lambda'' P'=0;$$

pour que ces tangentes forment un faisceau harmonique avec les droites P, P', il faut et il suffit que $\lambda'+\lambda''=0$, c'est-à-dire que

$$u'F'_u+v'F'_v+w'F'_w=0,$$

ou que les droites P, P' soient conjuguées par rapport à la conique donnée.

La proposition est d'ailleurs évidente par la Géométrie; car, si les droites P, P' sont conjuguées, la droite pp' qui joint leurs pôles est la polaire de leur point de rencontre A; elle passe donc par les points de contact q, q' des tangentes issues de A, et, comme les points p, p' sont conjugués, la division p, p', q, q' est harmonique. Réciproquement, si cette division est harmonique, p est le pôle de P, etc.

Il résulte de là que, par tout point A, on peut faire passer une infinité de couples de droites conjuguées par rapport à la conique donnée.

En particulier, pour avoir deux droites rectangulaires conjuguées, il suffira de mener les bissectrices de l'angle des tangentes issues du point donné A.

Si le point donné A est sur la conique, la tangente en A et une droite quelconque menée par A sont conjuguées.

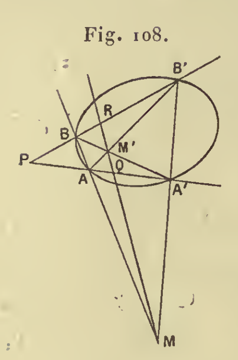
419. *Construction de la polaire d'un point.* — Soit P un point donné (*fig.* 108); menons deux transversales, PA, PB, rencontrant la conique donnée en des points A, A' et B, B' respectivement. La polaire de P passe par le point de rencontre M des cordes AB, A'B' et par le point de rencontre M' des cordes AB', BA'.

En effet, la droite MM' est la polaire de P par rapport à l'angle BMB'; elle rencontre donc PA et PB aux points Q, R qui sont conjugués de P; donc MM' est la polaire de P par rapport à la conique donnée.

Il est d'ailleurs facile d'établir cette proposition par le calcul. Soient

x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point P et $f(x, y, z) = 0$ l'équation de la conique. Donnons-nous l'équation de la droite AB : $ux + vy + wz = 0$, et formons l'équation du faisceau PA, PB. Pour cela, soient x, y, z les coordonnées d'un point pris sur l'une de ces droites, sur PA par exemple. Les coordonnées d'un second point de la droite PA étant $x_0 + \lambda x$, $y_0 + \lambda y$, $z_0 + \lambda z$, exprimons que ce point est sur AB, ce qui donne

Fig. 108.



$$D_0 + \lambda D = 0,$$

en posant $ux + vy + wz = D$, $ux_0 + vy_0 + wz_0 = D_0$. En exprimant que le même point est sur la conique, on obtient

$$f(x_0, y_0, z_0) + \lambda(xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0}) + \lambda^2 f(x, y, z) = 0.$$

Si l'on élimine λ entre les deux équations précédentes, on obtient

$$D^2 f(x_0, y_0, z_0) - D_0 D(xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0}) + D_0^2 f(x, y, z) = 0.$$

C'est l'équation du faisceau des droites PA, PB. De là résulte que l'équation

$$D^2 f(x_0, y_0, z_0) - D_0 D(xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0}) = 0,$$

qui est une combinaison linéaire de l'équation de ce faisceau et de l'équation de la conique donnée, représente une conique passant par les points communs A, B, A', B' à cette conique et à ce faisceau. Mais, D étant en facteur, l'équation

$$D f(x_0, y_0, z_0) - D_0(xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0}) = 0$$

représente la droite A'B', et l'on reconnaît, à l'aide de cette équation, que A'B' passe par le point de concours de AB et de la polaire de P, ce qui revient à dire que cette polaire passe par le point de concours de AB et de A'B'.

On verrait de même que la polaire de P passe par le point de rencontre des deux droites AB' et BA'.

La construction précédente permet de tracer avec la règle seule les tangentes menées par un point donné à une conique supposée tracée.

Cette construction s'applique encore quand le point P est à l'infini dans une direction donnée; on peut donc déterminer par le même procédé les tangentes parallèles à cette direction.

420. *Positions relatives du pôle et de la polaire.* — 1° La conique donnée est une ellipse.

Nous supposerons que le point M se déplace sur un diamètre de l'ellipse, que nous prendrons pour axe des x, l'axe des y étant le

diamètre conjugué. Dans cette hypothèse, l'ellipse ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0,$$

la polaire de $M(x_0, 0)$ est définie par l'équation $xx_0 = a'^2$; elle a une direction conjuguée au diamètre OM. Si x_0 varie de 0 à $+\infty$, x varie de $+\infty$ à 0; quand $x_0 = a'$, on a aussi $x = a'$.

2° Si la conique est une ellipse imaginaire représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + 1 = 0,$$

la polaire du point $(x_0, 0)$ a pour équation $xx_0 + a'^2 = 0$; elle est réelle et symétrique de la polaire du même point par rapport à l'ellipse réelle conjuguée de l'ellipse donnée.

3° La conique est une hyperbole. Si le point M est sur un diamètre transverse de l'hyperbole, les résultats sont les mêmes que pour l'ellipse. Supposons, au contraire, que le point M se déplace sur un diamètre non transverse, l'équation de l'hyperbole étant

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1;$$

la polaire du point $(0, y_0)$ a pour équation $yy_0 = -b'^2$. On voit que si y_0 varie de 0 à $+\infty$, y varie de $-\infty$ à 0; si $y_0 = b'$, on a aussi $y = b'$; donc la polaire d'un point de l'hyperbole conjuguée est tangente à cette hyperbole au point diamétralement opposé au premier.

4° *Cas de la parabole.* — Nous ferons glisser le point M sur un diamètre de la parabole. En prenant pour axes ce diamètre et la tangente qui lui est conjuguée, l'équation de la parabole sera $y^2 - 2px = 0$, et celle de la polaire du point $(x_0, 0)$ sera $x + x_0 = 0$; elle est donc parallèle à la tangente considérée, et cette tangente est à égale distance de M et de sa polaire.

La propriété précédente est caractéristique; en effet, la polaire du point $(x_0, 0)$ par rapport à la conique

$$y^2 - 2px - qx^2 = 0$$

a pour équation

$$p(x + x_0) + qxx_0.$$

Cette équation ne se réduit à l'équation $x + x_0 = 0$ que si $q = 0$.

Considérons encore deux points, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Leurs polaires ont pour équations respectivement

$$yy_1 - p(x + x_1) = 0, \qquad yy_2 - p(x + x_2) = 0;$$

elles rencontrent l'axe des x en des points P, Q, ayant pour abscisses $-x_1$, $-x_2$, de sorte que $\overline{PQ} = x_1 - x_2$. La projection de AB sur l'axe des x, faite parallèlement à l'axe des y, a pour valeur $\overline{A'B'} = x_2 - x_1$, donc

$$\overline{PQ} = -\overline{A'B'}.$$

421. *Former l'équation du faisceau des tangentes à une conique telles que les points de contact soient sur une droite donnée.* — Soient

$$f(x, y, z) = 0, \qquad ux + vy + wz = 0$$

les équations de la conique et de la corde des contacts. Nous savons que le point qui a pour coordonnées $x_0 = F'_u$, $y_0 = F'_v$, $z_0 = F'_w$, $F(u, v, w)$ étant le premier membre de l'équation tangentielle de la conique f, est le pôle P de la droite (u, v, w).

Or

$$f'_{x_0} = 2(Ax_0 + B''y_0 + B'z_0) = 2(AF'_u + B''F'_v + B'F'_w)$$

et, par conséquent,

$$f'_{x_0} = 4u\Delta.$$

De même,

$$f'_{y_0} = 4v\Delta, \qquad f'_{z_0} = 4w\Delta.$$

En second lieu,

$$f(x_0, y_0, z_0) = \tfrac{1}{2}(x_0 f'_{x_0} + y_0 f'_{y_0} + z_0 f'_{z_0}) = 4\Delta\, F(u, v, w).$$

Il en résulte que l'équation du faisceau des tangentes issues de P est la suivante :

$$f(x, y, z)\, F(u, v, w) - \Delta(ux + vy + wz)^2 = 0.$$

Si l'on suppose $u = 0$, $v = 0$, $w = 1$, on obtient l'équation du faisceau des asymptotes.

Remarque. — L'identité $f(x_0, y_0, z_0) = 4\Delta\, F(u, v, w)$ montre que

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0)$$

a le même signe que $F(u, v, w)$; on retrouve ainsi la condition pour que le point x_0, y_0, z_0 soit extérieur à la conique f, savoir : $\Delta f_0 < 0$.

Autre méthode. — On peut poser

$$(1) \qquad \tfrac{1}{2}f'_{x_0} = \lambda u, \qquad \tfrac{1}{2}f'_{y_0} = \lambda v, \qquad \tfrac{1}{2}f'_{z_0} = \lambda w$$

et, par suite, le faisceau des tangentes issues de P a pour équation

$$(2) \qquad f(x, y, z) f(x_0, y_0, z_0) - \lambda^2(ux + vy + wz)^2 = 0.$$

Or

$$(3) \qquad ux_0 + vy_0 + wz_0 = \frac{1}{2\lambda}(x_0 f'_{x_0} + y_0 f'_{y_0} + z_0 f'_{z_0}) = \frac{1}{\lambda} f_0,$$

en posant $f(x_0, y_0, z_0) = f_0$.

L'élimination de x_0, y_0, z_0 entre les équations (1) et (3) donne immédiatement

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & \lambda u \\ B'' & A' & B & \lambda v \\ B' & B & A'' & \lambda w \\ u & v & w & \dfrac{f_0}{\lambda} \end{vmatrix} = 0.$$

On déduit de là, par un procédé bien connu : $\Delta f_0 = \lambda^2 F(u, v, w)$; donc, en éliminant λ^2 entre cette équation et l'équation (2), on obtient l'équation cherchée.

Pôles et polaires dans les courbes algébriques d'ordre quelconque.

422. Considérons deux points, $A(x_0, y_0, z_0)$ et $M(x, y, z)$, et une courbe C, algébrique et d'ordre m définie par l'équation $f(x, y, z) = 0$. Nous savons comment la détermination des points de rencontre de cette courbe avec la droite AM dépend de la résolution de l'équation

$$(1) \qquad f(x_0 + \lambda x, y_0 + \lambda y, z_0 + \lambda z) = 0.$$

On sait, en outre, que

$$\frac{1}{p!}(x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0})_p \equiv \frac{1}{(m-p)!}(x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z)_{m-p}.$$

En particulier,

$$\frac{1}{(m-1)!}(x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0})_{m-1} \equiv x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z.$$

En égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de λ dans l'équation (1), on obtient les équations de $m-1$ courbes qui ont reçu les noms de *courbes polaires du point* A et qui sont susceptibles de définitions géométriques. Ainsi, par exemple, l'équation

$$(x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0})_p = 0 \qquad \text{ou} \qquad (x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z)_{m-p} = 0$$

représente une courbe de degré p, qui a reçu le nom de $(m-p)^{\text{ième}}$ *polaire* de A par rapport à la courbe C. Nous savons que si λ_k est une racine de l'équation (1), le point P_k, qui a pour coordonnées $x_0 + \lambda_k x$, $y_0 + \lambda_k y$, $z_0 + \lambda_k z$, est l'un des m points communs à la courbe C et à la sécante AM,

en outre, λ_k est, à un facteur constant près $\left(\text{ce facteur est égal à } -\frac{z_0}{z}\right)$, égal au rapport $\frac{P_kA}{P_kM}$. Il en résulte que la $(m-p)^{\text{ième}}$ polaire, ou polaire de degré p, est le lieu des points M tels que la somme des produits $m-p$ à $m-p$ des racines de l'équation (1) soit nulle, c'est-à-dire le lieu des points M tels que la somme des produits $m-p$ à $m-p$ des rapports de division du segment AM par la courbe C soit nulle.

En particulier, la première polaire est le lieu des points M pour lesquels

$$\frac{P_1A}{P_1M}+\frac{P_2A}{P_2M}+\ldots+\frac{P_mA}{P_mM}=0.$$

$P_1, P_2, \ldots, P_m$ étant les points d'intersection de la sécante AM et de la courbe C, l'équation de cette première polaire, ou polaire principale du point $A(x_0, y_0, z_0)$, est

$$x_0f'_x+y_0f'_y+z_0f'_z=0.$$

La $(m-1)^{\text{ième}}$ polaire, ou polaire rectiligne de A est le lieu des points M pour lesquels la somme de produits $m-1$ à $m-1$ des rapports précédents est nulle; c'est donc, si l'on préfère, le lieu des points M pour lesquels la somme des inverses de ces rapports est nulle, de sorte que

$$\frac{P_1M}{P_1A}+\frac{P_2M}{P_2A}+\ldots+\frac{P_mM}{P_mA}=0.$$

Mais, en vertu de l'identité $PM+MA+AP=0$, on peut remplacer PM par $AM-AP$ et, par suite, écrire l'équation précédente sous la forme

$$\sum\frac{AM-AP}{AM.AP}=0$$

ou

$$\frac{m}{AM}=\frac{1}{AP_1}+\frac{1}{AP_2}+\ldots+\frac{1}{AP_m}.$$

On dit alors que le point M est le conjugué harmonique de A par rapport aux points d'intersection de AM et de la courbe C; on peut dire plus simplement que M est conjugué harmonique de A par rapport à la courbe C et définir *la polaire rectiligne de* A, *le lieu des conjugués harmoniques du point* A *par rapport à la courbe* C.

L'équation de la première polaire de A exprime que la polaire harmonique de M passe par le point A. Cette propriété est générale : la $(m-p)^{\text{ième}}$ polaire du point A est le lieu des points M dont la $p^{\text{ième}}$ polaire passe par A.

On voit encore aisément que la première polaire de A par rapport à sa première polaire est la seconde polaire de A par rapport à C; la $q^{\text{ième}}$ polaire de A par rapport à sa $p^{\text{ième}}$ polaire relative à C est sa $(p+q)^{\text{ième}}$ polaire par rapport à C. Remarquons encore, en particulier, que la première polaire de A par rapport à sa polaire conique relative à C est la polaire rectiligne de A relative à C.

EXERCICES.

1. Deux points a, b ont pour polaires, par rapport à une conique, deux droites A, B. Montrer que le rapport des segments déterminés par une droite C sur ab est avec le rapport des distances du pôle c de CD aux droites A, B dans un rapport constant.

2. Étant donnée une conique, par deux points A, B de cette courbe on fait passer un cercle variable qui la coupe en P et Q. Lieu du pôle de PQ : 1° par rapport à la conique, 2° par rapport au cercle variable.

3. Étant données les équations d'une conique et d'une droite D, on mène par un point fixe C une sécante qui coupe la conique en P et Q; lieu du point de rencontre des droites PB, QA, A et B étant les points de rencontre de la conique et de la droite D.

4. Étant données une conique C et une droite D qui ne la coupe pas, on prend sur D deux points conjugués M, M'. Il y a dans le plan deux points fixes d'où l'on voit MM' sous un angle droit. Déterminer ces deux points fixes et chercher leur lieu géométrique quand MM' se déplace parallèlement à elle-même.

5. Étant donnés un triangle et une conique, les droites qui joignent les pôles de chaque côté au sommet opposé sont concourantes.

6. Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une conique. Abaissons d'un point $M(x_0, y_0)$ du plan de cette conique MP perpendiculaire sur la polaire de M, P étant le pied de la perpendiculaire. Soient A et B les points de rencontre de MP avec les deux axes, B étant sur le petit axe s'il s'agit d'une ellipse, ou sur l'axe imaginaire s'il s'agit d'une hyperbole. Démontrer que

$$f(x_0, y_0) = k.\mathrm{MP}.\mathrm{MA} = k'.\mathrm{MP}.\mathrm{MB},$$

k et k' étant des constantes.

7. Les deux foyers F, F' de la conique et les points B, P sont sur un cercle (mêmes notations qu'au n° 6). Prouver que $f(x_0, y_0)$ est proportionnel à la puissance de M par rapport à ce cercle.

8. Étant donné un point P dans le plan d'une conique, trouver le lieu de M tel que sa polaire par rapport à la conique soit perpendiculaire à MP.

9. Trouver l'enveloppe des cordes d'une conique qui sont vues de leur pôle sous un angle constant.

10. Trouver le lieu des points dont les polaires par rapport à trois coniques données sont concourantes. Montrer que le point de concours des polaires est un point du lieu. Le lieu trouvé se nomme le *jacobien* du système des trois

coniques données. Si les trois coniques ont deux points communs, le jacobien se réduit à la droite qui les joint et à une conique qui passe par ces deux points. (*Voir* Salmon, t. I, p. 613 et suivantes, 2e édition de la traduction française des *Sections coniques.*)

11. Trouver les polaires d'un point par rapport à un système de trois droites. Construire géométriquement la polaire rectiligne.

12. Montrer que les diamètres conjugués égaux d'une ellipse constituent le lieu des points dont les polaires par rapport à cette ellipse et au système de ses axes de symétrie sont parallèles. Former l'équation du faisceau des diamètres conjugués égaux d'une ellipse rapportée à deux axes de coordonnées quelconques.

Théorème de Frégier.

423. *Toutes les cordes d'une conique vues sous un angle droit d'un point donné sur cette conique rencontrent la normale en ce point en un point fixe.* — L'équation de la conique donnée peut se mettre sous la forme

$$Ax^2 + Bxy + y^2 + Dx = 0,$$

en prenant pour axes de coordonnées la tangente et la normale au point donné. Soit $ux + vy - 1 = 0$ l'équation d'une corde MM′ (*fig.* 109). Le faisceau des droites OM, OM′ a pour équation

Fig. 109.

$$(1) \qquad Ax^2 + Bxy + y^2 + Dx(ux + vy) = 0.$$

La condition pour que l'angle MOM′ soit droit, savoir

$$(2) \qquad 1 + A + Du = 0,$$

exprime que MM′ rencontre l'axe des x, c'est-à-dire la normale en O, en un point fixe ayant pour abscisse $\dfrac{-D}{1+A}$.

Cas particulier. — Si la conique est une hyperbole équilatère : $1 + A = 0$, donc la corde MM′ est parallèle à la normale Ox. On peut remarquer que si OM et OM′ sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole équilatère, M et M′ sont à l'infini, d'où il suit que la corde MM′ est elle-même à l'infini et, comme le point fixe P est sur MM′, il est à l'infini. Réciproquement, si une conique circonscrite à un triangle rectangle est tangente à la hauteur issue du sommet de l'angle droit, cette conique est une hyperbole équilatère, car l'équation (2) donne $1 + A = 0$ quand on suppose $u = 0$. Nous avons ainsi obtenu ce cas particulier du théorème de Frégier :

Quand un triangle rectangle est inscrit à une hyperbole équilatère,

la normale à cette hyperbole au sommet de l'angle droit est parallèle à l'hypoténuse, et réciproquement.

Généralisation. — Cherchons la condition pour que la corde MM' passe par un point fixe (x_0, y_0), de sorte que

$$ux_0 + vy_0 - 1 = 0. \tag{3}$$

L'équation (1) fournit, entre les coefficients angulaires m, m' des droites OM, OM', les relations

$$m + m' + B + Dv = 0, \tag{4}$$

$$mm' - A - Du = 0. \tag{5}$$

La condition demandée s'obtient en éliminant u et v entre les équations (3), (4) et (5); ce qui donne

$$x_0 . mm' - y_0(m + m') - (Ax_0 + By_0 + D) = 0.$$

Il en résulte que les droites OM, OM' doivent former un faisceau involutif ou, ce qui revient au même, doivent avoir des directions conjuguées par rapport à une conique C dont les asymptotes ont des directions déterminées quand le point (x_0, y_0) est donné.

Si $y_0 = 0$, le produit mm' est constant; si, au contraire, $x_0 = 0$, c'est la somme $m + m'$ qui doit avoir une valeur constante.

Lorsque la droite MM' passe par un point fixe, son pôle décrit une droite fixe. Si l'angle MOM' est droit, la polaire du point de Frégier passe par les points communs (autres que O) à la conique donnée et au cercle de rayon nul ayant son centre au point O; car, en retranchant membre à membre les équations de la conique et de ce cercle, on obtient

$$(A - 1)x^2 + Bxy + Dx = 0,$$

équation qui se décompose en $x = 0$ et $(A - 1)x + By + D = 0$. Cette dernière représente bien la polaire du point P. On arrive à ce résultat en remarquant que les droites isotropes sont les rayons doubles de l'involution définie par les côtés de l'angle droit MOM'.

Dans le cas général, la polaire du point de Frégier est la corde commune à la conique donnée et aux parallèles aux asymptotes de la conique C, menées par le point O.

EXERCICES.

1. Trouver le lieu du point de Frégier relatif à chacun des points d'une conique donnée.

2. Trouver l'enveloppe de la polaire du point de Frégier dans les mêmes conditions.

CHAPITRE XVII.

COURBES POLAIRES RÉCIPROQUES.

---

424. Considérons une courbe plane quelconque C et une conique D tracée dans le même plan ; on peut déterminer l'enveloppe C′ des polaires des points de la courbe C par rapport à la conique directrice D ; je dis que, réciproquement, C est l'enveloppe des polaires des points de C′ par rapport à D.

En effet, soient m un point de C, M′ sa polaire ; p un point de C infiniment voisin de m, et P′ la polaire de p. Le point de rencontre des droites P′, M′ est le pôle de la droite mp. Si l'on suppose que p tende vers m, la droite mp a pour limite la tangente M en m à la courbe C ; le point (P′, M′) a pour limite le point de contact m' de la tangente M′ à la courbe C′. Il en résulte que m' est le pôle de M, ce qui démontre la proposition. Pour cette raison, les courbes C, C′ sont appelées *polaires réciproques*.

Étant donnée une figure F quelconque composée de points a, b, ... et de droites A, B, ..., on peut considérer la figure P′ formée par les droites A′, B′, ... polaires de a, b, ... et les points a', b', ... pôles de A, B, ... par rapport à la conique D ; ces figures sont nommées *polaires réciproques* ou *corrélatives*. A toute propriété de la première figure correspond une propriété de la seconde. Le passage d'une figure à l'autre constitue la *transformation par polaires réciproques*.

425. A des points a, b, c, d situés sur une droite L correspondent des droites A′, B′, C′, D′ passant par un point l' ; le rapport anharmonique de la division a, b, c, d est égal au rapport anharmonique du faisceau A′, B′, C′, D′. En effet, soient $P_1 = o$, $P_2 = o$ les équations des polaires des points a, b, nous avons vu que si $\frac{ca}{cb} = -\lambda$, $\frac{da}{db} = -\mu$, les polaires de c et de d ont pour équations, respectivement, $P_1 + \lambda P_2 = o$, $P_1 + \mu P_2 = o$; les rapports anharmoniques considérés sont tous deux égaux à $+\frac{\lambda}{\mu}$.

En particulier, si a, b, c, d est une division harmonique, le faisceau A′, B′, C′, D′ sera un faisceau harmonique. Si le point d s'éloigne à l'infini sur la droite L, la droite D′ s'obtiendra en joignant le point l' au centre de la conique directrice (ou en menant par l' une parallèle à l'axe de cette conique si c'est une parabole) ; le rapport $\frac{ca}{cb}$ est alors égal au rapport anharmonique (A′, B′, C′, D′).

Pour montrer une application, considérons un quadrilatère complet formé par quatre droites A, B, C, D; la figure corrélative sera formée par les quatre pôles a', b', c', d' de ces droites; cette figure se nomme un *quadrangle*. Chacune des diagonales du quadrilatère complet est coupée harmoniquement par les deux autres. On en conclut, par exemple, que si e' est le point de concours des droites $a'd'$, $b'c'$; f' le point de concours des droites $a'b'$, $c'd'$, et enfin g' le point de concours de $b'd'$ et $a'c'$, les droites $e'f'$, $c'g'$ sont conjuguées par rapport à $a'd'$ et $b'c'$. Au fond, cette propriété ne diffère pas de la précédente et le quadrangle donne la même figure qu'un quadrilatère complet.

426. *Relation entre le degré d'une courbe algébrique et la classe de sa polaire réciproque.* — La polaire réciproque d'une courbe algébrique est évidemment algébrique. Soient m, μ le degré et la classe de la courbe C, et m', μ' le degré et la classe de sa polaire C'. Le nombre des tangentes menées d'un point a à la courbe C est égal au nombre des points d'intersection de C' avec la polaire A' de a; donc $\mu = m'$ et pareillement $m = \mu'$.

Ainsi *la classe d'une courbe est égale au degré de sa polaire réciproque.*

Il en résulte immédiatement qu'une courbe de la seconde classe est une conique. En effet, si la courbe C est de la seconde classe, C' sera du second degré et, par suite, aussi de la seconde classe, d'où il résulte que C est du second degré. On voit en même temps, par ce raisonnement, que la polaire réciproque d'une conique est une conique.

Remarque. — Si $m = 2$, on a $m = m' = \mu = \mu' = 2$. C'est le seul cas dans lequel $\mu = m(m-1)$ et $\mu' = m'(m'-1)$.

En effet, s'il en est ainsi, on a $m = m'(m'-1)$ et $m' = m(m-1)$; donc, m et m' étant différents de zéro,

$$1 = (m-1)(m'-1)$$

et, comme $m-1$ et $m'-1$ sont des entiers, il faut que $m-1 = m'-1 = 1$ et, par suite, $m = m' = 2$.

De là résulte cette conclusion : si une courbe C de degré supérieur à 2 n'a aucun point multiple, sa polaire réciproque en a nécessairement. Il en résulte que la courbe C a des tangentes multiples, c'est-à-dire des droites qui sont tangentes en plusieurs points. En effet, supposons que a' soit un point double de C' avec tangentes distinctes B', C'; la droite A sera tangente à C' aux deux points b, c pôles de B', C'.

427. *Former l'équation de la polaire réciproque de la conique* C *par rapport à une conique* D. — Soit $\theta(x, y) = 0$ l'équation de la conique D; on aura l'équation de la polaire réciproque C' de la conique C, en exprimant que la polaire du point (x, y, z) est tangente à la conique C et, par suite, si $F(u, v, w) = 0$ est l'équation tangentielle de C, l'équation cherchée est

$$F(\theta'_x, \theta'_y, \theta'_z) = 0.$$

Discussion. — Supposons d'abord que D soit une conique à centre et rapportons cette conique à ses deux axes de symétrie, de sorte que

$$\theta(x, y) \equiv px^2 + qy^2 + 1,$$

l'équation cartésienne de C′ sera

$$ap^2x^2 + 2b''pqxy + a'q^2y^2 + \ldots = 0,$$

le discriminant des termes du second degré a le signe de $aa' - b''^2$, c'est-à-dire de $A''\Delta$. Or la condition pour que l'origine soit extérieure à la conique C étant $A''\Delta < 0$, on voit que C′ sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que le centre de D sera intérieur ou extérieur à C ou sur cette conique.

Ce résultat s'obtient par la Géométrie. En effet, pour que le pôle d'une tangente à la conique C soit à l'infini, il faut et il suffit que cette tangente passe par le centre de D. La conique C′ a donc autant de points à l'infini qu'on peut mener à C de tangentes par le centre de D. Soit A une tangente à C passant par le centre de D, et soit a son point de contact. Le pôle a' de A est à l'infini dans la direction conjuguée de A par rapport à D et l'asymptote correspondante est la droite A′, polaire de a. Il en résulte que le centre de C′ est le pôle, par rapport à D, de la polaire du centre de D, par rapport à C. Ce raisonnement suppose que C′ soit une hyperbole; mais la vérification par le calcul n'offrirait pas de difficulté et d'ailleurs le calcul devant réussir *a priori* quand C′ est une hyperbole, il est évident qu'il réussira aussi si C′ est une ellipse, puisque le signe du discriminant des termes du second degré relatifs à C′ n'intervient pas dans ce calcul.

Supposons en second lieu que D soit une parabole et rapportons-la à son axe et à la tangente au sommet, en posant $\theta(x, y) \equiv y^2 - 2px$. L'équation de C′ est, dans ce cas,

$$a''p^2x^2 - 2bpxy + a'y^2 + \ldots = 0;$$

le genre de C′ dépend du signe de $a'a'' - b^2$ ou $A\Delta$. On voit d'abord que, si l'on suppose $a'' = 0$, c'est-à-dire si C est une parabole, C′ sera une hyperbole, à moins que l'axe de C ne soit parallèle à celui de la parabole D, car dans ce cas $A = 0$ et, par suite, C′ est aussi une parabole ayant même direction d'axe. Supposons en second lieu $a'' \neq 0$; C est une conique à centre.

La condition pour qu'on puisse mener à cette conique deux tangentes parallèles à l'axe des x est $A\Delta < 0$. Donc C′ sera : une ellipse si l'on ne peut mener aucune tangente à C qui soit parallèle à l'axe de D; une hyperbole si l'on peut lui en mener deux (par exemple, si C est une ellipse); une parabole si l'on n'en peut mener qu'une ($A = 0$).

La discussion géométrique n'offre aucune difficulté.

428. *Cas où la conique directrice est un cercle* D. — Dans ce cas, l'angle de deux droites est égal à l'angle des rayons du cercle D qui passent par les pôles de ces droites. Voici une application de cette remarque. Transformons

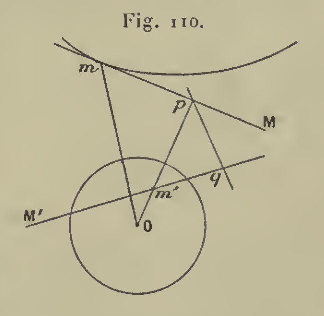
ce théorème : les bissectrices d'un triangle se coupent en un même point; deux bissectrices extérieures et une bissectrice intérieure sont également concourantes. Prenant pour conique directrice D un cercle, on obtient ce théorème : Joignons un point O aux sommets a, b, c d'un triangle et traçons les bissectrices des angles ainsi formés. Trois de ces bissectrices, convenablement choisies, rencontrent les côtés qui leur correspondent en trois points situés en ligne droite.

La polaire réciproque d'un cercle C par rapport à un cercle D est une conique ayant un foyer au centre O du cercle D, la directrice correspondante étant la polaire Ω' du centre ω de C par rapport à D. En effet, soit M une tangente au cercle C et soit m' le pôle de M; si l'on nomme ρ et δ les distances de m' au centre O et à la droite Ω', on a, en vertu du théorème de Salmon, d désignant la distance des centres de C et D, $\frac{\rho}{\delta} = \frac{d}{r}$, ce qui prouve que le rapport $\frac{\rho}{\delta}$ est constant; le lieu de m' est donc une conique ayant un foyer en O et pour excentricité $\frac{d}{r}$; ce sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que le centre O de D sera intérieur, extérieur au cercle C ou sur ce cercle.

Réciproquement, la polaire d'une conique par rapport à un cercle ayant son centre en un foyer de la conique est un cercle dont le centre est le pôle de la directrice. La démonstration se fait comme celle de la proposition directe.

429. Considérons une courbe quelconque C et la tangente M en un de ses points m (*fig.* 110). Soit p le pied de la perpendiculaire abaissée sur M, du centre O d'un cercle D de rayon R; le pôle m' de M est situé sur Op et défini par la condition $Om'.Op = R^2$. Il en résulte que la *polaire réciproque* de C par rapport à D est l'*inverse de la podaire* de C, le cercle d'inversion étant le cercle D lui-même. La tangente en m' à la polaire réciproque C' est la droite M', menée par m' et perpendiculaire à Om. On sait que les tangentes en p et m' aux deux courbes inverses décrites par ces points forment un triangle isoscèle pqm' ayant pour base pm'. Il en résulte que la tangente en p à la podaire de C est la tangente au cercle circonscrit au triangle Omp, car les angles $\widehat{Opq}$ et $\widehat{Omp}$ sont égaux. On retrouve ainsi la construction de la tangente à une podaire.

Fig. 110.



EXERCICES.

1. Transformer par polaires réciproques les théorèmes suivants :

La polaire d'un point par rapport à un angle est une droite passant par le sommet.

Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Le lieu des sommets d'un angle droit circonscrit à une conique à centre est un cercle. En prenant pour conique directrice un cercle concentrique, on retrouve cette propriété : la somme des inverses des carrés de deux diamètres rectangulaires est constante.

Le théorème de Desargues [triangles homologiques (155)].

Les trois côtés d'un triangle tournent autour de trois points fixes et deux des sommets glissent sur deux droites fixes; le troisième sommet décrit une conique.

Si la polaire de a par rapport à une conique passe par a', a et a' sont conjugués par rapport à cette conique.

Les axes radicaux de deux cercles pris deux à deux se coupent en un même point.

Quand deux sommets d'un triangle circonscrit à une conique glissent sur deux droites fixes, le troisième sommet décrit une conique ayant un double contact avec la conique donnée.

Dans une conique, le produit des segments qu'une tangente quelconque détermine sur deux tangentes fixes et parallèles est constant. — On prendra pour conique directrice une parabole.

2. Trouver un cercle par rapport auquel la cissoïde de Dioclès

$$x(x^2+y^2)-ay^2=0$$

se transforme en elle-même, par polaires réciproques. (G. Fouret.)

3. Étant donnés deux triangles de référence et en désignant par x, y, z; α, β, γ respectivement les coordonnées de deux points variables rapportées à ces triangles, à une droite D ayant pour équations $ux+vy+wz=0$, on peut faire correspondre le point $d'(\alpha, \beta, \gamma)$, tel que $\frac{\alpha}{u}=\frac{\beta}{v}=\frac{\gamma}{w}$. Si un point (x', y', z') décrit la droite D, la droite $\alpha x'+\beta y'+\gamma z'=0$ passe par le point d'. Chasles nomme ce point d' le pôle de la droite D. Montrer que, si ce point décrit une courbe d'ordre m, la droite D enveloppe une courbe de classe m.

4. Transformer par polaires réciproques les théorèmes suivants, en prenant pour conique directrice D, un cercle :

Les diamètres d'un cercle sont vus sous un angle droit d'un point a de ce cercle; on placera le centre de D au point a.

La tangente à un cercle est perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui passe par le point de contact.

La droite qui joint le pôle d'une droite par rapport à un cercle, au centre de ce cercle, est perpendiculaire à cette droite.

Le diamètre qui passe par le point de concours de deux tangentes à un cercle est la bissectrice de l'un des angles formés par ces tangentes.

Le lieu des points dont les polaires par rapport à trois cercles sont concourantes est le cercle orthotomique.

Le lieu des sommets des angles droits concourants à une conique est le cercle de Monge.

La somme des distances d'un point donné aux côtés d'un polygone régulier reste la même si le polygone tourne autour de son centre; on place le centre de D au point donné.

L'enveloppe d'une corde d'un cercle de longueur constante est un cercle concentrique au premier.

Le lieu du pôle d'une corde d'un cercle ayant une longueur constante est un cercle concentrique au premier.

5. Transformer deux cercles de manière que les coniques obtenues aient leurs foyers communs.

6. Transformer l'exercice 10 du Chapitre précédent.

Équations tangentielles relatives aux coniques.

430. Il y a une relation simple entre les courbes C, C′ définies respectivement par les équations $f(x, y, z) = 0$ et $f(u, v, w) = 0$, c'est-à-dire par une même équation homogène dont les variables désignent des coordonnées ponctuelles (courbe C) ou des coordonnées tangentielles (courbe C′). Prenons pour conique directrice la conique imaginaire D ayant pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

On voit (427) que la polaire réciproque de C′ par rapport à D a pour équation $f(x, y, z) = 0$ et par conséquent les courbes C et C′ sont polaires réciproques par rapport à D.

On peut encore obtenir un résultat simple avec une conique réelle D_1 ayant pour équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Dans ce cas, la polaire réciproque de C′ a

pour équation $f(x, y, -z) = 0$ et, par suite, si les coordonnées ponctuelles sont des coordonnées cartésiennes, C est symétrique, par rapport au centre de D_1, de la polaire réciproque de C'. Ces remarques permettent d'interpréter immédiatement toute relation entre des coordonnées tangentielles.

431. Toute équation du premier degré de la forme $au + bv + cw = 0$ représente un point. On le voit en appliquant la remarque précédente; mais on voit directement que cette équation exprime que la droite ayant pour équation ponctuelle $ux + vy + wz = 0$ passe par le point (a, b, c). On voit aussi que toute équation du premier degré représente un point en coordonnées tangentielles. En particulier, l'équation de l'origine des coordonnées ou du point $(x = 0, y = 0)$ est $w = 0$.

432. Si (u', v', w') et (u'', v'', w'') sont les coordonnées tangentielles de deux droites Δ', Δ'', toute droite Δ passant par le point commun à ces deux droites a pour coordonnées $u' + \lambda u''$, $v' + \lambda v''$, $w' + \lambda w''$ et réciproquement. Les coordonnées ponctuelles du point de concours des droites Δ', Δ'' sont : $v'w'' - w'v''$, $w'u'' - u'w''$, $u'v'' - v'u''$.

Si l'on suppose $w' = w'' = 1$, ces expressions deviennent $v' - v''$, $u'' - u'$, $u'v'' - v'u''$. On peut donc dire que les coordonnées homogènes du point de concours des droites (u', v') et (u'', v'') sont proportionnelles aux nombres $-\frac{\Delta v'}{\Delta u'}$, 1, $u'\frac{\Delta v'}{\Delta u'} - v'$.

Il en résulte que le point de contact de la tangente (u', v') à la courbe définie par l'équation tangentielle $f(u, v, 1) = 0$, a pour coordonnées

$$f'_{u'}(u', v' 1),\quad f'_{v'}(u', v', 1),\quad -[u'f'_{u'}(u', v', 1) + v'f'_{v'}(u', v', 1)],$$

ou

$$f'_{u'}(u', v', w'),\quad f'_{v'}(u', v', w'),\quad f'_{w'}(u', v', w').$$

Ce résultat nous a déjà été fourni par la théorie des enveloppes.

433. *Trouver l'équation tangentielle des points d'intersection d'une droite* $D_0(u_0, v_0, w_0)$ *avec la conique ayant pour équation tangentielle*

$$F(u, v, w) = 0.$$

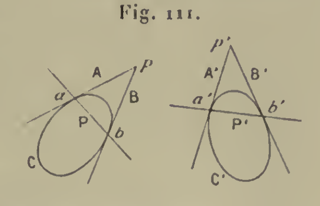
Une droite quelconque D ayant pour coordonnées u, v, w, les coordonnées d'une droite D' passant par le point de concours de D_0 et D' seront $u_0 + \lambda u$, $v_0 + \lambda v$, $w_0 + \lambda w$ et, par suite, D' sera tangente à la conique donnée si λ est racine de l'équation $F(u_0 + \lambda u, v_0 + \lambda v, w_0 + \lambda w) = 0$. Pour que le point commun aux droites D et D_0 soit sur cette conique, il faut et il suffit que les racines de cette équation soient égales, ce qui donne l'équation cherchée

$$4F(u, v, w).F(u_0, v_0, w_0) - (u_0 F'_u + v_0 F'_v + w_0 F'_w)^2 = 0.$$

On vérifie aisément le résultat que nous venons d'obtenir en remarquant que, si les coordonnées ponctuelles d'un point p sont u_0, v_0, w_0, l'équation

précédente définit, en coordonnées ponctuelles, le faisceau des tangentes issues de p, à la conique ayant pour équation ponctuelle $F(u, v, w) = 0$. Or, si l'on transforme par polaires réciproques la figure formée par les tangentes A, B à la conique C, issues du point p, leurs points de contact étant a, b et la polaire de p la droite P, on obtient une figure de même nature. Les lettres placées sur la *fig.* 111 expliquent suffisamment la correspondance établie entre les éléments transformés.

Fig. 111.



434. *Trouver le centre, les axes, les asymptotes d'une conique définie par son équation tangentielle* $F(u, v, w) = 0$; *trouver la polaire d'un point* (a, b, c). — Supposons que l'équation d'une droite étant

$$ux + vy + wz = 0,$$

les coordonnées cartésiennes soient $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$; en d'autres termes, supposons que la droite de l'infini ait pour équation $z = 0$. Le centre d'une conique est un point tel que le pôle de toute droite qui y passe est à l'infini; il en résulte que l'*équation* du centre est $F'_w = 0$, c'est-à-dire

$$b'u + bv + a''w = 0.$$

Donc, les coordonnées ponctuelles du centre sont b', b, a''; résultat connu. On arrive encore à ce résultat en cherchant le pôle de la droite de l'infini qui a pour coordonnées 0, 0, 1. Rappelons que $a'' = 0$ exprime que la conique est une parabole, pourvu toutefois que le discriminant de $F(u, v, w)$ soit différent de zéro.

Plus généralement, si la droite de l'infini a pour équation $r\alpha + r'\beta + r''\gamma = 0$ et que l'équation d'une droite quelconque soit $u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$, l'équation du centre est $rF'_u + r'F'_v + r'F'_w = 0$.

Pour déterminer les *axes*, nous remarquerons qu'un axe est un diamètre perpendiculaire à la direction dans laquelle son pôle est à l'infini. Soient u, v, w les cordonnées d'un axe. Le pôle de cette droite est à l'infini; par suite,

$$b'u + bv + a''w = 0. \tag{1}$$

Les coordonnées ponctuelles du pôle sont F'_u, F'_v, 0; donc, si θ désigne l'angle des axes de coordonnées cartésiennes,

$$\frac{F'_u + F'_v \cos\theta}{u} = \frac{F'_v + F'_u \cos\theta}{v}. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) définissent les axes.

Les asymptotes sont les tangentes issues du centre; elles sont donc définies

par le système

$$au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0.$$
$$b'u + bv + a''w = 0.$$

Les directions des asymptotes sont donc fournies par l'équation obtenue en éliminant w,

$$(3) \qquad (aa' - b'^2)u^2 + 2(a''b'' - bb')uv + (a'a'' - b^2)v^2 = 0;$$

elles sont réelles et distinctes quand on suppose

$$(a''b'' - bb')^2 - (aa'' - b'^2)(a'a'' - b^2) > 0.$$

Cette inégalité ne diffère pas de celle-ci, déjà connue : $\delta > 0$.

Quand les axes de coordonnées sont rectangulaires, l'équation $F(u, v, w) = 0$ représente un cercle si les asymptotes sont isotropes, c'est-à-dire si l'équation (3) est vérifiée quand on suppose $u = i$, $v = 1$ et $u = -i$, $v = 1$, ce qui donne les conditions $a''b'' - bb' = 0$, $aa'' - b'^2 = a'a'' - b^2$; c'est-à-dire $B'' = 0$, $A = A'$.

Le pôle de la droite (u, v, w) a pour coordonnées F'_u, F'_v, F'_w; il en résulte que l'on déterminera les coordonnées u, v, w de la polaire du point (a, b, c) au moyen des équations $\frac{F'_u}{a} = \frac{F'_v}{b} = \frac{F'_w}{c}$; en particulier, la polaire du point $(0, 0, 1)$ est déterminée par les équations $F'_u = 0$, $F'_v = 0$.

EXERCICES.

1. Le premier membre de l'équation tangentielle d'une conique est un invariant. Il en résulte que, si l'on forme l'équation tangentielle d'une conique ayant pour équation ponctuelle $f(x, y) + \lambda g(x, y) = 0$, le coefficient de λ sera un invariant simultané. Montrer qu'en égalant cet invariant à zéro, on obtient la condition nécessaire et suffisante pour que la droite $ux + vy + wz = 0$ coupe la conique f et la conique g en quatre points conjugués. En déduire que l'enveloppe d'une pareille droite est une conique dont on connaît huit tangentes.

2. Transformer la proposition précédente par polaires réciproques.

3. Au lieu de représenter une droite par l'équation $ux + vy - 1 = 0$, on peut la représenter par $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0$. Une équation de la forme $f(p, q) = 0$ détermine une courbe. Former l'équation relative à une conique. Cas où la conique est tangente aux axes.

4. On peut déterminer une droite en donnant les distances p, q à deux points fixes o, o', pris sur deux droites Δ, Δ' concourantes ou non, des traces

de cette droite sur les droites Δ, Δ' respectivement. Interpréter une équation algébrique $f(p, q) = 0$.

5. Discuter l'équation générale tangentielle du second ordre par la résolution de l'équation par rapport à l'une des variables ou par la décomposition en carrés.

6. Déterminer les longueurs des axes d'une conique à centre définie par son équation tangentielle.

7. Même question pour le paramètre d'une parabole.

8. Résoudre le problème du n° 366 au moyen de l'équation tangentielle de la conique donnée.

9. Déterminer la distance de deux points représentés par une équation du second degré $f(u, v, w) = 0$.

10. Former l'équation du cercle admettant pour diamètre la droite joignant les deux points représentés par l'équation $f(u, v, w) = 0$.

11. Discuter la nature des coniques représentées par l'équation

$$u^2 + 2v^2 - (\lambda^2 - 1)w^2 - 2\lambda vw + 2uw - 3\lambda uv = 0$$

quand le paramètre λ varie.

12. Deux triangles polaires réciproques par rapport à une conique sont homologiques et réciproquement.

13. Trouver l'équation tangentielle des coniques ayant pour centre le point x_0, y_0 et pour diamètres conjugués deux droites de coefficients angulaires m, m'.

14. Étant donnés deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$; par les points A, B, C on mène les droites respectivement conjuguées de B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 par rapport à une conique. Si ces droites passent par un même point, les droites passant par A_1, B_1, C_1 et respectivement conjuguées de BC, CA, AB se coupent aussi au même point. Cas où la conique se réduit aux deux points cycliques.

15. Équation tangentielle générale des coniques ayant pour centre le point x_0, y_0.

16. Étant donnée l'équation tangentielle d'une ellipse, trouver l'équation de l'ensemble des deux diamètres conjugués égaux.

Les exercices de 9 à 16 sont empruntés aux *Leçons sur les coordonnées tangentielles* de M. G. Papelier.

CHAPITRE XVIII.

CONIQUES PASSANT PAR DES POINTS DONNÉS OU TANGENTES A DES DROITES DONNÉES.

---

435. *Équation générale des coniques circonscrites à un triangle donné.* — Soient

$$ax + by + cz = 0, \qquad a'x + b'y + c'z = 0, \qquad a''x + b''y + c''z = 0$$

les équations des trois côtés d'un triangle, x, y, z désignant des coordonnées homogènes; si l'on pose

$$ax + by + cz = \alpha, \qquad a'x + b'y + c'z = \beta, \qquad a''x + b''y + c''z = \gamma,$$

on peut exprimer x, y, z en fonction linéaire et homogène de α, β, γ et, par suite, l'équation d'une conique quelconque pourra se mettre sous la forme

$$(1) \qquad A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + 2B\beta\gamma + 2B'\gamma\alpha + 2B''\alpha\beta = 0,$$

et, réciproquement, une équation de cette forme représente une courbe du second degré.

Pour que l'équation (1) représente une courbe passant par A, il faut et il suffit qu'elle soit vérifiée quand on pose $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\alpha \neq 0$; ce qui donne la condition $A = 0$. Pareillement, $A' = 0$ exprime que la conique passe par le sommet B, et $A'' = 0$ qu'elle passe par le sommet C. L'équation d'une conique circonscrite au triangle ABC est donc de la forme

$$(2) \qquad B\beta\gamma + B'\gamma\alpha + B''\alpha\beta = 0.$$

Réciproquement, toute équation de cette forme représente une courbe du second degré passant par les sommets du triangle donné. On voit, en outre, que cette équation ne se décompose en deux

équations du premier degré que si l'un des coefficients B, B′ ou B″ est nul.

L'équation tangentielle, c'est-à-dire la condition pour que l'équation

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$$

représente une tangente à cette conique est

$$(3) \qquad B^2u^2 + B'^2v^2 + B''^2w^2 - 2B'B''vw - 2B''Bwu - 2BB'uv = 0.$$

436. C'est d'ailleurs ce que l'on peut établir par une autre méthode qu'il est bon de connaître. En effet, cherchons d'abord l'équation de la droite passant par deux points $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ appartenant à la conique. Cette équation est

$$\alpha(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + \beta(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') + \gamma(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') = 0.$$

Mais, par hypothèse,

$$B\beta'\gamma' + B'\gamma'\alpha' + B''\alpha'\beta' = 0, \qquad B\beta''\gamma'' + B'\gamma''\alpha'' + B''\alpha''\beta'' = 0;$$

donc

$$\frac{B}{\alpha'\alpha''(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')} = \frac{B'}{\beta'\beta''(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')} = \frac{B''}{\gamma'\gamma''(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')},$$

d'où il résulte que l'équation de la corde considérée est

$$\frac{B\alpha}{\alpha'\alpha''} + \frac{B'\beta}{\beta'\beta''} + \frac{B''\gamma}{\gamma'\gamma''} = 0$$

et, par conséquent, la tangente au point $(\alpha', \beta', \gamma')$ a pour équation

$$\frac{B\alpha}{\alpha'^2} + \frac{B'\beta}{\beta'^2} + \frac{B''\gamma}{\gamma'^2} = 0.$$

Cela posé, si l'on identifie cette équation avec celle-ci :

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0,$$

on obtient

$$\frac{u\alpha'^2}{B} = \frac{v\beta'^2}{B'} = \frac{w\gamma'^2}{B''}.$$

Les coordonnées du point de contact sont donc proportionnelles à $\sqrt{\frac{B}{u}}$, $\sqrt{\frac{B'}{v}}$, $\sqrt{\frac{B''}{w}}$ et, par suite, l'équation tangentielle est

$$\sqrt{Bu} + \sqrt{B'v} + \sqrt{B''w} = 0.$$

En rendant cette équation rationnelle, on retrouve l'équation (3).

437. *Équation générale des coniques inscrites à un triangle donné.* — Le triangle donné étant pris pour triangle de référence, l'équation tangentielle d'une conique quelconque est de la forme

$$au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0.$$

Pour que le côté $\alpha = 0$ soit tangent à la conique, il faut et il suffit que l'équation précédente soit vérifiée quand $v = 0$, $w = 0$, $u \neq 0$; donc $a = 0$ exprime la condition pour que la conique soit tangente au côté BC et de même pour les autres côtés; il en résulte que l'équation d'une conique inscrite au triangle donné est de la forme

$$(4) \qquad bvw + b'wu + b''uv = 0,$$

et réciproquement.

L'équation tangentielle étant connue, on en déduit l'équation ponctuelle

$$(5) \qquad b^2\alpha^2 + b'^2\beta^2 + b''^2\gamma^2 - 2bb'\alpha\beta - 2b'b''\beta\gamma - 2b''b\gamma\alpha = 0.$$

438. On peut arriver directement à cette équation. En posant $\alpha = 0$, l'équation (1) donne

$$A'\beta^2 + A''\gamma^2 + 2B\beta\gamma = 0;$$

c'est l'équation du faisceau des droites joignant le sommet A aux points d'intersection du côté BC et de la conique représentée par l'équation (1). Pour que la conique soit tangente au côté BC, il faut que ce faisceau soit composé de deux droites confondues en une seule, ce qui donne la condition

$$A'A'' = B^2.$$

De même, on doit avoir

$$A''A = B'^2, \qquad AA' = B''^2.$$

On ne peut supposer $B = 0$, car on en déduirait $A'A'' = 0$; soit, par exemple, $A'' = 0$; cette équation entraîne $B' = 0$; l'équation (1) se réduit, dans ce cas, à la suivante :

$$A\alpha^2 + A'\beta^2 + 2B''\alpha\beta = 0.$$

Écartant cette hypothèse, on déduit des équations précédentes

$A^2A'^2A''^2 = B^2B'^2B''^2$; donc, $AA'A'' = \varepsilon BB'B''$ et, par suite,

$$A = \varepsilon\frac{B'B''}{B}, \qquad A' = \varepsilon\frac{BB''}{B'}, \qquad A'' = \varepsilon\frac{BB'}{B''},$$

de sorte que l'équation de la conique est de la forme

$$\varepsilon\left(\frac{\alpha^2}{B^2} + \frac{\alpha'^2}{B'^2} + \frac{\alpha''^2}{B''^2}\right) + 2\frac{\beta\gamma}{B'B''} + 2\frac{\gamma\alpha}{B''B} + 2\frac{\alpha\beta}{BB'} = 0.$$

En rejetant l'hypothèse $\varepsilon = +1$ qui correspond à un carré parfait et en posant $\frac{1}{B} = b$, $\frac{1}{B'} = b'$, $\frac{1}{B''} = b''$, on retrouve l'équation déjà obtenue.

439. *Remarque.* — L'équation (5) peut prendre une forme remarquable. En effet, on peut d'abord l'écrire ainsi :

(6) $$(b\alpha - b'\beta - b''\gamma)^2 - 4b'b''\beta\gamma = 0,$$

d'où

$$b\alpha = b'\beta + b''\gamma + 2\sqrt{b'b''\beta\gamma};$$

ou encore

$$b\alpha = (\sqrt{b'\beta} + \sqrt{b''\gamma})^2,$$

ou enfin

(7) $$\sqrt{b\alpha} + \sqrt{b'\beta} + \sqrt{b''\gamma} = 0,$$

les radicaux étant pris d'ailleurs avec des signes quelconques.

Les coefficients b, b', b'' étant supposés réels, l'équation (6) montre que, pour tout point réel de la conique représentée par l'équation (5), on a $b'\beta . b''\gamma > 0$. On trouverait de même $b\alpha . b'\beta > 0$; donc $b\alpha$, $b'\beta$, $b''\gamma$ sont de même signe.

Cela étant, l'équation (7) équivaut à quatre équations :

$$+\sqrt{b\alpha} + \sqrt{b'\beta} + \sqrt{b''\gamma} = 0,$$
$$-\sqrt{b\alpha} + \sqrt{b'\beta} + \sqrt{b''\gamma} = 0,$$
$$+\sqrt{b\alpha} - \sqrt{b'\beta} + \sqrt{b''\gamma} = 0,$$
$$+\sqrt{b\alpha} + \sqrt{b'\beta} - \sqrt{b''\gamma} = 0.$$

Il est évident que la première équation ne peut convenir à aucun point réel de la conique. Chacune des trois autres ne convient qu'à une portion déterminée de cette conique. Supposons, pour simplifier, que α, β, γ représentent des coordonnées normales. On peut toujours supposer chacune des quantités $b\alpha$, $b'\beta$, $b''\gamma$ positive. La seconde équation, par exemple, ne conviendra qu'aux points pour lesquels on a

$$\sqrt{b\alpha} - \sqrt{b'\beta} > 0 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{b\alpha} - \sqrt{b''\gamma} > 0,$$

c'est-à-dire

$$b\alpha - b'\beta > 0 \quad \text{et} \quad b\alpha - b''\gamma > 0.$$

Or, si la conique touche les côtés du triangle de référence aux points A', B', C' respectivement, ces deux équations sont celles des droites CC' et BB'; on pourra donc déterminer dans quelles régions se trouve l'arc représenté par l'équation considérée.

On peut d'ailleurs raisonner de la manière suivante. Supposons que la conique soit une ellipse, et supposons l'origine des coordonnées cartésiennes à l'intérieur du triangle A'B'C' (*fig.* 112).

Appelons α', β', γ' les distances d'un point aux côtés du triangle A'B'C'. La conique étant circonscrite au triangle A'B'C', son équation est de la forme

Fig. 112.

$$\frac{B}{\alpha'} + \frac{B'}{\beta'} + \frac{B''}{\gamma'} = 0,$$

mais elle est tangente en B' et C' aux côtés AC et AB; donc son équation est de la forme

$$\alpha'^2 = h.\beta\gamma,$$

h étant une constante (392) et, comme à l'intérieur du triangle ABC, α, β, γ ont le même signe, on doit supposer $h > 0$; nous écrirons donc

$$\alpha'^2 = k^2\beta\gamma.$$

De même, on a

$$\beta'^2 = l^2\gamma\alpha \quad \text{et} \quad \gamma'^2 = m^2.\alpha\beta.$$

Supposons qu'il s'agisse d'un point appartenant à l'arc C'MB'; pour ce point, il faudra supposer, par exemple, $\alpha' < 0$ et $\beta' > 0$, $\gamma' > 0$ et, par suite, on devra poser $\alpha' = -k\sqrt{\beta\gamma}$, $\beta' = +l\sqrt{\beta\gamma}$, $\gamma' = +m\sqrt{\gamma\alpha}$, k, l, m étant des nombres positifs; donc, en supposant les constantes B, B', B'' déterminées, l'équation de l'arc B'MC' sera

$$-\frac{B}{k\sqrt{\beta\gamma}} + \frac{B'}{l\sqrt{\gamma\alpha}} + \frac{B''}{m\sqrt{\alpha\beta}} = 0$$

ou

$$-\frac{B\sqrt{\alpha}}{k} + \frac{B'\sqrt{\beta}}{l} + \frac{B''\sqrt{\gamma}}{m} = 0.$$

440. *Équation de la droite passant par deux points* $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ *de la conique représentée par l'équation* (7). — La droite considérée a pour équation

$$\alpha(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + \beta(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') + \gamma(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') = 0.$$

Mais on suppose

$$\sqrt{b\alpha'} + \sqrt{b'\beta'} + \sqrt{b''\gamma'} = 0, \qquad \sqrt{b\alpha''} + \sqrt{b'\beta''} + \sqrt{b''\gamma''} = 0;$$

donc

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{\beta'\gamma''}-\sqrt{\gamma'\beta''}}=\frac{\sqrt{b'}}{\sqrt{\gamma'\alpha''}-\sqrt{\alpha'\gamma''}}=\frac{\sqrt{b''}}{\sqrt{\alpha'\beta''}-\sqrt{\beta'\alpha''}};$$

l'équation de la corde demandée est, par suite,

$$\alpha\sqrt{b}\left[\sqrt{\beta'\gamma''}+\sqrt{\gamma'\beta''}\right]+\beta\sqrt{b'}\left[\sqrt{\gamma'\alpha''}+\sqrt{\alpha'\gamma''}\right]+\gamma\sqrt{b''}\left[\sqrt{\alpha'\beta''}+\sqrt{\beta'\alpha''}\right]=0.$$

Il en résulte que la tangente au point $(\alpha', \beta', \gamma')$ a pour équation

$$\alpha\sqrt{\frac{b}{\alpha'}}+\beta\sqrt{\frac{b'}{\beta'}}+\gamma\sqrt{\frac{b''}{\gamma'}}=0.$$

Théorème fondamental.

441. Théorème. — *Par cinq points, on peut faire passer une conique et une seule, pourvu que trois au plus de ces points soient en ligne droite.*

Remarquons tout d'abord que si les cinq points sont sur une même droite Δ, tout système de deux droites dont l'une est la droite Δ constitue une conique passant par les cinq points donnés. En second lieu, si quatre seulement des points sont sur une ligne droite Δ ne passant pas par le cinquième point E, la droite Δ et une droite Δ', assujettie à passer par E, mais ayant une direction arbitraire, forment une conique passant par les cinq points donnés. Dans le premier cas, l'équation des coniques satisfaisant à la question sera de la forme

$$P(ax+by+cz)=0,$$

$P=0$ étant l'équation de Δ et a, b, c trois coefficients arbitraires, de sorte que l'équation renfermera deux paramètres arbitraires; dans le second cas, l'équation sera de la forme

$$P[y-y_0-m(x-x_0)]=0$$

et ne renfermera plus qu'un seul paramètre.

Enfin, si trois points seulement A, B, C sont sur Δ, la conique cherchée est évidemment déterminée et se compose de la droite Δ et de la droite Δ' qui passe par les deux autres points D, E.

En laissant de côté le premier cas, dans lequel les cinq points

donnés sont en ligne droite, nous pouvons toujours choisir trois des points donnés formant un triangle ayant ces points pour sommets. Supposons que les points A, B, C satisfassent à cette condition et prenons le triangle ABC pour triangle de référence. En désignant par $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ les équations des trois côtés de ce triangle, l'équation générale des coniques circonscrites au triangle ABC est

$$A\beta\gamma + B\gamma\alpha + C\alpha\beta = 0.$$

Exprimons maintenant que la courbe représentée par cette équation passe par le point $D(\alpha', \beta', \gamma')$ et par le point $E(\alpha'', \beta'', \gamma'')$; nous aurons, pour déterminer A, B, C, les deux équations homogènes

$$A\beta'\gamma' + B\gamma'\alpha' + C\alpha'\beta' = 0, \qquad A\beta''\gamma'' + B\gamma''\alpha'' + C\alpha''\beta'' = 0.$$

Si le point D est sur l'un des côtés, par exemple sur BC, on a $\alpha' = 0$; la première équation se réduit à $A = 0$ et, par suite, la conique demandée se compose de deux droites.

Supposons les six coordonnées des points D, E différentes de zéro; alors les équations précédentes détermineront les rapports de A, B, C et si aucun des déterminants $\beta'\gamma'' - \gamma'\beta''$, $\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma''$, $\alpha'\beta'' - \beta'\alpha''$ n'est égal à zéro, aucun de ces coefficients ne sera nul : on obtiendra une conique proprement dite passant par les cinq points donnés, et l'on n'en obtiendra qu'une seule. Si l'on observe que la condition $\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'' = 0$, par exemple, exprime que les points A, D, E sont en ligne droite, on voit que la proposition est entièrement démontrée.

442. *Autre méthode.* — Soient (x_h, y_h, z_h) les coordonnées des cinq points donnés, l'indice h variant de 1 à 5. Il s'agit de déterminer les coefficients A, B, C, D, E, F de sorte que les cinq équations homogènes à six inconnues

$$(1) \quad \begin{cases} Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + Dx_1z_1 + Ey_1z_1 + Fz_1^2 = 0, \\ Ax_2^2 + \dots\dots\dots\dots = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ Ax_5^2 + \dots\dots\dots\dots = 0 \end{cases}$$

soient vérifiées. Or, on sait qu'un pareil système d'équations admet toujours des solutions non toutes nulles. Il s'agit de discuter ces solutions.

1° Il peut arriver qu'une solution soit de la forme $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, les autres inconnues D, E, F n'étant pas nulles toutes les trois. Alors une solution du problème serait représentée par l'équation

$$(2) \qquad z(Dx + Ey + Fz) = 0.$$

Si les cinq points donnés sont à distance finie, ils seraient tous les cinq sur la droite ayant pour équation

$$Dx + Ey + F = 0.$$

Dans ce cas, il y aurait une infinité de coniques répondant à la question : ces coniques seraient composées de deux droites et représentées par une équation de la forme

$$(Dx + Ey + Fz)(\lambda x + \mu y + \nu z) = 0,$$

λ, μ, ν étant arbitraires.

Il peut arriver que l'équation (2) représente la solution générale; c'est ce qui a lieu si trois des points donnés sont à l'infini, ou si, deux seulement étant à l'infini, les trois autres sont sur une droite déterminée.

Si quatre des points étaient à l'infini, le cinquième ayant pour coordonnées (x_0, y_0), la solution la plus générale serait de la forme

$$z[\lambda(y - y_0 z) + \mu(x - x_0 z)] = 0.$$

Enfin, si tous les points étaient à l'infini, il n'y aurait d'autre solution que $z^2 = 0$.

Tous ces cas particuliers étant écartés, supposons d'abord que le déterminant principal du système (1) soit du cinquième degré. Dans ce cas, les rapports mutuels des inconnues A, B, ..., F sont déterminés et il y a une seule conique répondant à la question. On peut, d'ailleurs, former son équation qui est évidemment

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & xz & yz & z^2 \\ x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 z_1 & y_1 z_1 & z_1^2 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_5^2 & x_5 y_5 & y_5^2 & x_5 z_5 & y_5 z_5 & z_5^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Il convient de remarquer que, dans ce cas, trois des points donnés

peuvent être en ligne droite, mais pas davantage, sans quoi le problème aurait une infinité de solutions.

Supposons, en second lieu, que le déterminant principal soit du quatrième degré. Dans ce cas, deux des inconnues sont arbitraires et les autres sont des fonctions déterminées, linéaires et homogènes de ces deux inconnues, ce qui revient à dire que la solution la plus générale est de la forme

$$A = \lambda a + \lambda' a', \qquad B = \lambda b + \lambda' b', \qquad \ldots, \qquad F = \lambda f + \lambda' f',$$

$a, a', \ldots, f, f'$ étant des nombres déterminés et λ, λ' deux arbitraires. L'équation demandée est donc de la forme

$$\lambda f(x, y) + \lambda' f_1(x, y) = 0,$$

f et f_1 étant deux polynomes déterminés. Il y a, dans ce cas, une infinité de coniques passant par les cinq points, chacun de ces cinq points appartenant aux deux coniques particulières f, f_1 ; donc, ces coniques se décomposent en droites, une droite leur étant commune. Quatre des cinq points sont sur la droite commune et le cinquième est l'intersection des droites non communes.

Enfin, il peut arriver que le déterminant principal soit du troisième degré. Dans ce cas, les inconnues sont des fonctions linéaires et homogènes de trois arbitraires $\lambda, \lambda', \lambda''$; il y a une infinité de coniques passant par les cinq points donnés et représentées par une équation de la forme

$$\lambda f(x, y) + \lambda' f_1(x, y) + \lambda'' f_2(x, y) = 0.$$

Les cinq points donnés appartiennent alors à chacune des coniques f, f_1, f_2. Il en résulte nécessairement que ces coniques sont formées de couples de droites ayant une droite commune sur laquelle se trouvent les cinq points donnés; en effet, les cinq points appartenant à f et f_1, quatre d'entre eux sont sur une droite qui appartient aussi à f_2. Si le cinquième point n'était pas sur cette droite, l'équation ne contiendrait qu'un seul paramètre arbitraire.

Il reste à prouver que le déterminant principal est au moins du troisième degré. Or, en supposant les cinq points donnés distincts et à distance finie, il y en a au moins trois qui ont des abscisses ou des ordonnées distinctes, car si l'on suppose, par exemple, $x_1 = x_2 = x_3$,

on aura $y_1 \neq y_2 \neq y_3$. Supposons donc, par exemple, cette dernière condition remplie; dans ce cas, le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & y_2 & 1 \\ y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

est différent de zéro. Or, c'est un déterminant formé avec les éléments du Tableau des coefficients des inconnues A, ..., F. La proposition est donc démontrée.

443. *Théorème corrélatif.* — En transformant le théorème précédent par polaires réciproques, on voit que *cinq tangentes déterminent une conique et une seule, pourvu qu'on ne puisse trouver trois de ces droites passant par un même point.*

En effet, soient A, B, C, D, E les cinq droites données; leurs pôles étant a', b', c', d', e', on suppose que trois quelconques de ces cinq points ne sont pas en ligne droite. On peut donc faire passer une conique et une seule par les cinq points; la polaire réciproque de cette conique est tangente aux cinq droites données; réciproquement, à toute conique tangente à ces cinq droites correspond une conique passant par leurs pôles. Il y a donc une solution et une seule. Si deux des droites passaient par un point m et les trois autres par un point p, les pôles des cinq droites seraient placés : deux sur la polaire M' de m et les trois autres sur la polaire P' de p; la conique passant par les pôles des cinq droites serait composée des deux droites M' et P' et, par suite, la polaire réciproque du couple de ces deux droites serait le système des deux points m, p. Il n'y aurait donc pas de conique véritable tangente aux cinq droites données, ce qui est évident *a priori*.

444. On peut traiter la question directement. En prenant pour triangle de référence le triangle formé par trois des tangentes, l'équation tangentielle de la conique serait de la forme

$$a.vw + b.wu + c.uv = 0.$$

Soient (u', v', w') et (u'', v'', w'') les coordonnées des deux autres tangentes, on doit résoudre le système

$$a.v'w' + b.w'u' + c.u'v' = 0, \qquad a.v''w'' + b.w''u'' + c.u''v'' = 0.$$

En supposant u', v', w', u'', v'', w'' différents de zéro, c'est-à-dire en supposant qu'aucune des deux dernières tangentes ne passe par le point commun à deux des trois premières, les rapports de a, b, c seront déterminés et aucun de ces coefficients ne sera nul si aucun des déterminants

$$v'w'' - w'u'', \qquad w'u'' - u'w'', \qquad u'v'' - v'u''$$

n'est égal à zéro, c'est-à-dire si le point de concours des deux dernières tangentes ne se trouve sur aucune des trois premières.

Le théorème est donc démontré.

Faisceau ponctuel de coniques.

445. *Équation générale des coniques passant par les points communs à deux coniques.* — Soient $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ les équations de deux coniques C, C′ se coupant en quatre points *distincts* A, B, C, D. L'équation

$$(1) \qquad \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) = 0$$

représente, pour un système de valeurs données α et β, une conique passant par les points communs aux deux premières.

Je dis que l'on peut déterminer α et β de manière que cette équation représente une conique déterminée C_1 choisie parmi toutes les coniques passant par les points communs à C et C′. En effet, prenons sur C_1 un point E, distinct des points A, B, C, D. La conique représentée par l'équation (1) passera par E si l'on suppose

$$(2) \qquad \alpha f(x_1, y_1) + \beta g(x_1, y_1) = 0,$$

x_1, y_1 étant les coordonnées du point E. On vérifie l'équation (2) en posant $\alpha = g(x_1, y_1)$, $\beta = -f(x_1, y_1)$ et, en remplaçant dans (1) α et β par ces valeurs, on obtient l'équation

$$(3) \qquad f(x, y)\, g(x_1, y_1) - g(x, y)\, f(x_1, y_1) = 0$$

qui représente une conique ayant avec C_1 cinq points communs; et, par suite, cette équation est celle de la conique C_1 elle-même. L'équation (1) est donc l'équation *générale* des coniques passant par les points communs à C et C′.

446. D'une manière générale, quels que soient les points com-

muns à deux coniques C, C′, l'équation

$$f(x,y)+\lambda g(x,y)=0,$$

dans laquelle λ est un paramètre arbitraire, représente une infinité de coniques passant par les points communs à ces deux coniques; elle définit un *faisceau ponctuel de coniques*, dont C et C′ sont les *bases*. Il résulte immédiatement de la forme de cette équation qu'il passe par chaque point du plan une conique, et une seule appartenant au faisceau qu'elle définit.

Deux coniques quelconques du faisceau (C, C′) peuvent être choisies pour *bases*. En effet, si l'on pose

$$U\equiv f(x,y)+\lambda' g(x,y), \qquad V\equiv f(x,y)+\lambda'' g(x,y),$$

on en tire, en supposant $\lambda'\neq\lambda''$,

$$f(x,y)\equiv\frac{\lambda' V-\lambda'' U}{\lambda'-\lambda''}, \qquad g(x,y)\equiv\frac{U-V}{\lambda'-\lambda''}$$

et, par suite,

$$f(x,y)+\lambda g(x,y)\equiv\frac{(\lambda-\lambda'')U+(\lambda'-\lambda)V}{\lambda'-\lambda''}.$$

En posant $\mu=\frac{\lambda'-\lambda}{\lambda-\lambda''}$, et, par conséquent, $\frac{\lambda'-\lambda}{\mu}=\frac{\lambda-\lambda''}{1}=\frac{\lambda'-\lambda''}{1+\mu}$, on a identiquement

$$U+\mu V\equiv(1+\mu)[f(x,y)+\lambda g(x,y)].$$

L'équation du faisceau est donc aussi $U+\mu V=0$.

447. Cela posé, je dis que, si deux coniques f, g se touchent en un point M, toutes les coniques de ce faisceau seront tangentes en M. En effet, soient x, y, z les coordonnées de M; par hypothèse, k désignant une constante, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}=k\frac{\partial g}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=k\frac{\partial g}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=k\frac{\partial g}{\partial z}$$

et, par suite, la tangente en M à la conique $f+\lambda g$ a pour équation

$$(k+\lambda)\left[X\frac{\partial g}{\partial x}+Y\frac{\partial g}{\partial y}+Z\frac{\partial g}{\partial z}\right]=0,$$

X, Y, Z étant les coordonnées courantes. Cette équation disparaît

si $\lambda = -k$; mais l'équation $f - kg = 0$ représente deux droites passant par M.

448. Il est utile d'approfondir davantage le cas que nous venons d'examiner. Pour cela, prenons pour côtés du triangle de référence la tangente en M : ($\alpha = 0$), une droite passant par M : ($\beta = 0$) et, pour troisième côté ($\gamma = 0$), une droite quelconque. Les équations des deux coniques prennent la forme

$$F \equiv a\alpha^2 + a'\beta^2 + b''\alpha\beta + b'\alpha\gamma = 0, \qquad G = a_1\alpha^2 + a'_1\beta^2 + b''_1\alpha\beta + b'_1\alpha\gamma = 0.$$

Les points communs à ces coniques sont sur la conique représentée par l'équation $a'_1 F - a' G = 0$ qui se décompose en $\alpha = 0$, représentant la tangente en M et

$$(aa'_1 - a_1 a')\alpha + (b''a'_1 - b''_1 a')\beta + (b'a'_1 - b'_1 a')\gamma = 0.$$

Cette équation représente une droite D sur laquelle se trouvent les points communs P, Q autres que le point de contact M. On voit ainsi que deux coniques tangentes en un point ont, en général, deux points communs autres que le point de contact (qu'il faut compter pour deux).

Mais il peut arriver que la droite D passe par le point de contact M, ce qui exige que $b'a'_1 - b_1 a' = 0$. Si cette condition est remplie, on a identiquement

$$a'_1 F - a' G \equiv \alpha(h\alpha + h'\beta),$$

h et h' étant deux constantes. Si, en outre, on suppose $b''a'_1 - b''_1 a' = 0$, alors

$$a'_1 F - a' G \equiv h\alpha^2.$$

Dans le premier cas, l'un des points P ou Q est venu se confondre avec M et les deux coniques n'ont plus qu'un point commun autre que M, que l'on peut considérer comme la réunion de trois points. On dit alors que les coniques ont en M un *contact du second ordre*. Dans le second cas, les coniques n'ont qu'un seul point commun M, qu'on peut regarder comme étant la réunion de quatre points. On dit alors que les coniques ont un *contact du troisième ordre* ou qu'elles sont *osculatrices*.

En revenant aux coordonnées primitives, on voit qu'il y a une valeur de λ telle que

$$f + \lambda g \equiv P.Q,$$

$P = 0$ représentant la tangente commune et $Q = 0$ une droite passant par les autres points communs. Si $Q = 0$ représente une droite passant par le point de contact, les deux coniques ont un contact du second ordre; et, dans le cas du contact de troisième ordre, il y a une valeur de λ telle que

$$f + \lambda g \equiv P^2,$$

$P = 0$ représentant la tangente commune.

On aura, dans chacun de ces cas, en conservant les notations déjà employées,

$$U + \mu V = (1 + \mu)PQ$$

ou

$$U + \mu V = (1 + \mu) P^2;$$

ce qui prouve que si deux coniques particulières du faisceau ont un contact du premier, du second ou du troisième ordre, il en est de même de deux coniques quelconques du faisceau.

Équation générale des coniques circonscrites à un quadrilatère.

449. Soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ les équations des côtés AB, BC, CD, DA d'un quadrilatère. Les équations

$$\alpha\gamma = 0, \qquad \beta\delta = 0$$

représentent deux coniques particulières passant par les quatre sommets. Donc

$$\alpha\gamma + \lambda\beta\delta = 0$$

est l'équation générale des coniques circonscrites au quadrilatère donné.

Cette équation exprime que *le lieu du point dont le produit des distances à deux droites est dans un rapport constant avec le produit des distances du même point à deux autres droites est une conique passant par les points où les deux premières droites rencontrent les deux autres.*

Ce théorème, dû à Pappus, a été généralisé. Étant données n droites $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$ et p autres droites $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0, \ldots, \beta_p = 0$, *le lieu du point tel que le rapport du produit de ses distances aux n premières droites au produit de ses distances aux p autres droites soit constant est représenté par l'équation*

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = \lambda\beta_1\beta_2\ldots\beta_p.$$

Dans sa *Géométrie*, Descartes donne le premier la solution de ce problème que les géomètres de l'antiquité n'avaient pu résoudre que dans des cas particuliers.

450. *Équation générale des coniques circonscrites au triangle* ABC *et tangentes en un sommet à une droite donnée.* — Prenons le triangle donné pour triangle de référence; l'équation d'une conique circonscrite étant

$$A\beta\gamma + B\gamma\alpha + C\alpha\beta = 0,$$

la tangente en A a pour équation $B\gamma + C\beta = 0$.

Si $\delta = 0$ représente une droite donnée passant par A, la tangente en A sera confondue avec cette droite si l'on détermine B et C de façon que $B\gamma + C\beta \equiv h.\delta$, h étant une constante. L'équation demandée est donc

$$A\beta\gamma + h\alpha\delta = 0$$

ou

$$\beta\gamma + \lambda\alpha\delta = 0.$$

On obtient cette équation en considérant la figure formée par le triangle ABC et la tangente en A comme un quadrilatère dont deux sommets seraient confondus avec le point A, l'un des côtés de ce quadrilatère limite étant la tangente donnée.

451. *Équation générale des coniques bitangentes à une conique donnée, la corde des contacts étant donnée.* — Cherchons d'abord l'équation générale des coniques tangentes à deux droites $\beta = 0$, $\gamma = 0$ aux points où ces droites sont coupées par la droite $\alpha = 0$.

Prenons pour triangle de référence le triangle formé par les trois droites données; l'équation générale des coniques passant par B et C étant

$$A\alpha^2 + 2B\beta\gamma + 2B'\gamma\alpha + 2B''\alpha\beta = 0,$$

la tangente en B a pour équation

$$B\gamma + B''\alpha = 0.$$

Pour que cette tangente se confonde avec le côté AB, il faut poser $B'' = 0$. De la même manière, $B' = 0$ exprime que la tangente en C est la droite AC; l'équation demandée, que nous avons obtenue déjà par une autre méthode (392), est donc

$$A\alpha^2 + 2B\beta\gamma = 0.$$

Cela posé, soient $f = 0$, $g = 0$ les équations de deux coniques bitangentes en B et C; on a identiquement

$$f \equiv A\alpha^2 + 2B\beta\gamma, \qquad g \equiv A'\alpha^2 + 2B'\beta\gamma,$$

d'où

$$B'f - Bg \equiv (AB' - BA')\alpha^2,$$

ce qui prouve que l'équation $g = 0$ est de la forme

$$f + k\alpha^2 = 0,$$

k étant une constante.

Réciproquement, toute équation de cette forme représente une conique bitangente à f aux points d'intersection avec la droite $\alpha = 0$; la vérification est immédiate.

Il résulte de ce qui précède que *deux* quelconques des coniques du faisceau représenté par l'équation $f + \lambda g = 0$ sont bitangentes aux mêmes points que les coniques f et g.

452. Nous pouvons reprendre maintenant d'une manière complète la question traitée au n° 445.

1° Supposons que les coniques f, g aient trois points communs A, B, C et soient tangentes en A. Nous dirons qu'une conique passe par les points communs aux deux coniques données si elle passe par les points A, B, C et est tangente en A à ces coniques. Si nous prenons le triangle ABC pour triangle de référence et si $\delta = 0$ est l'équation de la tangente en A, commune aux deux coniques f, g; l'équation générale des coniques passant par les points communs à f et g est

$$\beta\gamma + \mu\alpha\delta = 0.$$

Cette équation représente le faisceau ayant pour bases les coniques singulières $\beta\gamma = 0$, $\alpha\delta = 0$. Or

$$af \equiv \beta\gamma + \mu'\alpha\delta, \qquad bg \equiv \beta\gamma + \mu''\alpha\delta,$$

a, b, μ', μ'' étant des constantes; les coniques f, g font donc partie de ce faisceau et, par conséquent, l'équation de ce faisceau est aussi $f + \lambda g = 0$, λ étant arbitraire.

2° Si les coniques f, g sont bitangentes, la corde des contacts ayant pour équation $\alpha = 0$ et les tangentes communes ayant pour équations $\beta = 0$, $\gamma = 0$, on dit qu'une conique passe par les points communs à f et g, si elle est tangente aux mêmes droites et aux mêmes points et, par suite, a pour équation $\beta\gamma + \mu\alpha^2 \equiv 0$. Or, les coniques f et g peuvent être représentées par les équations $\beta\gamma + \mu'\alpha^2 = 0$, $\beta\gamma + \mu''\alpha^2 = 0$; elles font donc partie du faisceau dont les bases sont définies par les équations $\beta\gamma = 0$, $\alpha^2 = 0$. Il en résulte que l'équation $\beta\gamma + \mu\alpha^2 = 0$ peut se mettre sous la forme

$$f + \lambda g = 0.$$

3° Considérons enfin deux coniques f, g ayant en A un contact du second ordre. Si $\alpha = 0$ est l'équation de la tangente en A et $\beta = 0$, celle de la droite menée de A au point commun B différent de A, on a vu qu'il existe une constante λ' telle que

$$f + \lambda' g \equiv \alpha\beta.$$

Si une troisième conique, $U = 0$, a avec la première en A un contact du second ordre et passe en outre par le point B, on trouvera de même deux

constantes λ'', h telles que

$$f + \lambda'' U \equiv h\alpha\beta.$$

L'équation $U = 0$ peut donc se mettre sous la forme

$$f - h\alpha\beta = 0 \quad \text{ou} \quad f(1-h) - \lambda' hg = 0.$$

On peut donc affirmer encore que l'équation générale des coniques passant par les points A, B et ayant en A un contact du second ordre avec f et g, c'est-à-dire l'équation générale des coniques passant par les points communs à f et g est encore de la même forme $f + \lambda g = 0$. On arrive à la même conclusion dans le cas du contact du troisième ordre.

4° *Cas particulier.* — Lorsque les coniques f et g ont un point double commun M, c'est-à-dire quand ces coniques sont dégénérées en couples de droites se coupant au même point, l'équation $f + \lambda g = 0$ n'est pas l'équation générale des coniques ayant un point double en M ; en effet, cette équation représente alors évidemment un faisceau involutif, comme on s'en assure en plaçant l'origine des coordonnées au point M, puisque $f + \lambda g$ prend alors la forme

$$(A + \lambda A')x^2 + 2(B + \lambda B')xy + (C + \lambda C')y^2 = 0,$$

et l'on voit bien que cette équatiou n'est pas l'équation générale des couples de deux droites passant par l'origine.

453. Théorème de Desargues. — *Les coniques d'un faisceau ponctuel déterminent une involution sur une droite quelconque.*

Nous venons de voir que cette propriété est vraie dans le cas particulier où les coniques ont un point double commun. Dans le cas général, les points d'intersection d'une conique quelconque du faisceau avec la droite menée par un point (x_0, y_0) et ayant pour paramètres directeurs α, β, correspondent aux racines de l'équation $f(x_0 + \alpha\rho, y_0 + \beta\rho) + \lambda g(x_0 + \alpha\rho, y_0 + \beta\rho) = 0$. Or les coefficients de cette équation du second degré en ρ sont des fonctions linéaires du paramètre λ : donc les points qu'elle définit appartiennent à une involution. Les points doubles de cette involution sont évidemment les points de contact des coniques du faisceau tangentes à la sécante considérée; donc *il y a deux coniques du faisceau tangentes à une droite donnée.*

454. *Les polaires d'un point fixe par rapport à toutes les coniques d'un faisceau sont concourantes.* — En effet, si l'on pose

$$x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} + z_0 \frac{\partial f}{\partial z} = P, \qquad x_0 \frac{\partial g}{\partial x} + y_0 \frac{\partial g}{\partial y} + z_0 \frac{\partial g}{\partial z} = Q,$$

on voit que la polaire du point (x_0, y_0, z_0) par rapport à la conique $f + \lambda g$ a pour équation $P + \lambda Q = 0$.

En particulier les diamètres conjugués à la direction donnée concourent en un même point.

455. On peut démontrer directement qu'il y a deux coniques du faisceau tangentes à une droite donnée : cela résulte de ce que l'équation tangentielle de la conique $f + \lambda g$ est de second degré en λ. Cela posé, soient A, B les points de contact de la droite AB avec les deux coniques qui lui sont tangentes. La polaire de A par rapport à celle de ces coniques qui touche AB en A est la droite AB elle-même; la polaire de A par rapport à la seconde conique passe par B; donc les polaires de A par rapport aux coniques du faisceau passent par B et réciproquement. Les points A et B sont donc conjugués harmoniques par rapport à tous les couples de points d'intersection de AB avec les coniques du faisceau; donc ces couples forment une involution. On retrouve ainsi le théorème de Desargues. Cette démonstration est due à M. H. Picquet.

Cercle du faisceau.

456. *Trouver les conditions pour que les points communs à deux coniques soient sur un cercle.* — Il s'agit, d'un manière plus précise, de chercher à quelles conditions il se trouve un cercle parmi les coniques d'un faisceau.

Supposons que l'une des deux coniques f, g soit une conique à centre unique, et prenons pour axes de coordonnées les axes de symétrie de cette conique. Les équations des deux coniques étant

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0, \qquad A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + \ldots = 0,$$

une conique quelconque C du faisceau aura pour équation

$$(A' + \lambda A)x^2 + 2B'xy + (C' + \lambda C)y^2 + \ldots = 0.$$

Cette conique sera un cercle si $B' = 0$ et si $A' + \lambda A = C' + \lambda C$. Il faut encore supposer $A' + \lambda A \neq 0$, $C' + \lambda C \neq 0$, ce qui exige $AC' - CA' \neq 0$.

Donc, *pour que les points d'intersection de deux coniques soient sur un cercle, il faut et il suffit que les axes de symétrie de ces coniques soient parallèles, pourvu que ces coniques ne soient pas homothétiques.*

Quand les coniques données sont homothétiques, il n'y a aucun cercle parmi les coniques du faisceau qu'elles déterminent, à moins qu'elles ne soient toutes deux des cercles, et dans ce cas le faisceau n'est composé que de cercles.

Supposons maintenant que les coniques données soient deux paraboles. L'une de ces paraboles étant rapportée à son axe et à la tangente au sommet, les équations des deux coniques sont

$$Cy^2 + 2Dx = 0, \qquad A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + \ldots = 0;$$

l'équation d'une conique du faisceau est

$$A'x^2 + 2B'xy + (C' + \lambda C)y^2 + \ldots = 0.$$

Cette équation représente un cercle si $B' = 0$ et $A' = C' + \lambda C$. La seconde conique étant une parabole, la condition $B' = 0$ entraîne $A' = 0$ ou $C' = 0$. On doit rejeter l'hypothèse $A' = 0$ à laquelle ne correspond pas de cercle et prendre $C' = 0$, $\lambda = \frac{A'}{C}$, d'où cette proposition : *Pour que les quatre points d'intersection de deux paraboles soient sur un cercle, il faut et il suffit que les axes de ces deux paraboles soient rectangulaires.*

Si, cette condition étant remplie, on prend pour axes de coordonnées les axes de symétrie des deux paraboles, les équations de ces courbes deviennent

$$y^2 = 2px + \lambda, \qquad x^2 = 2qy + \mu,$$

et celle du cercle passant par leurs points communs est

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy - \lambda - \mu = 0;$$

les coordonnées du centre de ce cercle sont donc p et q.

457. Dans le cas général, on voit que, si les points communs à deux coniques f, g sont sur un cercle, on peut mettre l'équation d'une conique du faisceau (f, g) sous la forme

$$(A + \lambda A')x^2 + (C + \lambda C')y^2 + \ldots = 0,$$

ce qui montre que toutes les coniques du faisceau ont alors leurs axes parallèles et par suite, si deux coniques quelconques du faisceau se coupent aux quatre points A, B, C, D, les droites AB, CD étant deux coniques particulières du faisceau, les bissectrices des angles formés par ces droites sont parallèles aux axes des coniques du faisceau; en d'autres termes, AB et CD font avec ces axes des angles égaux et de signes contraires; réciproquement, si cette condition est remplie, les quatre points A, B, C, D sont sur un cercle.

458. Application. — *Former l'équation générale des cercles passant par les points communs à l'ellipse et à la droite ayant pour équations*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \qquad y-mx-h=0.$$

La droite passant par les deux autres points communs à l'ellipse et à l'un des cercles considérés a pour coefficient angulaire $-m$; il en résulte que l'équation demandée a la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+\lambda(y-mx-h)(y+mx+k)=0.$$

Cette équation représente un cercle si l'on suppose

$$\frac{1}{a^2}-\lambda m^2=\frac{1}{b^2}+\lambda,$$

d'où l'on tire

$$\lambda=\frac{-c^2}{a^2b^2(m^2+1)},$$

ce qui donne l'équation

$$(m^2+1)(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)-c^2(y-mx-h)(y+mx+k)=0,$$

k désignant un paramètre arbitraire.

459. *Équation du cercle osculateur en un point d'une ellipse.* — La tangente au point donné $A(x_0, y_0)$ et la droite AB, B désignant le point d'intersection autre que A du cercle osculateur et de l'ellipse, faisant avec les axes de l'ellipse des angles égaux et de signes contraires, l'équation demandée peut se mettre sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+\lambda\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1\right)\left[(x-x_0)\frac{x_0}{a^2}-(y-y_0)\frac{y_0}{b^2}\right]=0$$

avec la condition

$$\frac{1}{a^2}+\lambda\frac{x_0^2}{a^4}=\frac{1}{b^2}-\lambda\frac{y_0^2}{b^4},$$

d'où

$$\lambda=\frac{a^2b^2c^2}{b^4x_0^2+a^4y_2^0}.$$

Hyperbole équilatère du faisceau.

460. *Parmi les coniques d'un faisceau ponctuel, il y a* une *hyperbole équilatère, ou* toutes *les coniques du faisceau sont des*

hyperboles équilatères. — La condition pour que

$$(A + \lambda A')x^2 + 2(B + \lambda B')xy + (C + \lambda C')y^2 + \ldots = 0$$

représente une hyperbole équilatère est, en supposant les axes rectangulaires,

$$A + C + \lambda(A' + C') = 0;$$

cette équation admet une solution et une seule (finie ou infinie), excepté quand on a $A + C = 0$ et $A' + C' = 0$. Alors les coniques données sont des hyperboles équilatères et toutes les coniques passant par leurs points communs sont aussi des hyperboles équilatères.

461. *Applications.* — 1° Soit H le point de concours de deux des hauteurs d'un triangle ABC. On peut considérer les systèmes de droites (BC, AH), (AC, BH) comme formant deux hyperboles équilatères passant par A, B, C, H. Il en résulte que toute conique passant par ces quatre points est une hyperbole équilatère; en particulier, il en est ainsi pour le système des droites (AB, CH), ce qui prouve que CH est la troisième hauteur. On retrouve ainsi un théorème connu.

2° Toutes les hyperboles équilatères circonscrites à un triangle ABC passent par l'orthocentre H. En effet, soit C l'une des hyperboles; la droite AH la rencontre en A et en un second point H'; mais la conique (BC, AH') étant une hyperbole équilatère, il en résulte que BH' est perpendiculaire sur AC; ce qui prouve que H' se confond avec H.

3° Cette remarque permet d'exprimer que l'équation

$$h\beta\gamma + k\gamma\alpha + l\alpha\beta = 0$$

représente une hyperbole équilatère, car il suffit d'écrire que cette équation est vérifiée par les coordonnées de l'orthocentre du triangle de référence. Si α, β, γ désignent des coordonnées normales, la condition demandée est

$$h \cos A + k \cos B + l \cos C = 0.$$

462. Supposons que le faisceau donné ne renferme qu'une seule hyperbole équilatère H; alors, parmi les coniques du faisceau, il y en a une dont les axes de symétrie sont parallèles aux asymptotes de H. En effet, prenons, comme le fait M. G. Kœnigs, pour axes de coordonnées, les asymptotes de cette hyperbole et soient

$$2xy + h = 0, \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

les équations de H et d'une seconde conique du faisceau.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$Ax^2 + 2(B + \mu)xy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F + \mu h = 0$$

représente une conique Γ satisfaisant à la condition donnée est $\mu = -B$. Si l'on prend cette conique Γ et l'hyperbole H pour bases du faisceau, ce dernier sera défini par une équation de la forme

$$Ax^2 + Cy^2 + 2\lambda xy + 2Dx + 2Ey + F + \lambda h = 0.$$

Parmi les coniques du faisceau se trouvent *deux paraboles*. En effet, l'équation précédente représente une parabole si $\lambda^2 = AC$. Donc, les deux paraboles du faisceau sont réelles quand la conique Γ est une ellipse, et réciproquement. Les axes des paraboles sont parallèles aux droites définies par les équations

$$x\sqrt{A} \pm y\sqrt{C} = 0$$

et l'on reconnaît que ces droites sont parallèles aux diamètres conjugués égaux de l'ellipse Γ.

Si l'on nomme a et b les demi-axes de l'ellipse particulière Γ, en supposant $A^2 < C$, A et C positifs, on a

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{A}{C},$$

mais l'une des racines de l'équation en S est moindre que A et l'autre est supérieure à C. On peut donc les représenter par $C + \alpha$ et $A - \alpha$. Si a' et b' sont les demi-axes d'une ellipse du faisceau autre que Γ, on a

$$\frac{a'^2 - b'^2}{a'^2} = 1 - \frac{A - \alpha}{C + \alpha},$$

ce qui prouve que l'excentricité de l'ellipse Γ est un minimum.

Lieu des centres des coniques du faisceau.

463. En conservant les mêmes notations, le centre d'une conique du faisceau est défini par les équations

$$Ax + \lambda y + D = 0, \qquad \lambda x + Cy + E = 0;$$

le lieu des centres est donc une conique S ayant pour équation

$$Ax^2 - Cy^2 + Dx - Ey = 0.$$

Cette conique est une hyperbole quand la conique Γ est une ellipse et inversement. Supposons qu'il en soit ainsi; si μ et μ' sont les coefficients angulaires des asymptotes du lieu des centres, on a

$$\mu + \mu' = 0, \qquad \mu\mu' = -\frac{A}{C},$$

ce qui prouve que toutes les coniques du faisceau admettent un même système

de directions conjuguées, qui sont les directions des asymptotes du lieu des centres.

464. *Remarques relatives au lieu des centres des coniques d'un faisceau ponctuel.* — En représentant le faisceau donné par l'équation $f + \lambda g = 0$, on trouve, pour le lieu S des centres, l'équation $f'_x . g'_y - f'_y . g'_x = 0$. Cette équation donne lieu à plusieurs remarques.

1° Les diamètres conjugués à une direction (α, β) par rapport aux deux coniques f, g ayant pour équations

$$\alpha f'_x + \beta f'_y = 0, \qquad \alpha g'_x + \beta g'_y = 0,$$

le lieu de leur point de concours, quand la direction donnée varie, est précisément la conique S.

2° Il résulte de cette propriété que la conique S passe par le milieu de chaque corde commune à deux quelconques des coniques du faisceau, puisque le milieu d'une corde commune est le point de rencontre des diamètres conjugués à sa direction.

3° Si les coniques f, g sont tangentes en un point M, ce point appartient à S et, réciproquement, si les coniques f, g, S ont un point commun M, les deux premières sont tangentes en ce point; c'est ce que montre la forme de l'équation de S.

4° Si l'on remplace f et g par des coniques respectivement homothétiques et concentriques, c'est-à-dire si l'on considère le faisceau défini par l'équation

$$f + h + \lambda(g + k) = 0,$$

h et k désignant des constantes arbitraires, quelles que soient les valeurs attribuées à h et k, ce qui donne une double infinité de faisceaux, la conique S est toujours le lieu des centres. En particulier, considérons une conique f et un cercle g ayant pour centre un point donné P. Quel que soit le rayon de ce cercle, le lieu des centres des coniques du faisceau (f, g) est une conique déterminée S, passant par P et rencontrant f en quatre points A, B, C, D. Le cercle de centre P et de rayon PA est tangent en A à f, de sorte que PA est une normale à f issue de P et, réciproquement, S passe par le pied de toute normale à f issue de P. Donc, on peut mener de P quatre normales à f (remarques dues à M. Mannheim).

5° Lorsque l'une des coniques du faisceau est un cercle, S est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes de la seconde conique.

465. Lorsque les coniques f, g se coupent en quatre points réels A, B, C, D, on peut prendre pour axes de coordonnées deux droites non parallèles passant par ces quatre points. Supposons que AD soit l'axe des x et CD l'axe des y, et soient a, a' les abscisses de A et B; b, b' les ordonnées de C et D. Soit

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

l'équation d'une conique. L'axe des x rencontre cette conique en deux points dont les abscisses sont les racines de l'équation

$$Ax^2 + Dx + F = 0;$$

ces points coïncident avec A et B si l'on pose

$$-\frac{D}{A} = a + a', \qquad \frac{F}{A} = aa'.$$

Pareillement, pour que la conique passe par C et D, il faut que

$$-\frac{E}{C} = b + b', \qquad \frac{F}{C} = bb';$$

on tire de ces équations

$$A = \frac{F}{aa'}, \qquad D = -F\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right), \qquad C = \frac{F}{bb'}, \qquad E = -F\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right);$$

donc, l'équation d'une conique passant par les quatre points donnés est

$$\frac{x^2}{aa'} + \lambda xy + \frac{y^2}{bb'} - x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right) - y\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right) + 1 = 0,$$

où l'on a posé $\frac{B}{F} = \lambda$. Réciproquement, toute équation de cette forme représente une conique passant par les points donnés. L'équation précédente est donc l'équation générale des coniques passant par ces quatre points.

On peut encore remarquer que, toute conique du faisceau étant circonscrite au quadrilatère ABCD, son équation est de la forme

$$\mu xy + \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)\left(\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} - 1\right) = 0.$$

En remplaçant le paramètre arbitraire $\mu + \frac{1}{ab'} + \frac{1}{ba'}$ par λ, on retrouve la même équation que plus haut.

Les paraboles du faisceau sont réelles si $aa'bb'$ est positif, c'est-à-dire si le quadrilatère ABCD est convexe.

Lorsque $\frac{1}{a'} = \frac{1}{b'} = 0$, l'équation obtenue devient l'équation générale des hyperboles passant par A et B et dont les asymptotes sont parallèles à Ox et Oy; le lieu des centres est alors la droite joignant le point O au milieu de AB.

Si $a = a'$, $b = b'$, l'équation représente les coniques tangentes

aux axes en A et B. Le faisceau ne contient alors qu'une parabole proprement dite ayant pour équation

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2-2\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)+1=0.$$

466. Considérons les hyperboles équilatères passant par trois points A, B, C. Prenons pour axes de coordonnées le côté BC et la hauteur correspondante du triangle ABC. L'équation d'une hyperbole équilatère est de la forme

$$x^2-y^2+2Bxy+2Dx+2Ey+F=0.$$

Les abscisses des points B, C étant les racines de l'équation

$$x^2+2Dx+F=0,$$

les coefficients D et F sont déterminés. L'axe des y coupe l'hyperbole en deux points dont les ordonnées sont les racines de l'équation

$$-y^2+2Ey+F=0.$$

Le point A étant l'un de ces deux points, l'une des racines est connue; mais F est donné, donc l'autre racine est aussi déterminée. On reconnaît ainsi directement que les hyperboles équilatères passant par les sommets d'un triangle rencontrent toutes l'une des hauteurs en un point déterminé qui est, par suite, le point de rencontre des trois hauteurs. Le seul paramètre variable dans l'équation générale de ces hyperboles est le coefficient B. Le lieu des centres a pour équation

$$x^2+y^2+Dx-Ey=0;$$

c'est le cercle des neuf points, puisqu'il passe par le pied d'une quelconque des hauteurs.

Faisceau tangentiel.

467. Deux coniques données ont, en général, quatre tangentes communes, comme cela résulte de la discussion du système formé par les équations tangentielles. On le voit d'une manière nette en transformant par polaires réciproques. En effet, à toute tangente commune à deux coniques C, C_1 correspond un point commun à leurs polaires réciproques C', C'_1, et réciproquement. Supposons qu'il s'agisse de deux coniques proprement dites. Si les coniques C', C'_1 ont quatre points communs, les coniques C, C_1 ont quatre tangentes communes. En examinant tous les cas, on voit que deux coniques données peuvent avoir une, deux, trois ou quatre tangentes communes.

Cela posé, si $f(u, v, w)=0$, $g(u, v, w)=0$ sont les équations tangentielles des deux coniques données, l'équation

$$(1)\qquad f(u, v, w)+\lambda g(u, v, w)=0$$

représente ce que l'on nomme un *faisceau tangentiel*. C'est le faisceau des

coniques tangentes aux tangentes communes aux deux coniques données. En effet, si les équations des deux coniques sont vérifiées par $u = u_1$, $v = v_1$, $w = w_1$; on aura aussi, quel que soit λ, $f(u_1, v_1, w_1) + \lambda g(u_1, v_1, w_1) = 0$. Quand on regarde u, v, w comme des coordonnées ponctuelles, l'équation (1) représente toutes les coniques passant par les points communs aux coniques représentées par les équations $f = 0$, $g = 0$; donc, en coordonnées tangentielles, l'équation (1) est l'équation générale des coniques tangentes aux tangentes communes aux coniques f et g.

L'équation du faisceau étant linéaire en λ, il y a une conique du faisceau et une seule tangente à une droite donnée.

On verra, comme dans le cas du faisceau ponctuel, qu'on peut remplacer f et g par deux coniques quelconques du faisceau.

468. Application : *Équation générale des coniques inscrites à un quadrilatère.* — Si l'on représente par $f(u, v, w) = 0$ le couple formé par deux sommets opposés a, c du quadrilatère donné et par $g(u, v, w) = 0$ le couple formé par les deux autres sommets b, d; l'équation demandée est

$$f(u, v, w) + \lambda g(u, v, w) = 0.$$

Effectivement, si l'équation d'un côté du quadrilatère, du côté ab par exemple, est $u_1 x + v_1 y + w_1 = 0$, on a $f(u_1, v_1, w_1) = 0$, puisque ab passe par a et $g(u_1, v_1, w_1) = 0$, puisque ab passe par b. La conique représentée par l'équation précédente pour une valeur donnée de λ est donc inscrite au quadrilatère donné et l'on peut déterminer λ de façon que cette conique soit tangente à une cinquième droite.

L'équation précédente est susceptible d'une interprétation géométrique; elle exprime que le produit des distances de deux sommets d'un quadrilatère circonscrit à une conique à une tangente quelconque est dans un rapport constant avec le produit des distances à celle tangente des deux autres sommets. On arrive aussi à cette proposition en transformant par polaires réciproques le théorème de Pappus relatif au quadrilatère inscrit.

On peut facilement obtenir l'équation ponctuelle des coniques considérées. Nous savons, en effet, que l'on peut représenter les quatre côtés d'un quadrilatère donné par les équations $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha + \beta - \gamma = 0$, $\alpha - \beta + \gamma = 0$, $-\alpha + \beta + \gamma = 0$ quand le triangle de référence est formé par les diagonales de ce quadrilatère. Les équations des sommets en coordonnées tangentielles sont donc $v - w = 0$, $v + w = 0$ et $u - v = 0$, $u + v = 0$. Il en résulte que l'équation tangentielle demandée est alors

$$\lambda u^2 + (1 - \lambda) v^2 = w^2$$

et, par suite, l'équation ponctuelle sera

$$\frac{\alpha^2}{\lambda} + \frac{\beta^2}{1 - \lambda} = \gamma^2.$$

469. *Autre solution.* — En prenant toujours pour triangle de référence le

triangle formé par les diagonales du quadrilatère, et en exprimant que l'équation tangentielle du second degré est vérifiée par les coordonnées des quatre côtés du quadrilatère, on obtient les équations

$$a + a' + a'' + 2b + 2b' + 2b'' = 0,$$
$$a + a' + a'' - 2b - 2b' + 2b'' = 0,$$
$$a + a' + a'' - 2b + 2b' - 2b'' = 0,$$
$$a + a' + a'' + 2b - 2b' - 2b'' = 0$$

d'où

$$a + a' + a'' = 0, \qquad b = b' = b'' = 0.$$

L'équation ponctuelle est donc de la forme

$$\frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{a'} + \frac{\gamma^2}{a''} = 0.$$

L'un des coefficients est arbitraire : posons $a'' = -1$ et, par suite, $a + a' = 1$, ce qui donne

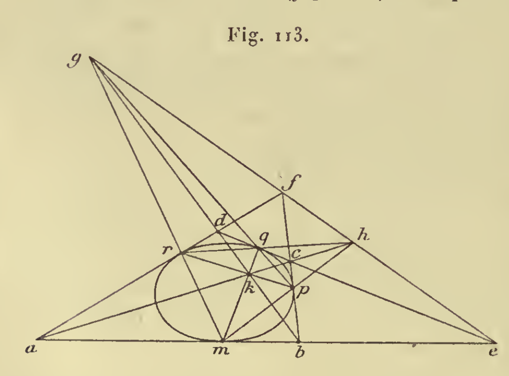
$$\frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{1-a} = \gamma^2.$$

470. La forme de l'équation obtenue montre que les diagonales d'un quadrilatère circonscrit à une conique forment un triangle dont chaque sommet est le pôle du côté opposé. On dit qu'un pareil triangle est *conjugué* à la conique ou est *autopolaire*.

On peut établir cette propriété importante par la Géométrie.

Considérons, en effet (*fig.* 113), un quadrilatère *abcd* circonscrit à une conique et soient *m*, *p*, *q*, *r* les points de contact; *g*, *h*, *k* les points de concours des côtés opposés et des diagonales du quadrilatère *mpqr*.

Fig. 113.



Il est évident que le triangle *ghk* est conjugué à la conique considérée. Or, le point *e* étant le pôle de *qm* est sur la polaire de *k*, c'est-à-dire sur *gh*; il en est de même de *f*. Enfin, *bd* est la polaire de *h*; donc, *bd* passe par les points *k* et *g*; de même, *ac* passe par *k* et *h*. Il en résulte que *hk*, *kg*, *gh* sont les diagonales du quadrilatère *abcd*.

On remarquera que, quelle que soit la conique inscrite au quadrilatère *abcd*, les cordes de contact passent deux à deux par des points fixes; ainsi *rq* et *pm* passent par *h*, *mr* et *pq* par *g* et enfin *qm*, *rp* par *k*. Il en résulte qu'on peut se donner arbitrairement l'un des points de contact, *m* par exemple, les

autres, p, q, r s'en déduisent en s'appuyant sur la remarque qu'on vient de faire. Enfin, les deux quadrilatères $abcd$ et $mpqr$ sont polaires réciproques par rapport à la conique considérée.

471. *Lieu des pôles d'une droite fixe par rapport à un faisceau tangentiel.* — En transformant par polaires réciproques le théorème du n° 465, nous obtenons ce théorème :

Les pôles d'une droite fixe par rapport aux coniques d'un faisceau tangentiel sont sur une droite fixe.

La solution analytique n'offre aucune difficulté. Les coordonnées du pôle de la droite $u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$, par rapport à la conique $f + \lambda g$ étant $f'_u + \lambda g'_u$, $f'_v + \lambda g'_v$, $f'_w + \lambda g'_w$, on voit bien que ce pôle est sur la droite fixe passant par les pôles de la droite donnée par rapport aux deux coniques f, g.

En particulier, si la droite est à l'infini, on obtient ce théorème dû à Newton : *Le lieu des centres des coniques inscrites à un quadrilatère est une droite.* — Soient x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4 les coordonnées cartésiennes des sommets a, b, c, d du quadrilatère donné; l'équation tangentielle des coniques y inscrites est

$$(ux_1 + vy_1 + w)(ux_3 + vy_3 + w) + \lambda(ux_2 + vy_2 + w)(ux_4 + vy_4 + w) = 0.$$

Les coordonnées du centre de la conique représentée par l'équation précédente sont

$$x = \frac{x_1 + x_3 + \lambda(x_2 + x_4)}{2(1+\lambda)}, \quad y = \frac{y_1 + y_3 + \lambda(y_2 + y_4)}{2(1+\lambda)}.$$

Le lieu des centres est donc la droite qui joint les milieux des diagonales.

472. *Démonstration directe du théorème de Newton.* — Prenons pour axes de coordonnées deux des tangentes; l'équation tangentielle d'une conique du faisceau doit être vérifiée quand $u = 0$, $w = 0$, et quand $v = 0$, $w = 0$; elle est donc de la forme

$$a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0.$$

Or on connaît deux tangentes $(u_1, v_1, 1)$ et $(u_2, v_2, 1)$, de sorte que

$$a'' + 2bv_1 + 2b'u_1 + 2b''u_1v_1 = 0,$$
$$a'' + 2bv_2 + 2b'u_2 + 2b\ u_2v_2 = 0,$$

d'où, en éliminant b'',

$$a''(u_1v_1 - u_2v_2) + 2bv_1v_2(u_1 - u_2) + 2b'u_1u_2(v_1 - v_2) = 0.$$

Or le centre, c'est-à-dire le pôle de la droite de l'infini, a pour coordonnées

b', b, a; d'où il résulte que le lieu des centres a pour équation

$$u_1v_1 - u_2v_2 + 2v_1v_2(u_1 - u_2)y + 2u_1u_2(v_1 - v_2)x = 0$$

ou

$$u_1v_1(1 + 2u_2x + 2v_2y) = u_2v_2(1 + 2u_1x + 2v_1y).$$

Sous cette forme, on voit que le lieu est une droite qui passe par le milieu de la droite joignant l'origine au point de concours des tangentes $(u_1, v_1, 1)$, $(u_2, v_2, 1)$. En écrivant l'équation précédente sous l'une des deux formes

$$u_1(v_1 - v_2)(1 + 2u_2x) + v_2(u_1 - u_2)(1 + 2v_1y) = 0$$

ou

$$v_1(u_1 - u_2)(1 + 2v_2y) + u_2(v_1 - v_2)(1 + 2u_1x) = 0,$$

on voit que le lieu passe par les milieux des diagonales du quadrilatère formé par les quatre tangentes données.

473. Corollaire. — *Étant données cinq droites, les cinq droites joignant les milieux des diagonales des cinq quadrilatères que l'on peut former avec les droites données se coupent en un même point qui est le centre de la conique tangente aux cinq droites données.*

474. *Théorème corrélatif du théorème de Desargues.* — En transformant par polaires réciproques le théorème de Desargues, on obtient celui-ci :

Les tangentes menées par un point fixe aux coniques d'un faisceau tangentiel forment une involution. Les rayons doubles sont les tangentes aux coniques du faisceau qui passent par le point donné.

On voit d'ailleurs directement, en formant l'équation ponctuelle, qu'*il passe deux coniques du faisceau par un point donné.*

Coniques rapportées à un triangle autopolaire.

475. En exprimant que chaque sommet du triangle de référence est le pôle du côté opposé, on trouve immédiatement que l'équation d'une conique rapportée à un triangle autopolaire est de la forme

$$(1) \qquad A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = 0.$$

L'équation tangentielle est donc

$$(2) \qquad \frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} + \frac{w^2}{C} = 0.$$

On voit que si la droite (u, v, w) est tangente, il en sera de même de chacune des droites $(\pm u, \pm v, \pm w)$, ce qui s'explique en remarquant, par exemple, que les équations

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0, \quad -u\alpha + v\beta + w\gamma = 0, \quad \alpha = 0, \quad v\beta + w\gamma = 0$$

représentent un faisceau harmonique.

On déduit de là une nouvelle méthode pour obtenir l'équation générale des coniques inscrites à un quadrilatère. En prenant, en effet, pour triangle de référence les diagonales du quadrilatère, ce triangle étant conjugué, toute conique du faisceau est représentée par l'équation (1), et les côtés du quadrilatère ayant pour coordonnées (± 1, ± 1, ± 1), l'équation (2) donne

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = 0.$$

On achève comme plus haut.

Théorèmes de Chasles.

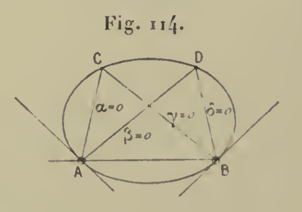
476. *Le point d'intersection de deux rayons homologues appartenant à deux faisceaux homographiques décrit une conique, et réciproquement.*

En effet, soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$ les équations de deux rayons d'un faisceau, et $\gamma = 0$, $\delta = 0$ les équations des rayons correspondants d'un faisceau homographique du premier. En disposant convenablement des coefficients de δ, par exemple, on peut représenter, comme nous l'avons vu (189), deux rayons homologues par les équations $\alpha - k$, $\beta = 0$, $\gamma - k\delta = 0$. On obtient l'équation du lieu du point de concours de ces deux rayons en éliminant k entre les deux équations précédentes, ce qui donne

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 0,$$

équation d'une conique passant par les sommets A, B des deux faisceaux $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, $\delta = 0$) et aussi par les points ($\alpha = 0$, $\gamma = 0$) et ($\beta = 0$, $\delta = 0$). La tangente en A a pour équation $\alpha\delta' - \beta\gamma' = 0$, δ' et γ' étant ce que deviennent δ et γ quand on y substitue aux coordonnées courantes celles du point A. Cette équation représente la droite du premier faisceau qui est l'homologue de BA considérée comme appartenant au second faisceau. Résultat analogue pour la tangente en B (*fig.* 114).

Fig. 114.

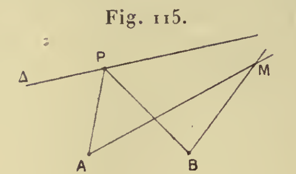


Réciproquement, toute conique peut être considérée comme engendrée par le mode précédent. En effet, soient A, B, C, D quatre points d'une conique; en représentant par $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ les équations des droites AC, AD, BC, BD et disposant convenablement des coefficients, l'équation de la conique peut se mettre sous la forme $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$. Sous cette forme on reconnaît qu'elle est le lieu du point de rencontre des droites représentées par les équations $\alpha - k\beta = 0$, $\gamma - k\delta = 0$, ce qui démontre la proposition.

477. Corollaire : *Description organique des coniques* (Newton). — Soient A, B deux points fixes; un point P (*fig.* 115) se déplace sur une droite

fixe Δ. On mène, pour chaque position du point P, une droite AM faisant avec AP un angle fixe α et une droite BM faisant avec BP un angle fixe β. Les rayons AM, BM décrivent évidemment deux faisceaux homographiques; donc leur point de rencontre M décrit une conique qui passe par les points A et B.

Fig. 115.



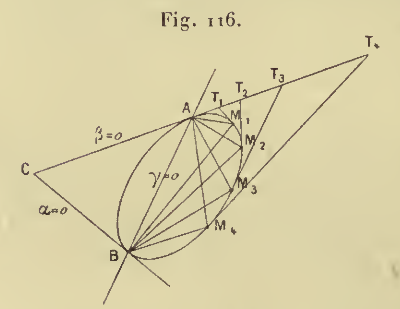
478. *Le rapport anharmonique du faisceau formé en joignant quatre points fixes d'une conique à un cinquième point variable pris sur la même conique est constant et égal au rapport anharmonique des quatre points d'intersection des tangentes aux quatre points fixes avec une tangente variable.*

Pour démontrer simplement ce théorème, prenons deux tangentes fixes et la corde des contacts pour former un triangle de référence auquel nous rapporterons la conique donnée. L'équation de cette conique peut se mettre sous la forme

$$\alpha\beta - \gamma^2 = 0,$$

$\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ étant les équations des deux tangentes et de la corde des contacts. Cela étant, soient M_1, M_2, M_3, M_4 (*fig.* 116) quatre points de la conique. Si l'équation de BM_1 est $\alpha = a_1\gamma$, celle de AM_1 sera $\beta = \frac{1}{a_1}\gamma$.

Fig. 116.



Soient a_1, a_2, a_3, a_4 les paramètres relatifs aux points M_1, M_2, M_3, M_4; on a

$$(B.M_1M_2M_3M_4) = \frac{a_1 - a_3}{a_1 - a_4} : \frac{a_2 - a_3}{a_2 - a_4};$$

pour calculer le rapport $(A.M_1M_2M_3M_4)$, il faut remplacer les paramètres a_1, a_2, a_3, a_4 par leurs inverses, ce qui ne change pas l'expression du rapport anharmonique; donc

$$(B.M_1M_2M_3M_4) = (A.M_1M_2M_3M_4).$$

La tangente au point M_1 a pour équation

$$\alpha\frac{1}{a_1} + \beta a_1 - 2\gamma = 0.$$

Soit T_1 sa trace sur le côté AC; la droite BT_1 a pour équation $\alpha = 2a_1\gamma$.

Il en résulte immédiatement que $(B.T_1T_2T_3T_4) = (B.M_1M_2M_3M_4)$.

479. Corollaire. — *Une tangente mobile détermine sur deux tangentes fixes à une conique deux divisions homographiques.*

Ce résultat, évident géométriquement, se déduit aisément de l'équation tangentielle d'une conique tangente aux axes Ox, Oy. Cette équation est, en effet, de la forme

$$a'' w^2 + 2bvw + 2b' wu + 2b'' uv = 0.$$

Si l'on remplace u par $\frac{1}{\alpha}$, v par $\frac{1}{\beta}$ et w par -1, α et β sont l'abscisse et l'ordonnée des traces sur les axes de la droite définie par l'équation

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0;$$

l'équation précédente devient, par cette transformation,

$$a''.\alpha\beta - 2b\alpha - 2b'\beta + 2b'' = 0,$$

ce qui démontre la proposition. Pour que la conique soit une parabole, il faut que $a'' = 0$; dans ce cas, la relation entre α et β se réduit à

$$b\alpha + b'\beta - b'' = 0;$$

elle exprime, comme on le vérifie aisément, qu'une tangente mobile à une parabole divise en segments inversement proportionnels les longueurs de deux tangentes fixes, ces longueurs étant comptées depuis leur point de concours jusqu'à leurs points de contact, ou encore, l'équation de la corde des contacts de la conique relativement aux axes étant $bx + b'y - b'' = 0$, la condition relative à la parabole exprime que la corde des contacts des deux tangentes Ox, Oy passe par le quatrième sommet du parallélogramme dont les trois autres sommets sont les points de concours des tangentes fixes et de la tangente mobile, et cette condition est nécessaire et suffisante pour que la conique soit une parabole.

EXERCICES.

1. Si trois coniques ont un triangle autopolaire commun, leur jacobien se réduit à trois droites.

2. Trouver le lieu du pôle d'une droite fixe par rapport aux coniques d'un faisceau ponctuel.

3. Enveloppe de la polaire d'un point fixe par rapport aux coniques d'un faisceau tangentiel.

4. Exprimer que $A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = 0$ représente une hyperbole équilatère.

5. Lieu du pôle d'une droite fixe par rapport aux hyperboles équilatères conjuguées à un triangle donné.

6. Toute parabole conjuguée à un triangle donné est inscrite au triangle ayant pour sommets les milieux des côtés du premier triangle.

7. Si deux triangles sont conjugués à une même conique, leurs sommets sont sur une conique et leurs côtés sont tangents à une autre conique, et réciproquement.

8. Trouver l'enveloppe des axes d'un faisceau ponctuel de coniques.

9. Trouver l'enveloppe des asymptotes d'un faisceau ponctuel de coniques.

10. Par quatre points formant un quadrilatère convexe on peut faire passer deux paraboles; un cinquième point détermine, avec les quatre premiers, une hyperbole s'il est intérieur ou extérieur aux deux paraboles; une ellipse, s'il est intérieur à l'une et extérieur à l'autre.

11. Étant donné un triangle conjugué à une ellipse, on lui circonscrit un cercle; prouver que la tangente menée à ce cercle du centre de l'ellipse est égale à $\sqrt{a^2+b^2}$.

12. Étant donnée une ellipse inscrite à un triangle, on trace le cercle conjugué à ce triangle; la tangente menée du centre de l'ellipse à ce cercle a pour longueur $\sqrt{a^2+b^2}$.

13. Un triangle est inscrit à une conique; deux de ses côtés passent par des points fixes : enveloppe du troisième côté et lieu de son pôle.

14. Étant données une conique et deux tangentes à cette conique, on joint deux points fixes aux points d'intersection d'une tangente mobile et des deux tangentes fixes : lieu du point de rencontre des droites obtenues.

15. Étant données deux coniques bitangentes C, C', on mène une tangente fixe T à la conique C; par un point variable P pris sur cette même conique on mène des tangentes à C et, par les points où elles rencontrent T, on mène de nouvelles tangentes à C'; lieu de leur point de rencontre.

16. Étant données deux coniques C, C', on mène une tangente à C et, par les points où cette droite rencontre C', on mène de nouvelles tangentes à C, lieu de leur point de rencontre.

17. Soit $f+\lambda g=0$ l'équation d'un faisceau; si l'on considère les polaires d'un point M par rapport à quatre coniques du faisceau qui correspondent aux valeurs λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 du paramètre, le rapport anharmonique du faisceau formé par ces quatre polaires est indépendant de la position du point M.

18. La conique K ayant pour équation $\beta^2-4\alpha\gamma=0$ est l'enveloppe des droites définies par l'équation $\alpha m^2+\beta m+\gamma=0$. Les tangentes issues d'un point $M(\alpha', \beta', \gamma')$ correspondent aux valeurs de m qui sont les racines de l'équation $\alpha' m^2+\beta' m+\gamma'=0$. En nommant ρ, ρ_1 ces racines, on a

$$\alpha' = -\frac{\beta'}{\rho+\rho_1} = \frac{\gamma'}{\rho\rho_1}.$$

On peut regarder ρ, ρ_1 comme des coordonnées de m (G. Darboux). Dans ce système, la conique K a pour équation $(\rho-\rho_1)^2=0$ et une conique doublement tangente à K a une équation de la forme $A\rho\rho_1+B\rho+C\rho_1+D=0$. Si $B=C$, cette équation représente une droite.

19. Trouver le degré d'une courbe déterminée par une équation algébrique $f(\rho, \rho_1)=0$. On distinguera deux cas suivant que l'équation donnée est symétrique ou non par rapport à ρ et ρ_1.

20. Si une courbe d'ordre n passe par l'intersection des deux faisceaux de n droites $A_1, A_2, \ldots, A_n$; $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tangentes à K, son équation est de la forme

$$A_1A_2\ldots A_n = hB_1B_2\ldots B_n;$$

en posant

$$A_i = \alpha a_i^2+\beta a_i+\gamma = \alpha(a_i-\rho)(a_i-\rho_1),$$

$$B_i = \alpha b_i^2+\beta b_i+\gamma = \alpha(b_i-\rho)(b_i-\rho_1)$$

et si l'on fait

$$\varphi(\rho)=(\rho-a_1)(\rho-a_2)\ldots(\rho-a_n),$$

$$\psi(\rho)=\sqrt{h}(\rho-b_1)(\rho-b_2)\ldots(\rho-b_n),$$

l'équation prend la forme

$$\frac{\varphi(\rho)}{\psi(\rho)}=\frac{\psi(\rho_1)}{\varphi(\rho_1)}.$$

Montrer qu'on peut la mettre sous la forme

$$\frac{\Phi(\rho)}{\Psi(\rho)}=\frac{\Psi(\rho_1)}{\Phi(\rho_1)},$$

où l'on a, m étant arbitraire,

$$\Phi(u)=m\varphi(u)+n\psi(u), \qquad \Psi(u)=m\psi(u)+n\varphi(u).$$

En conclure ce théorème : *Si une courbe d'ordre n passe par les n^2 points d'intersection de deux faisceaux de n tangentes à la conique* K, *elle contient une infinité d'autres systèmes de n^2 points formant les intersections de deux faisceaux de n tangentes à la conique* K.

21. Quand une courbe d'ordre n contient tous les sommets d'un polygone de $n+1$ côtés tous tangents à une conique, elle est circonscrite à une infinité d'autres polygones de $n+1$ côtés, formés avec d'autres tangentes à la même conique.

22. Étant donnés deux polygones, l'un de m, l'autre de n côtés ($n \leqq m$) circonscrits à une même conique, on peut toujours, par leurs $\frac{m(m-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}$ sommets, faire passer au moins une courbe de degré $m-1$ qui sera circonscrite de la même manière à une infinité d'autres polygones de m côtés circonscrits à la conique.

23. Étant donné un polygone formé de $n+1$ droites $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$ et

inscrit à une conique C, pour tout point de la conique il y aura entre les polynomes $A, A_1, \ldots, A_n$ qui, égalés à zéro, représentent les côtés désignés par les mêmes lettres, une relation de la forme

$$\frac{a}{A} + \frac{a_1}{A_1} + \ldots + \frac{a_n}{A_n} = 0.$$

24. Deux sommets d'un triangle décrivent les deux courbes $f(\rho, \rho_1) = 0$, $\varphi(\rho, \rho_1) = 0$; trouver le lieu décrit par le troisième sommet de ce triangle, sachant qu'il est circonscrit à la conique K.

25. Si deux coniques sont telles qu'il existe un polynome inscrit à l'une et circonscrit à l'autre, il y aura une infinité de polynomes jouissant des mêmes propriétés. (PONCELET.)

Les exercices 17-25 sont empruntés à l'Ouvrage de M. G. Darboux, ayant pour titre : *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Paris, Gauthier-Villars, 1873).

CHAPITRE XIX.

THÉORIE DES FOYERS.

480. Nous avons défini l'ellipse comme étant le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes, appelés *foyers*, est constante et nous avons vu que si l'on prend pour axe des x la droite passant par les foyers et pour axe des y la perpendiculaire menée au milieu de cette droite, les rayons vecteurs MF, MF′ sont donnés par les formules

$$MF = a - \frac{cx}{a}, \qquad MF' = a + \frac{cx}{a},$$

x désignant l'abscisse du point M de l'ellipse. Si l'on fait une transformation de coordonnées, ces expressions linéaires se transformeront en expressions du premier degré par rapport aux nouvelles

coordonnées du point M. Cette remarque justifie la définition suivante des foyers, due à Euler :

On nomme foyer *d'une conique un point fixe* F, *situé dans le plan de cette conique, et tel que la distance* ρ *d'un point quelconque* M(x, y) *pris sur la courbe au point* F *soit une fonction linéaire des coordonnées* x, y *du point* M, *de sorte que*

$$(1) \qquad \rho = |lx + my + h|.$$

Cette définition, évidemment indépendante des axes de coordonnées rectilignes auxquels la conique est rapportée, peut être transformée en une autre exprimant une propriété géométrique. En effet, la distance δ du point (x, y) à la droite D, représentée par l'équation

$$lx + my + h = 0,$$

est donnée par la formule

$$(2) \qquad \delta = \frac{|lx + my + h| \sin\theta}{\sqrt{l^2 + m^2 - 2lm\cos\theta}},$$

θ désignant l'angle des axes de coordonnées.

Donc, si l'on pose

$$(3) \qquad e = \frac{\sqrt{l^2 + m^2 - 2lm\cos\theta}}{\sin\theta},$$

les formules (1) et (2) donnent

$$(4) \qquad \rho = e\delta,$$

d'où il résulte que le rapport des distances du point M au foyer F et à la droite D est constant. La droite D se nomme *directrice* et l'on peut donner la définition suivante :

On appelle foyer *et* directrice *d'une conique un point fixe et une droite fixe tels que le rapport des distances d'un point quelconque de la conique à ce point et à cette droite soit constant. Le rapport constant se nomme l'*excentricité *relative à ce foyer.*

Il convient de faire remarquer que ces deux définitions sont équivalentes, ce qui sera prouvé si l'on fait voir que la formule (4) entraîne la formule (1). Or, si l'on désigne par $Ax + By + C = 0$ l'équation de la directrice correspondante au foyer F, on a, en vertu

de (4),

$$\rho = e\,\frac{|\,Ax + By + C\,|\sin\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}$$

et, par suite,

$$\rho = |\,lx + my + h\,|,$$

en posant

$$lx + my + h \equiv e\,\frac{(Ax + By + C)\sin\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}.$$

Dès que l'on connaît l'expression du rayon vecteur en fonction des coordonnées (x, y) d'un point M de la courbe, l'équation de la directrice est connue ; si l'on suppose

$$\rho = |\,lx + my + h\,|,$$

l'équation de la directrice correspondante est

$$lX + mY + h = 0,$$

X, Y étant les coordonnées courantes.

Il résulte de ce qui précède que, si α, β désignent les coordonnées d'un foyer d'une conique, l'équation de cette conique sera de la forme

$$(5)\quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta - (lx + my + h)^2 = 0$$

et, si les axes sont rectangulaires,

$$(5')\qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - (lx + my + h)^2 = 0.$$

Cette équation (5) ou (5′) se nomme l'*équation focale* de la conique.

481. On peut mettre l'équation focale sous la forme suivante :

$$(6)\quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta - e^2[x\cos\varphi + y\cos(\theta-\varphi) - k]^2 = 0.$$

Le discriminant du groupe homogène des termes du second degré est égal à $(1 - e^2)\sin^2\theta$. Donc l'équation (6) représente une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que l'on suppose $e < 1$, $e > 1$ ou $e = 1$.

482. Cherchons si une conique peut passer par l'un de ses foyers.

L'équation (5) prouve que, s'il en est ainsi, ce foyer est sur la directrice correspondante; et, par suite, en supposant les axes rectangulaires, l'équation focale est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=[l(x-\alpha)+m(y-\beta)]^2$$

et représente deux droites passant par le point (α, β).

On voit ainsi qu'un système de deux droites concourantes a pour foyer le point de concours de ces deux droites, la direction correspondante étant l'une quelconque des bissectrices de leurs angles.

Une conique proprement dite ne passe par aucun de ses foyers.

Recherche des foyers d'une conique.

483. Première méthode. — On identifie l'équation de la conique donnée avec l'équation focale. Appliquons cette méthode à l'ellipse rapportée à ses axes de symétrie.

Il s'agit d'identifier les deux équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \tag{1}$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(lx+my+h)^2=0. \tag{2}$$

L'équation (1) manquant de termes en xy, x, y, il doit en être de même de l'autre équation; donc $lm=0$, $\alpha+lh=0$, $\beta+mh=0$.

La première de ces équations se décompose : soit d'abord $m=0$ et, par suite, $\beta=0$; on doit, pour identifier (1) et (2), poser

$$a^2(1-l^2)=b^2=h^2-\alpha^2,$$

d'où l'on tire

$$l^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}.$$

Supposons $a>b$ et posons $a^2-b^2=c^2$; on aura $l^2=\frac{c^2}{a^2}$ ou $l=\pm\frac{c}{a}$; ensuite, $\alpha=-lh$ et $h^2(1-l^2)=a^2(1-l^2)$, d'où $h^2=a^2$ et, par conséquent, $h=\varepsilon a$ et $\alpha=-\varepsilon la$. On voit qu'il suffit de poser $l=+\frac{c}{a}$; d'ailleurs, $lx+h$ n'entrant qu'au carré dans l'équation (2), on peut supposer $l>0$.

Nous avons ainsi obtenu deux solutions :

1° $l = \frac{c}{a}$, $m = 0$, $h = -a$, $\alpha = +c$, $\beta = 0$,

2° $l' = \frac{c}{a}$, $m' = 0$, $h' = +a$, $\alpha' = -c$, $\beta' = 0$,

ce qui donne deux foyers réels sur le grand axe et deux directrices correspondantes parallèles au petit axe. L'excentricité est la même pour ces deux foyers et égale à $\frac{c}{a}$.

En posant $l = 0$, on aurait trouvé, par un calcul analogue, deux nouvelles solutions :

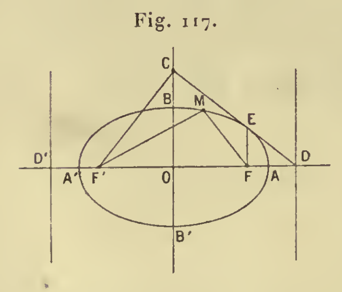
3° $l'' = 0$, $m'' = \frac{ci}{b}$, $h'' = b$, $\alpha'' = 0$, $\beta'' = -ci$,

4° $l''' = 0$, $m''' = -\frac{ci}{b}$, $h''' = -b$, $\alpha''' = 0$, $\beta''' = +ci$;

l'excentricité correspondante $e' = \frac{ci}{b}$ est imaginaire. En résumé, on a obtenu *quatre foyers :* deux réels sur le grand axe et deux imaginaires sur le petit axe. Ces quatre foyers sont les sommets d'un quadrilatère dont les côtés sont les droites isotropes issues des deux foyers réels.

484. *Construction des foyers et des directrices de l'ellipse.* — Le cercle ayant pour centre le sommet B du petit axe (*fig.* 117) et pour rayon a coupe le grand axe de l'ellipse en deux points qui sont précisément les foyers réels. La directrice correspondant au foyer F (c, o) a pour équation $\frac{cx}{a} - a = 0$; pour construire cette droite, il suffit de prendre sur le petit axe $OC = a$ et de mener CD perpendiculaire à CF'; le point où CD rencontre le grand axe est le pied de la directrice.

Fig. 117.



On peut remarquer que CD est tangente à l'ellipse en un point E ayant même abscisse que le foyer F; en effet, les coordonnées du point E sont $x = c$, $y = \frac{b^2}{a}$; la tangente en ce point a pour équation $\frac{cx}{a^2} + \frac{y}{a} = 1$, elle ne diffère donc pas de CD.

485. *Expression des rayons vecteurs.* — On trouve

$$\mathrm{MF} = |lx + h| = \left|\frac{cx}{a} - a\right| = a - \frac{cx}{a},$$
$$\mathrm{MF}' = |l'x + h'| = \left|\frac{cx}{a} + a\right| = a + \frac{cx}{a};$$

on retrouve ainsi l'équation $\mathrm{MF} + \mathrm{MF}' = 2a$.

486. Deuxième méthode. — Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une conique rapportée à deux axes de coordonnées d'angle θ.

Si α, β sont les coordonnées d'un foyer, l'équation de cette conique pourra être identifiée à l'équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + 2(x - \alpha)(y - \beta)\cos\theta - (lx + my + h)^2 = 0;$$

on pourra donc trouver une constante λ telle que

$$f(x, y) \equiv \lambda[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + 2(x - \alpha)(y - \beta)\cos\theta - (lx + my + h)^2],$$

ou encore

$$f(x, y) - \lambda[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + 2(x - \alpha)(y - \beta)\cos\theta] \equiv -\lambda(lx + my + h)^2.$$

Le premier membre de cette identité doit donc être un carré parfait et, en le divisant par $-\lambda$, on aura le carré du rayon vecteur.

Appliquons cette méthode à l'hyperbole rapportée à ses axes. Il s'agit d'exprimer que $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 - \lambda[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2]$ est un carré parfait. Cette expression ne contenant pas de terme en xy est nécessairement le carré d'un binome du premier degré en x ou en y et par suite ne doit renfermer qu'un seule des deux lettres x ou y. Supposons qu'elle soit fonction de x; alors il faut que $\lambda = -\frac{1}{b^2}$, $\beta = 0$ et que $x^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - 2\frac{\alpha x}{b^2} + \frac{\alpha^2}{b^2} - 1$ soit un carré parfait. En exprimant qu'il en est ainsi, on trouve $\alpha^2 = a^2 + b^2$. Par conséquent, si l'on pose $a^2 + b^2 = c^2$, on a $\alpha = \varepsilon c$; en outre, le carré obtenu étant égal à $\frac{1}{b^2}\left(\frac{cx}{a} - \varepsilon a\right)^2$, on peut écrire les formules suivantes

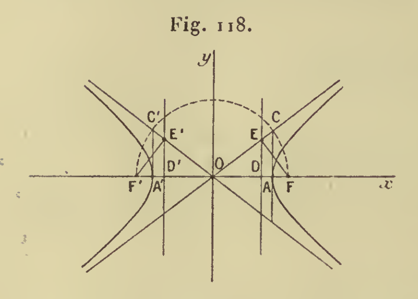
$$\alpha = \varepsilon c, \qquad \beta = 0; \qquad l = \frac{c}{a}, \qquad m = 0, \qquad h = -\varepsilon a, \qquad e = \frac{c}{a}.$$

On obtient les autres solutions en posant $\lambda = \frac{1}{a^2}$, $\alpha = 0$, ce qui

donne $\beta = \pm ci$. Donc, comme l'ellipse, l'hyperbole a deux foyers réels et deux foyers imaginaires.

487. *Construction des foyers et des directrices de l'hyperbole.* — Soient A, A′ les sommets réels d'une hyperbole (*fig.* 118); la tangente en A rencontre l'une des asymptotes en C; $AC = b$ et $OC = \sqrt{a^2 + b^2} = c$. On obtient donc les foyers réels F, F′ en rabattant OC sur l'axe transverse AA′. Si l'on abaisse du foyer F une perpendiculaire FE sur OC, on a

Fig. 118.



$OE = OA$; donc, si l'on nomme D la projection de E sur OA, on a $OD = \frac{a^2}{c}$; la droite DE est donc la directrice relative au foyer F. On obtiendra de la même façon la seconde directrice.

488. *Expression des rayons vecteurs.* — Soit M un point de l'hyperbole donnée ayant une abscisse positive; on a

$$MF = \left| \frac{cx}{a} - a \right|;$$

or, pour la directrice ayant pour équation $\frac{cx}{a} - a = 0$, la région positive est celle des x positifs; donc

$$MF = \frac{cx}{a} - a.$$

On a pareillement

$$MF' = \frac{cx}{a} + a,$$

et par suite

$$MF' - MF = 2a.$$

Soit M′ un point situé sur l'autre branche et ayant par suite une abscisse négative; on obtient

$$M'F = a - \frac{cx}{a}, \qquad M'F' = -a - \frac{cx}{a}$$

et

$$M'F - M'F' = 2a.$$

489. *Foyers de la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet.* — Déterminons λ de manière que l'expression $y^2 - 2px - \lambda[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2]$ soit égale à un carré parfait.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut poser $\lambda = 1$, $\beta = 0$ et exprimer que $2px + (x-\alpha)^2$ est un carré, ce qui donne $\alpha = \frac{p}{2}$. Le carré est alors $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$. On en conclut que la parabole a un seul foyer, ayant pour coordonnées $\alpha = \frac{p}{2}$, $\beta = 0$. La directrice correspondante a pour équation $x + \frac{p}{2} = 0$. Le rayon vecteur du point $M(x, y)$ a pour expression $x + \frac{p}{2}$ et l'excentricité $e = 1$.

490. *Formules générales.* — En posant $x = \alpha + X$, $y = \beta + Y$, l'expression

$$(1) \qquad f(x, y) - \lambda[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta]$$

devient

$$f(\alpha, \beta) + Xf'_\alpha + Yf'_\beta + \varphi(X, Y) - \lambda[X^2 + 2XY\cos\theta + Y^2].$$

Nous avons vu que, si $f(x, y) = 0$ représente une conique véritable, $f(\alpha, \beta)$ est différent de zéro, si α, β sont les coordonnées d'un foyer; donc si l'on rend l'expression précédente homogène, il suffira d'exprimer que

$$(2) \quad Z^2 f(\alpha, \beta) + Z(Xf'_\alpha + Yf'_\beta) + \varphi(X, Y) - \lambda[X^2 + 2XY\cos\theta + Y^2]$$

est le carré d'un binome du premier degré en Z, quels que soient X et Y, c'est-à-dire que

$$(Xf'_\alpha + Yf'_\beta)^2 - 4f(\alpha, \beta)[(A-\lambda)X^2 + (C-\lambda)Y^2 + 2(B - \lambda\cos\theta)XY] \equiv 0.$$

D'où

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} f'^2_\alpha &= 4(A-\lambda)f(\alpha, \beta), \\ f'^2_\beta &= 4(C-\lambda)f(\alpha, \beta), \\ f'_\alpha f'_\beta &= 4(B - \lambda\cos\theta)f(\alpha, \beta). \end{aligned} \right.$$

En égalant entre elles les valeurs de $\lambda f(\alpha, \beta)$ tirées de ces équations, et remplaçant α et β par x et y, on obtient pour déterminer

les coordonnées des foyers de la conique donnée, les équations

$$(4) \qquad 4\mathrm{A}f(x,y)-f_x'^2 = 4\mathrm{C}f(x,y)-f_y'^2 = \frac{4\mathrm{B}f(x,y)-f_x'f_y'}{\cos\theta}.$$

On peut écrire ces équations de cette manière

$$(5) \qquad \begin{cases} 4(\mathrm{A}-\mathrm{C})f(x,y) = f_x'^2 - f_y'^2, \\ 4(\mathrm{B}-\mathrm{A}\cos\theta)f(x,y) = f_x'f_y' - f_x'^2\cos\theta, \\ 4(\mathrm{B}-\mathrm{C}\cos\theta)f(x,y) = f_x'f_y' - f_y'^2\cos\theta. \end{cases}$$

On déduit des deux dernières

$$(\mathrm{B}-\mathrm{C}\cos\theta)f_x'^2 - (\mathrm{A}-\mathrm{C})f_x'f_y' + (\mathrm{A}\cos\theta - \mathrm{B})f_y'^2 = 0,$$

c'est-à-dire l'équation du faisceau des axes de symétrie de la conique. On voit ainsi que les foyers sont situés sur les axes de la conique. Enfin, chacune des équations (5) représente une hyperbole équilatère. Ces hyperboles ont mêmes centres. Quand les axes sont rectangulaires les équations précédentes deviennent

$$(6) \qquad \begin{cases} 4(\mathrm{A}-\mathrm{C})f(x,y) = f_x'^2 - f_y'^2, \\ 4\mathrm{B}f(x,y) = f_x'f_y'. \end{cases}$$

On peut encore remarquer que les valeurs de λ tirées des équations (3) sont des racines de l'équation en S, ce qui se reconnaît d'ailleurs en remarquant que, si le polynome (1) est carré parfait, il en est de même de l'ensemble des termes du second degré de ce polynome.

491. Les équations (6) appliquées à l'équation

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{C}y^2 + 1 = 0$$

donnent

$$\mathrm{AC}(y^2 - x^2) + \mathrm{A} - \mathrm{C} = 0, \qquad xy = 0.$$

En particulier, si $\mathrm{A} = \frac{1}{a^2}$, $\mathrm{C} = \frac{1}{b^2}$, on trouve les solutions suivantes :

$$y = 0, \quad x = \pm\sqrt{b^2 - a^2} \quad \text{et} \quad x = 0, \quad y = \pm\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Ainsi, en supposant $a > b$, l'ellipse imaginaire ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

a deux foyers réels sur l'axe des y et deux foyers imaginaires sur l'axe des x.

Cercles focaux.

492. Proposons-nous de déterminer tous les cercles de rayon donné R, bitangents à une ellipse donnée. Pour que les équations

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

$$(2) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=0$$

représentent deux coniques bitangentes, il faut et il suffit qu'on puisse mettre l'équation (1) sous la forme

$$(3) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2-(lx+my+h)^2=0.$$

En suivant l'une quelconque des méthodes précédentes, on trouve les solutions suivantes :

1° $\beta=0$, $\alpha=\varepsilon c\sqrt{1-\frac{R^2}{b^2}}$; en outre, la corde des contacts correspondante a pour équation

$$\frac{c}{a}x-\varepsilon.a\sqrt{1-\frac{R^2}{b^2}}=0.$$

2° $\alpha=0$, $\beta=\varepsilon ci\sqrt{1-\frac{R^2}{a^2}}$ et la corde des contacts a alors pour équation

$$\frac{c}{b}x-\varepsilon b\sqrt{\frac{R^2}{a^2}-1}=0.$$

Considérons deux cercles focaux ayant leurs centres sur l'un des axes, par exemple sur le grand axe : l'équation de l'ellipse peut s'écrire de l'une des deux manières suivantes :

$$(x-\alpha)^2+y^2-R^2-\left(\frac{c}{a}x+h\right)^2=0,$$

$$(x-\alpha')^2+y^2-R'^2-\left(\frac{c}{a}x+h'\right)^2=0.$$

En appelant t et t' les longueurs des tangentes menées d'un point M de l'ellipse à ces deux cercles, d et d' les distances du même point aux cordes de contact, on a $t=\frac{c}{a}d$, $t'=\frac{c}{a}d'$; d'où il résulte qu'en nommant δ la distance des deux cercles de contact, si M est compris entre ces deux cercles, on a $t+t'=\frac{c}{a}\delta$, et, si M n'est pas compris entre ces droites, $t-t'=\frac{c}{a}\delta$.

Remarquons maintenant que, si R tend vers zéro, les centres des cercles focaux ont pour limites les foyers de l'ellipse. On est ainsi conduit à une nouvelle définition des foyers.

Nouvelle définition des foyers (Plücker).

493. *On nomme* foyer d'une conique *le centre d'un cercle de rayon nul bitangent à cette conique.*

Pour justifier cette définition, il suffit de remarquer que l'équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(lx+my+h)^2=0$$

représente une conique bitangente au cercle de rayon nul ayant pour centre le point (α, β). Or cette équation peut aussi bien s'écrire

$$[x-\alpha+i(y-\beta)][x-\alpha-i(y-\beta)]-(lx+my+h)^2=0.$$

On peut donc dire qu'un foyer d'une conique est un point d'où l'on peut mener à cette conique deux tangentes isotropes. La directrice, étant la corde des contacts de ces tangentes, est la polaire du foyer correspondant. Cette nouvelle définition a l'avantage de convenir à une courbe plane quelconque.

On peut mener à une courbe algébrique de classe μ, μ tangentes par chacun des points cycliques. Les μ tangentes issues de l'un des points cycliques rencontrent les μ tangentes issues de l'autre en μ^2 points qui sont des foyers, dont μ sont réels.

En particulier, toute conique a quatre foyers qui sont les sommets d'un quadrilatère dont deux côtés ont pour coefficient angulaire i, le coefficient des deux autres étant égal à $-i$, pourvu que l'on suppose les axes de coordonnées rectangulaires. En nommant F, F′ les foyers réels et φ, φ' les foyers imaginaires, les droites $F\varphi$, $F'\varphi'$, par exemple, ont pour coefficient i; elles sont donc orthogonales et, par suite, constituent une hyperbole équilatère; pareillement pour $F\varphi'$ et $F'\varphi$; d'où il suit que toute conique passant par les foyers d'une conique donnée est une hyperbole équilatère. La parabole étant tangente à la droite de l'infini, on voit que cette courbe n'a qu'un foyer à distance finie.

Remarquons encore qu'une tangente isotrope est aussi une normale isotrope; donc, les foyers d'une courbe plane sont aussi des foyers de toutes ses développées et de toutes ses développantes.

La définition des foyers que nous venons de donner n'est pas équivalente à la définition d'Euler, quand la conique dégénère en une droite double.

494. *Applications.* — 1° L'équation du faisceau des tangentes, issues du

point (α, β), à la conique ayant pour équation $f(x, y) = 0$ étant

$$4f(x, y)f(\alpha, \beta) - (xf'_\alpha + yf'_\beta + zf'_\gamma)^2 = 0,$$

on exprime que ce faisceau est isotrope en écrivant qu'il est du genre cercle; on retrouve ainsi les équations des hyperboles focales.

2° Si dans l'équation $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ on pose $m = \pm i$, on obtient $y = \pm ix \pm ci$; ces quatre droites se coupent aux points $\alpha = \pm c$, $\beta = 0$ et $\alpha = 0$, $\beta = \pm ci$. On retrouve ainsi les foyers de l'ellipse.

3° En posant $m = i$, l'équation $y = mx + \frac{p}{2m}$ devient $y = i\left(x - \frac{p}{2}\right)$; ce qui prouve que le point $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ est le foyer de la parabole ayant pour équation $y^2 - 2px = 0$, les axes étant rectangulaires.

4° Considérons une parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à l'extrémité de ce diamètre, θ étant l'angle de ces deux droites. Soit $y^2 = 2p'x$ l'équation de cette parabole. Le coefficient angulaire d'une droite isotrope étant $-\cos\theta + i\sin\theta$, si l'on remplace m par cette valeur dans l'équation d'une tangente $y = mx + \frac{p'}{2m}$, on obtient

$$y = -\cos\theta\left(x + \frac{p'}{2}\right) + i\sin\theta\left(x - \frac{p'}{2}\right);$$

le point réel de cette droite, c'est-à-dire le foyer, a pour coordonnées $x = \frac{p'}{2}$, $y = -p'\cos\theta$.

5° L'équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes étant

$$2xy - \frac{c^2}{2} = 0,$$

le faisceau des tangentes issues de (α, β) a pour équation

$$\left(2xy - \frac{c^2}{2}\right)\left(2\alpha\beta - \frac{c^2}{2}\right) - \left(\beta x + \alpha y - \frac{c^2}{2}\right)^2 = 0.$$

Écrivons que l'équation

$$2xy\left(2\alpha\beta - \frac{c^2}{2}\right) - (\beta x + \alpha y)^2 = 0$$

est identique à

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 = 0,$$

ce qui donne

$$\alpha^2 = \beta^2 = \frac{\frac{c^2}{2} - \alpha\beta}{\cos\theta},$$

d'où

$$\beta = \varepsilon\alpha, \qquad \alpha^2 = \frac{c^2}{2(\cos\theta + \varepsilon)}.$$

On aura les foyers réels en supposant $\varepsilon = +1$, ce qui donne

$$\beta = \alpha = \pm \frac{c}{2\cos\frac{1}{2}\theta}.$$

Les directrices correspondantes sont définies par les équations

$$\pm(x+y) - c\cos\tfrac{1}{2}\theta = 0.$$

Le carré de la distance d'un point (x, y) de la courbe à un foyer réel étant évidemment égal à $(x+y-c\cos\frac{1}{2}\theta)^2$, l'excentricité a pour valeur

$$\frac{\sqrt{2-2\cos\theta}}{\sin\theta} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\theta}.$$

Si les axes de l'hyperbole sont a et b, on sait que $\tang\frac{1}{2}\theta = \frac{b}{a}$, d'où $\cos\frac{1}{2}\theta = \frac{a}{c}$; on retrouve ainsi $e = \frac{c}{a}$.

495. *Exprimer qu'une droite* (u, v, w) *est directice d'une conique ayant pour équation* $f(x, y) = 0$. — L'équation du faisceau des tangentes menées à la conique f par les points où elle est rencontrée par la droite (u, v, w) est

$$f(x, y)\,F(u, v, w) - \Delta(ux + vy + w)^2 = 0;$$

il suffit d'écrire que cette équation représente un faisceau isotrope, ce qui donne les conditions

$$AF(u, v, w) - \Delta u^2 = CF(u, v, w) - \Delta v^2 = \frac{BF(u, v, w) - \Delta uv}{\cos\theta};$$

quand les axes sont rectangulaires :

$$(A - C)\,F(u, v, w) = \Delta(u^2 - v^2),$$
$$BF(u, v, w) = \Delta uv,$$

d'où l'on tire

$$\frac{A - C}{B} = \frac{u^2 - v^2}{uv};$$

cette dernière équation exprime que la droite donnée est parallèle à un axe de la conique.

Foyers des coniques rapportées à des coordonnées tangentielles.

496. *Trouver les foyers d'une conique dont on donne l'équation tangentielle.* — Soient α, β les coordonnées d'un foyer F; une droite passant par ce point ayant pour équation

$$u(x - \alpha) + v(y - \beta) = 0,$$

on obtient les directions des tangentes issues de F en remplaçant w par $-(u\alpha+v\beta)$ dans l'équation tangentielle de la conique, ce qui donne

$$au^2+a'v^2+a''(u\alpha+v\beta)^2-2bv(u\alpha+v\beta)-2b'u(u\alpha+v\beta)+2b''uv=0$$

Le point (α, β) sera un foyer si l'équation précédente est identique à

$$u^2+v^2-2uv\cos\theta=0,$$

ce qui donne les conditions

$$(1)\qquad a''\alpha^2-2b'\alpha+a=a''\beta^2-2b\beta+a'=\frac{a''\alpha\beta-b\alpha-b'\beta-b''}{-\cos\theta},$$

et si les axes sont rectangulaires

$$(2)\qquad \begin{cases} a''(\alpha^2-\beta^2)-2b'a+2b\beta+a-a'=0,\\ a''\alpha\beta-b\alpha-b'\beta+b''=0.\end{cases}$$

Si $a''=0$, ces équations se réduisent au premier degré.

Si $a''\neq 0$, on pourra mettre ces équations sous cette forme

$$(a''\alpha-b')^2-(a''\beta-b)^2=a''(a'-a)+b'^2-b^2,$$
$$(a''\alpha-b')(a''\beta-b)=bb'-a''b'',$$

et prendre pour inconnues $a''\alpha-b'$ et $a''\beta-b$; on a ainsi à résoudre un système de la forme $x^2-y^2=h$, $xy=k$.

497. *Équation tangentielle générale des coniques ayant pour foyer l'origine des coordonnées.* — En écrivant que les droites ayant pour équations $y+ix=0$, $y-ix=0$ (axes rectangulaires) sont des tangentes, ou encore en exprimant que les hyperboles focales (2) passent par l'origine, on obtient les conditions $a=a'$, $b''=0$. L'équation demandée est donc

$$(3)\qquad a(u^2+v^2)+a''w^2+2bvw+2b'wu=0.$$

On voit que cette équation représente le faisceau des coniques tangentes au quadrilatère IJOF, I, J désignant les points cycliques et F le point ayant pour équation $2b'u+2bv+a''=0$ et qui est le second foyer réel. Le centre ayant pour coordonnées b', b, a'', on devait bien trouver pour coordonnées du second foyer F : $2b'$, $2b$, a''.

On peut mettre l'équation (3) sous une forme remarquable. Observons d'abord qu'on doit supposer $a\neq 0$; par suite, on peut écrire

$$(u-u_0w)^2+(v-v_0w)^2=\frac{w^2}{p^2},$$

u_0, v_0, $\frac{1}{p^2}$ étant des constantes que nous allons déterminer.

Remarquons d'abord que la polaire de l'origine est définie par les équations $f'_u=0, f'_v=0$ ou $u-u_0w=0$, $v-v_0w=0$; donc, la directrice a pour équation $u_0x+v_0y+1=0$, ce qui définit les constantes u_0, v_0. En

second lieu, cherchons les points de rencontre de la conique et de la parallèle à la directrice menée par le foyer. L'équation du n° 433 nous donne, en posant $u = u_0$, $v = v_0$, $w = 0$,

$$(u_0^2+v_0^2)\left[(u-u_0 w)^2+(v-v_0 w)^2-\frac{w^2}{p^2}\right]-[u_0(u-u_0 w)+v_0(v-v_0 w)]^2=0,$$

c'est-à-dire

$$(uv_0-vu_0)^2-w^2\frac{u_0^2+v_0^2}{p^2}=0.$$

Les coordonnées des points d'intersection sont donc

$$x'=\varepsilon\frac{p.v_0}{\sqrt{u_0^2+v_0^2}},\qquad y'=-\varepsilon\frac{p.u_0}{\sqrt{u_0^2+v_0^2}},$$

et, par suite, $x'^2+y'^2=p^2$. Il en résulte que p est la longueur de la demi-corde perpendiculaire à l'axe focal, c'est-à-dire le *paramètre de la conique*.

Équation générale des coniques homofocales à une conique donnée.

498. Si l'on représente par $PQ = 0$ l'équation tangentielle d'un système de deux points et par $F(u, v, w) = 0$ l'équation tangentielle d'une conique, l'équation du faisceau des coniques inscrites au quadrilatère formé par les tangentes à la conique donnée, issues des points P, Q, est

$$F(u, v, w)+\lambda PQ=0.$$

Si les points donnés sont les points cycliques, cette équation prend la forme

$$(1)\qquad F(u, v, w)+\lambda(u^2+v^2)=0.$$

D'ailleurs, si $x+iy+w=0$ est une tangente isotrope de la conique F, cette droite sera évidemment aussi tangente à la conique représentée par l'équation (1). Donc, pour toute valeur de λ, cette équation représente une conique homofocale à la conique donnée; on peut en outre déterminer une valeur λ' de λ telle qu'une droite non isotrope (u_1, v_1, w_1) soit tangente à la conique (1); donc, si l'on considère une conique C homofocale à la conique donnée et si l'on suppose que la droite (u_1, v_1, w_1) soit tangente à C, la conique C′ représentée par l'équation (1), dans laquelle λ est remplacé par λ', et la conique C auront mêmes foyers et une tangente commune, c'est-à-dire cinq tangentes communes; donc l'équation (1) peut représenter toute conique homofocale à la proposée; c'est donc bien l'équation générale demandée.

L'équation

$$(a^2+\lambda)u^2+(b^2+\lambda)v^2-w^2=0$$

est l'équation générale des coniques homofocales à l'ellipse représentée par

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0;$$

donc, en coordonnées ponctuelles, l'équation des coniques homofocales à la proposée est

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}-1=0,$$

ce qui est d'ailleurs évident.

499. L'équation générale des coniques homofocales à la conique représentée par l'équation générale $f(x,y)=0$ est

$$\begin{vmatrix} a+\lambda & b'' & b' & x \\ b'' & a'+\lambda & b & y \\ b' & b & a'' & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix}=0,$$

ou, en développant,

$$\lambda^2+\lambda[a''(x^2+y^2)-2b'x-2by+a+a']+\ f(x,y)=0.$$

Il passe donc, par chaque point du plan, deux coniques homofocales à la proposée. L'enveloppe de ces coniques étant évidemment formée par leurs tangentes communes, l'équation

$$[a''(x^2+y^2)-2b'x-2by+a+a']^2-4\Delta f(x,y)=0$$

représente les quatre tangentes isotropes. Par suite, si α, β et α', β' sont les coordonnées des foyers réels de ces coniques, l'équation précédente pourra se mettre sous la forme

$$[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2][(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2]=0.$$

On peut donc trouver les foyers en appliquant la méthode de Descartes pour déterminer les diviseurs du second degré d'un polynome du quatrième degré.

On peut procéder autrement. L'équation (1) représente un couple d'ombilics du faisceau si le discriminant du premier membre est nul; ce qui donne

$$\delta\lambda^2+(A+C)\Delta\lambda+\Delta^2=0;$$

en désignant par λ' l'une quelconque des racines de cette équation, on aura donc

$$F(u,v,w)+\lambda'(u^2+v^2)\equiv(\alpha u+\beta v+\gamma w)(\alpha' u+\beta' v+\gamma' w);$$

les coordonnées des foyers correspondants sont $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$ et $\frac{\alpha'}{\gamma'}$, $\frac{\beta'}{\gamma'}$.

Si $\varphi(u,v,w)=0$ est l'équation des points cycliques dans un système de coordonnées trilinéaires, la même méthode permettra de déterminer les foyers de la conique ayant, dans ce système, pour équation tangentielle $F(u,v,w)=0$. On écrira que le discriminant de $F(u,v,w)+\lambda\varphi(u,v,w)$

est nul et λ' désignant une racine de l'équation obtenue, l'équation

$$F(u, v, w) + \lambda'\varphi(u, v, w) = 0$$

représentera deux des foyers.

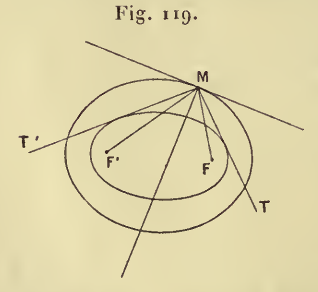
500. Théorème. — *Pour que deux droites conjuguées par rapport à une conique donnée soient aussi conjuguées par rapport à une conique homofocale, il faut et il suffit qu'elles soient rectangulaires.*

Démonstration évidente.

501. *Corollaire I.* — Considérons deux coniques homofocales; les tangentes menées à ces coniques par un de leurs points d'intersection sont évidemment conjuguées par rapport à chacune d'elles, et, par suite, elles sont orthogonales. Donc *deux coniques homofocales se coupent à angle droit en chacun de leurs points communs.*

502. *Corollaire II.* — Parmi les coniques homofocales à une conique donnée E, il y en a une, et une seule, E', tangente à une droite donnée D. Soit M le point de contact. Cette tangente et la normale D' en M à la conique E' sont conjuguées par rapport à toutes les coniques du faisceau; il en résulte que le lieu des pôles de la droite D par rapport aux coniques du faisceau est la droite D' et, réciproquement, le lieu des pôles de D' est la droite D. Ces droites D, D' sont conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes menées de M à toute conique du faisceau. Parmi les coniques du faisceau qui est un faisceau tangentiel, figure le couple des deux foyers réels F, F' communs à toutes les coniques et l'on s'assure aisément que les droites MF, MF' sont les tangentes issues de M à cette conique singulière. Il suffit en effet de remarquer que l'équation $a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 + \lambda(u^2 + v^2) = 0$ se réduit à $c^2u^2 - w^2 = 0$ si $\lambda = -b^2$. En outre, les tangentes issues du point (x_0, y_0) sont déterminées par l'équation $(a^2 + \lambda)u^2 + (b^2 + \lambda)v^2 - (ux_0 + vy_0)^2 = 0$; si $\lambda = -b^2$, cette équation devient $c^2u^2 - (ux_0 + vy_0)^2 = 0$ et se décompose en deux : $(c + x_0)u + vy_0 = 0$, $(c - x_0)u - vy_0 = 0$; les coefficients angulaires des tangentes cherchées sont donc $\frac{y_0}{x_0 + c}$ et $\frac{y_0}{x_0 - c}$; ce sont précisément ceux de MF et de MF'.

Fig. 119.



De là résultent les propositions suivantes : Soient (*fig.* 119) MT, MT' les tangentes, issues d'un point M, à une conique du faisceau; les bissectrices des angles formés par ces tangentes sont la tangente et la normale aux coniques du faisceau qui passent par M et, en outre, les angles FMT et F'MT' sont égaux, de sorte que la tangente et la normale en M sont les bissectrices des angles formés par les rayons vecteurs.

Équation focale, l'origine des coordonnées étant un foyer.

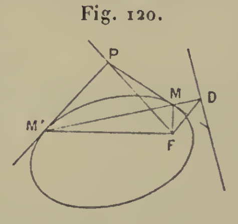
503. Si l'on rapporte une conique à deux axes rectangulaires menés par un foyer réel, son équation peut se mettre sous la forme

$$x^2+y^2=\gamma^2; \tag{1}$$

$\gamma=0$ représentant la directrice relative à ce foyer. Il en résulte que le triangle formé par deux droites rectangulaires issues d'un foyer et par la directrice correspondante est un triangle conjugué à la conique donnée; en d'autres termes, la polaire d'un point D de la directrice est la perpendiculaire à la droite FD, menée par le foyer F et, par suite, deux droites rectangulaires menées par un foyer sont conjuguées par rapport à la conique. On peut vérifier ce résultat en remarquant que deux droites rectangulaires menées par un foyer sont conjuguées par rapport aux droites isotropes issues de ce foyer, et comme ces dernières sont tangentes à la conique, les deux droites considérées sont conjuguées par rapport à cette conique. Réciproquement, si les côtés de tout angle droit dont le sommet est un point donné F sont conjuguées par rapport à cette conique, les tangentes issues de F sont isotropes et, par suite, F est un foyer. Ce théorème a été trouvé par La Hire.

504. L'équation (1) est vérifiée en posant $x=\gamma\cos\varphi$, $y=\gamma\sin\varphi$; on voit donc que si l'on prend pour triangle de référence le triangle formé par les axes de coordonnées et par la directrice considérée, on peut dire qu'un point M de la conique donnée a pour coordonnées trilinéaires $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, 1. Nous désignerons ce point M par la lettre φ. Le point φ et le point $\varphi+\pi$ qui a pour coordonnées $-\cos\varphi$, $-\sin\varphi$, 1 sont sur la droite passant par le foyer F et qui a pour équation $y=x\tang\varphi$. On peut supposer que φ est l'angle (FX, FM).

Fig. 120.



Soient φ, φ' les paramètres de deux points M, M'; on trouve pour la corde MM' (*fig.* 120) l'équation

$$x\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}+y\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}-\gamma\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}=0.$$

La tangente en M a pour équation

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi-\gamma=0. \tag{2}$$

La tangente en M' a, de même, pour équation

$$x\cos\varphi'+y\sin\varphi'-\gamma=0. \tag{3}$$

En retranchant membre à membre et simplifiant, on obtient l'équation

$$(4) \qquad x \sin\frac{\varphi+\varphi'}{2} - y\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2} = 0,$$

qui représente la droite FP passant par le foyer F et par le point de concours des tangentes en M et M'. On voit ainsi que FP est la bissectrice de l'angle MFM'. La droite FD, qui passe par le point de rencontre de MM' et de la directrice, a pour équation

$$x\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2} + y\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2} = 0.$$

Si l'on suppose l'angle MFM' constant et égal à ω, l'équation (3) peut s'écrire, en posant $\varphi'-\varphi=\omega$,

$$\cos\omega(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + \sin\omega(y\cos\varphi - x\sin\varphi) = \gamma.$$

On aura donc l'équation du lieu de P en éliminant φ entre l'équation (2) et celle-ci :

$$y\cos\varphi - x\sin\varphi = \gamma\tang\tfrac{1}{2}\omega.$$

Ce lieu est donc une conique ayant pour équation

$$x^2+y^2 = \gamma^2(1+\tang^2\tfrac{1}{2}\omega)$$

et, par suite, ayant même foyer et même directrice que la proposée, mais une excentricité différente.

La droite MM' ayant alors pour équation

$$x\cos\left(\varphi+\frac{\omega}{2}\right) + y\sin\left(\varphi+\frac{\omega}{2}\right) = \gamma\cos\frac{\omega}{2}$$

enveloppe la conique ayant pour équation

$$x^2+y^2 = \gamma^2\cos^2\tfrac{1}{2}\omega.$$

Ainsi, toute corde vue du foyer d'une conique sous un angle constant enveloppe une conique et son pôle décrit aussi une conique, ces coniques ayant en commun un foyer et la directrice correspondante.

505. Pour mettre l'excentricité en évidence, écrivons l'équation de la conique de cette manière :

$$x^2+y^2 = e^2\gamma^2$$

en posant

$$\gamma = x\cos\alpha + y\sin\alpha - \frac{p}{e},$$

p désignant le paramètre. L'équation tangentielle est

$$u^2+v^2-\frac{w^2}{e^2} = 0.$$

Or, si l'on pose

$$ux + vy + w\gamma = u'x + v'y + w',$$

on obtient

$$u = u' - \frac{e}{p}\cos\alpha . w', \qquad v = v' - \frac{e}{p}\sin\alpha . w', \qquad w = -\frac{e}{p}w';$$

donc, l'équation tangentielle rapportée aux coordonnées cartésiennes devient, en supprimant les accents,

$$\left(u - \frac{e}{p}\cos\alpha . w\right)^2 + \left(v - \frac{e}{p}\sin\alpha . w\right)^2 = \frac{w^2}{p^2};$$

c'est l'équation que nous avons déjà obtenue (497).

506. Nous avons établi géométriquement (428) que la polaire réciproque d'un cercle par rapport à un cercle est une conique; nous donnerons ici une démonstration analytique de ce théorème important.

Soient $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ et $(x-d)^2 + y^2 - r^2 = 0$ les équations du cercle directeur D et d'un second cercle C. En écrivant que la polaire du point (x, y) par rapport à D est tangente au cercle C, on obtient immédiatement l'équation de la polaire réciproque de C :

$$x^2 + y^2 = \frac{d^2}{r^2}\left(x - \frac{R^2}{d}\right)^2.$$

Réciproquement, soit

$$x^2 + y^2 = e^2(x-h)^2$$

l'équation d'une conique C'; son équation tangentielle est

$$\left(u + \frac{w}{h}\right)^2 + v^2 = \frac{w^2}{e^2 h^2}.$$

La polaire de (x, y) par rapport à D sera donc tangente à cette conique si

$$\left(x - \frac{R^2}{h}\right)^2 + y^2 = \frac{R^4}{e^2 h^2}.$$

Telle est l'équation de la polaire réciproque cherchée.

Il est bon d'observer que les polaires des points cycliques par rapport à D étant les droites isotropes issues du centre de D, les tangentes à C' issues de ce point sont isotropes; donc, le centre de D est un foyer de C'. En outre, au point de concours ω des asymptotes de C correspond la polaire de O par rapport à C'; la directrice est donc la polaire de ω par rapport à D. Réciproquement, les pôles des tangentes issues de O à la conique C' sont les points cycliques; par suite, C est un cercle, etc.

EXERCICES.

1. La distance d'un point pris M sur une hyperbole à l'une des directrices, cette distance étant comptée parallèlement à une asymptote, est égale à la distance du même point au foyer correspondant.

2. Lieu des foyers des coniques qui passent par deux points donnés A, B et dont les asymptotes ont des directions données.

On trouve deux coniques ayant pour foyers les points A et B. Résoudre cette question par le calcul et par la Géométrie.

3. Lieu des foyers des hyperboles d'Apollonius relatives à une conique donnée et à un point P, ce point décrivant une droite fixe.

4. Lieu du sommet d'une parabole passant par un point donné et dont le foyer est un point donné. Montrer que ce lieu est une épicycloïde.

5. Le lieu des foyers des coniques qui passent par quatre points A, B, C, D d'un cercle est aussi le lieu de l'intersection de deux coniques semblables ayant pour foyers les points A, B et C, D. Ce lieu se compose de deux cubiques circulaires. (FAURE.)

6. Étant donnée l'équation $x^2+y^2=e^2y^2$, trouver l'équation de la directrice parallèle à celle qui a pour équation $y=0$.

7. Former l'équation du faisceau des quatre directrices d'une conique rapportée à des axes quelconques.

8. Étant donnée l'équation d'une conique rapportée à deux axes quelconques, calculer l'excentricité. En prenant pour inconnue $1-e^2$ on a une équation réciproque.

9. Un cercle tangent aux deux branches d'une hyperbole est vu d'un foyer réel sous un angle constant.

10. Si une conique est bitangente à deux cercles dont les cordes de contact sont perpendiculaires, le point de concours de ces cordes a même polaire par rapport aux deux cercles focaux considérés et à la conique.

11. Lieu des foyers des coniques bitangentes à deux cercles (on trouve cinq cercles).

12. Le quadrilatère formé par les tangentes menées à une conique par deux points d'une conique homofocale est circonscriptible à un cercle. (CHASLES.)

13. Étant données deux coniques homofocales C, C_1, et une conique C_2 bitangente à C, prouver que le quadrilatère formé par les tangentes communes à C_1 et à C_2 est circonscriptible à un cercle.

14. Étant données deux coniques homofocales, on mène une tangente à la première et une tangente à la seconde; lieu du point de concours de ces tangentes supposées rectangulaires.

15. Lieu des foyers des coniques qui ont un centre fixe et touchent une droite fixe en un point donné.

16. On donne un triangle ABC et une ellipse qui a pour foyers les deux

points B et C; trouver le lieu des seconds foyers des ellipses inscrites au triangle ABC et dont un foyer est sur l'ellipse donnée. (LEMOINE.)

17. Une hyperbole variable a, avec une ellipse donnée, un système de diamètres conjugués communs en grandeur et en position. Chercher le lieu des foyers de l'hyperbole. (MANTEL.)

18. Un diamètre d'une ellipse est donné en grandeur et en position; son conjugué est donné en grandeur seulement. Trouver le lieu des foyers.

19. Appliquer la méthode du n° 499 à l'équation réduite d'une conique.

20. Lieu du second foyer d'une conique qui a un foyer donné et passe par deux points donnés.

CHAPITRE XX.

SÉCANTES COMMUNES A DEUX CONIQUES (1).

Équation en λ.

507. Soient

$$(1)\quad f(x, y, z) \equiv A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz + 2 B' zx + 2 B'' xy = 0,$$

$$(2)\quad f_1(x, y, z) \equiv A_1 x^2 + A'_1 y^2 + A''_1 z^2 + 2 B_1 yz + 2 B'_1 zx + 2 B''_1 xy = 0$$

les équations de deux coniques. L'équation $f + \lambda f_1 = 0$ représentera un couple de droites, si λ est racine de l'équation du troisième degré :

$$(3)\qquad F(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} A + \lambda A_1 & B'' + \lambda B''_1 & B' + \lambda B'_1 \\ B'' + \lambda B''_1 & A' + \lambda A'_1 & B + \lambda B_1 \\ B' + \lambda B'_1 & B + \lambda B_1 & A'' + \lambda A''_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ces deux droites constituent un système de *sécantes communes* aux deux coniques. Il y a donc, en général, trois systèmes de sécantes communes à deux coniques données.

En désignant par Δ et Δ_1 les discriminants de f et f_1, on trouve, en développant $F(\lambda)$:

$$(4)\qquad F(\lambda) \equiv \Delta + \Theta\lambda + \Theta_1 \lambda^2 + \Delta_1 \lambda^3$$

(1) *Voir* G. KŒNIGS, *Leçons de l'Agrégation.*

ou, en vertu de la formule de Taylor,

$$\Theta = A_1 a + A'_1 a' + A''_1 a'' + 2B_1 b + 2B'_1 b' + 2B''_1 b'',$$

$a, a', \ldots, a''$ étant les mineurs de Δ. On en conclut, en remarquant que Θ_1 est le coefficient de $\frac{1}{\lambda}$ dans le développement de $F\left(\frac{1}{\lambda}\right)$,

$$\Theta_1 = A a_1 + A' a'_1 + A'' a''_1 + 2B b_1 + 2B' b'_1 + 2B'' b''_1.$$

Cela étant, on trouve immédiatement

$$(5) \qquad F'(\lambda) = \alpha A_1 + \alpha' A'_1 + \alpha'' A''_1 + 2\beta B_1 + 2\beta' B'_1 + 2\beta'' B''_1,$$

$\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$ désignant les mineurs de $F(\lambda)$ pris avec des signes convenables.

On a ensuite

$$\tfrac{1}{2} F''(\lambda) = \Theta_1 + 3\Delta_1 \lambda.$$

Mais

$$\Delta_1 = A_1 a_1 + B''_1 b''_1 + B'_1 b'_1, \quad \Delta_1 = B''_1 b''_1 + A'_1 a'_1 + B_1 b_1, \quad \Delta_1 = B'_1 b'_1 + B_1 b_1 + A''_1 a''_1,$$

ce qui donne, en ajoutant membre à membre ces quatre équations, les deux membres des trois dernières étant d'abord multipliés par λ et Θ_1 étant remplacé par sa valeur,

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \tfrac{1}{2} F''(\lambda) = {} & (A + \lambda A_1) a_1 + (A' + \lambda A'_1) a'_1 + (A'' + \lambda A''_1) a''_1 \\ & + 2(B + \lambda B_1) b_1 + 2(B' + \lambda B'_1) b'_1 + 2(B'' + \lambda B''_1) b''_1. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, si tous les mineurs de $F(\lambda)$ sont nuls, $f + \lambda f_1$ est un carré parfait et l'équation $f + \lambda f_1 = 0$ représente une droite double. On sait d'ailleurs que si $F(\lambda) = 0$, pour que tous les mineurs du premier ordre soient nuls, il faut et il suffit que $\alpha = \alpha' = \alpha'' = 0$. Si l'un au moins de ces mineurs prend une valeur différente de zéro, quand on y remplace λ par une racine de l'équation $F(\lambda) = 0$, l'équation $f + \lambda f_1 = 0$ représente deux droites distinctes. D'une manière générale, si λ est une racine de cette équation, la conique singulière $f + \lambda f_1$ a un point double dont les coordonnées x, y, z sont déterminées par les équations

$$(7) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0.$$

Ce point double est unique dans le cas où l'un des mineurs α, α' ou α'' est différent de zéro. S'il en est ainsi, on a, comme on le sait,

$$\alpha u^2 + \alpha' v^2 + \alpha'' w^2 + 2\beta v w + 2\beta' w u + 2\beta'' u v \equiv k(ux + vy + wz)^2,$$

k étant une constante différente de zéro, de sorte que

$$(8) \qquad \frac{x^2}{\alpha} = \frac{y^2}{\alpha'} = \frac{z^2}{\alpha''} = \frac{yz}{\beta} = \frac{zx}{\beta'} = \frac{xy}{\beta''} = \frac{1}{k}.$$

Remarquons encore que si $F(\lambda) = 0$, on a

$$f + \lambda f_1 \equiv (u_1 x + v_1 y + w_1 z)(u_2 x + v_2 y + w_2 z);$$

donc, en identifiant

$$A + \lambda A_1 = u_1 u_2, \quad A' + \lambda A'_1 = v_1 v_2, \quad A'' + \lambda A''_1 = w_1 w_2,$$
$$2(B + \lambda B_1) = v_1 w_2 + w_1 v_2,$$
$$2(B' + \lambda B'_1) = w_1 u_2 + u_1 w_2,$$
$$2(B'' + \lambda B''_1) = u_1 v_2 + v_1 u_2,$$

et, par suite, on a alors

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \tfrac{1}{2} F''(\lambda) = {} & a_1 u_1 u_2 + a'_1 v_1 v_2 + a''_1 w_1 w_2 + b_1 (v_1 w_2 + w_1 v_2) \\ & + b'_1 (w_1 u_2 + u_1 w_2) + b''_1 (u_1 v_2 + v_1 u_2). \end{aligned} \right.$$

Si les deux droites sont confondues, de sorte que

$$f + \lambda f_1 \equiv k (u_1 x + v_1 y + w_1 z)^2,$$

on a, dans ce cas,

$$(10) \quad \tfrac{1}{2} F''(\lambda) = k (a_1 u_1^2 + a'_1 v_1^2 + a''_1 w_1^2 + 2 b_1 v_1 w_1 + 2 b'_1 w_1 u_1 + 2 b''_1 u_1 v_1).$$

508. Théorème I. — *Un point double du faisceau admet la même polaire par rapport à toutes les coniques du faisceau, et réciproquement.*

En effet, soit λ' une racine de l'équation (3); les coordonnées x, y, z d'un point double de la conique $f + \lambda' f_1$ vérifiant les équations (7), l'équation

$$(11) \quad X \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + Y \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) + Z \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) = 0$$

peut s'écrire

$$(\lambda - \lambda') \left[X \frac{\partial f_1}{\partial x} + Y \frac{\partial f_1}{\partial y} + Z \frac{\partial f_1}{\partial z} \right] = 0,$$

ce qui démontre la proposition directe. Réciproquement, pour que l'équation (11) représente une droite indépendante de la valeur de λ, il faut évidemment que les dérivées de f soient proportionnelles à celles de f_1, de sorte que $-\lambda'$ étant le coefficient de proportionnalité : $\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda' \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0$, etc., ce qui exprime que x, y, z doit être un point double de $f + \lambda' f_1$, de sorte que $F(\lambda') = 0$. La recherche des pôles doubles, c'est-à-dire des points ayant même polaire par rapport à deux coniques, est donc ramenée à celle de leurs sécantes communes.

509. Théorème II. — *Deux points doubles ω, ω', appartenant à deux coniques singulières distinctes $f + \lambda' f_1$, $f + \lambda'' f_1$, sont conjugués par rapport à toutes les coniques du faisceau.*

Soient x, y, z et x', y', z' les coordonnées de ω et ω'. Posons

$$L \equiv x\frac{\partial f}{\partial x'} + y\frac{\partial f}{\partial y'} + z\frac{\partial f}{\partial z'} \equiv x'\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + z'\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$M \equiv x\frac{\partial f_1}{\partial x'} + y\frac{\partial f_1}{\partial y'} + z\frac{\partial f_1}{\partial z'} \equiv x'\frac{\partial f_1}{\partial x} + y'\frac{\partial f_1}{\partial y} + z'\frac{\partial f_1}{\partial z}.$$

Des équations (7), où l'on remplace λ par λ', puis par λ'', on déduit

$$L + \lambda' M = 0, \qquad L + \lambda'' M = 0,$$

et, comme $\lambda' - \lambda'' \neq 0$, il en résulte que $L = 0$, $M = 0$, et aussi $L + \lambda M = 0$, quel que soit λ; ce qui exprime précisément que ω et ω' sont conjugués par rapport à $f + \lambda f_1$.

510. Théorème III. — *Si λ est une racine double de l'équation* $F(\lambda) = 0$, *qui n'annule pas tous les mineurs du premier ordre de* $F(\lambda)$, *la conique* $f + \lambda f_1$ *se compose de deux droites distinctes qui se coupent en un point commun à toutes les droites du faisceau, et réciproquement. Si la racine est triple, l'une de ces droites est une tangente commune aux coniques du faisceau.*

En effet, $F(\lambda)$ étant nul, $f + \lambda f_1 = 0$ représente deux droites distinctes, puisque les mineurs de $F(\lambda)$ ne sont pas tous nuls. Mais, λ étant racine multiple, $F'(\lambda) = 0$, en désignant par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point double de $f + \lambda f_1$, on a, si l'on tient compte des équations (5) et (8),

$$F'(\lambda) = k f(x_1, y_1, z_1); \tag{12}$$

donc $f(x_1, y_1, z_1) = 0$ et aussi $f_1(x_1, y_1, z_1) = 0$.

Réciproquement, si $f + \lambda f_1 = 0$ représente deux droites distinctes se coupant en un point commun à f et f_1, on a $F(\lambda) = 0$, puisque $f + \lambda f_1$ est le produit de deux facteurs du premier degré. En second lieu, les mineurs α, α', α'', ... ne sont pas tous nuls, puisque ces facteurs sont distincts, et enfin $F'(\lambda) = 0$, en vertu de l'identité (12).

Il convient, toutefois, de remarquer que nous avons supposé la racine λ finie; on peut toujours supposer qu'il en est ainsi, c'est-à-dire que Δ_1 soit différent de zéro, à moins de supposer que f et f_1 soient des coniques dégénérées, et l'on peut laisser de côté ce cas particulier.

Supposons maintenant que λ soit racine triple, mais que l'un des mineurs, α par exemple, soit différent de zéro. Dans ce cas, l'identité (9) montre que la condition $F''(\lambda) = 0$ exprime que les droites P, Q du couple $f + \lambda f_1$ sont conjuguées par rapport à f_1. En outre, ces droites, étant distinctes, se coupent en un point ω commun à f et f_1. Si la droite Q n'est pas tangente à f_1, son pôle est sur la tangente au point ω à f_1, d'où il résulte que P, conjuguée de Q, est la tangente à f_1 au point ω. En outre, ω a même polaire par rapport aux coniques du faisceau; donc P est la tangente commune, au point ω, à toutes les coniques du faisceau.

Si les deux droites étaient confondues, l'identité (10) montre que $f+\lambda f_1=0$ représenterait alors une droite double tangente à f_1 au point ω. Mais ω ayant même polaire par rapport aux coniques du faisceau, la tangente au point ω à f_1 serait tangente au même point à toutes les coniques du faisceau.

311. Théorème IV. — *A deux racines distinctes de l'équation* $F(\lambda)=0$, *correspondent deux couples distincts et n'ayant aucune droite commune.*

En effet, si l'on suppose $\lambda \neq \lambda'$, de l'identité

$$f+\lambda f_1 \equiv \mu(f+\lambda' f_1),$$

μ désignant une constante, on déduirait

$$(1-\mu)f=(\mu\lambda'-\lambda)f_1.$$

L'hypothèse $\mu=1$ entraînerait $f_1\equiv 0$; si l'on supposait $\mu\lambda'-\lambda=0$, on aurait $f\equiv 0$; enfin si $\mu-1\neq 0$, $\mu\lambda'-\lambda\neq 0$, les coniques f et f_1 seraient identiques. Nous écartons tous ces cas particuliers.

Supposons maintenant

$$f+\lambda f_1\equiv PQ, \qquad f+\lambda' f_1\equiv PR,$$

P, Q, R étant des fonctions linéaires; on en déduirait

$$f\equiv \frac{P(\lambda R-\lambda' Q)}{\lambda-\lambda'}, \qquad f_1\equiv \frac{P(Q-R)}{\lambda-\lambda'};$$

par conséquent, les coniques f, f_1 seraient toutes les deux dégénérées en couples de droites et auraient une droite commune; on pourrait donc poser $f=PP_1$, $f_1=PP_2$, P_1 et P_2 étant deux fonctions linéaires. Mais dans ce cas, quelle que soit la valeur de λ, $f+\lambda f_1$ serait un produit de facteurs du premier degré, et, par suite, $F(\lambda)$ serait identiquement nul. Nous écartons encore ce cas particulier.

312. Théorème V. — 1° *Lorsque les coefficients de f et de f_1 sont tous réels, à toute racine réelle de l'équation* $F(\lambda)=0$ *correspond un couple de droites réelles ou imaginaires conjuguées;* 2° *à toute racine imaginaire correspond un couple formé de deux droites imaginaires non conjuguées.*

Si λ est une racine réelle de $F(\lambda)=0$, les coefficients de $f+\lambda f_1$ sont réels : donc $f+\lambda f_1=0$ représente, comme on le sait, deux droites réelles ou imaginaires conjuguées.

Soit maintenant $\lambda=p+qi$; je dis que $f+\lambda f_1=0$ ne peut représenter deux droites réelles ou deux droites imaginaires conjuguées, car on aurait

$$f+(p+qi)f_1\equiv(m+ni)(P^2+\varepsilon Q^2) \qquad (\varepsilon=\pm 1),$$

d'où

$$f + pf_1 \equiv m(P^2 + \varepsilon Q^2),$$
$$qf_1 \equiv n\ (P^2 + \varepsilon Q^2),$$

d'ailleurs $n \neq 0$, sans quoi f_1 serait identiquement nul ; on aurait donc

$$f \equiv \left(q\frac{m}{n} - p\right)f_1,$$

de sorte que $f \equiv 0$ ou bien f serait proportionnel à f_1 ; cas particulier déjà écarté.

Enfin, on vérifiera de la même manière que l'on ne saurait supposer

$$f + (p + qi)f_1 \equiv P(Q + Ri),$$

P, Q, R étant réels; donc enfin, à toute racine imaginaire $p + qi$ correspond un couple de droites imaginaires toutes les deux et non conjuguées. Ainsi

$$f + (p + qi)f_1 \equiv P.Q,$$

et, par suite,

$$f + (p - qi)f_1 \equiv P_0Q_0,$$

P_0 et Q_0 étant les polynomes respectivement conjugués de P et de Q.

513. Théorème VI. — *A une racine simple correspond un couple formé de deux droites distinctes.*

Car, si λ est racine simple, les mineurs de $F(\lambda)$ ne peuvent être tous nuls sans quoi $F'(\lambda)$ serait nul; donc $f + \lambda f_1$ n'est pas un carré.

Rappelons enfin que tout point commun à f et f_1 est un point commun à toutes les coniques du faisceau, et que si f et f_1 sont tangentes en un point A toutes les coniques du faisceau leur sont tangentes au même point (447).

Discussion de l'intersection de deux coniques.

514. Nous laisserons d'abord de côté ce qui concerne la réalité; nous distinguerons cinq cas :

Premier cas : *Trois racines distinctes* λ_1, λ_2, λ_3. — On peut poser

$$f + \lambda_1 f_1 \equiv P_1Q_1, \qquad f + \lambda_2 f_1 \equiv P_2Q_2, \qquad f + \lambda_3 f_1 \equiv P_3Q_3,$$

$P_1, Q_1, \ldots, Q_3$ désignant des fonctions linéaires. La racine λ_1 étant simple, P_1 et Q_1 sont distincts; de même pour P_2, Q_2 et P_3, Q_3; enfin les trois racines étant distinctes, les six droites obtenues sont distinctes. Aucune des droites d'un couple ne peut passer par le point de concours des droites d'un autre couple, puisque les racines sont simples. Les deux premiers couples, par exemple, forment un quadrilatère ABCD, AB étant la droite P_1, CD la droite Q_1, BC la droite P_2 et enfin AD la droite Q_2. Les deux coniques se coupent aux

quatre points A, B, C, D et toute conique du faisceau passe par ces quatre points; il en résulte que les droites AC, BD constituent le troisième couple. C'est d'ailleurs ce que l'on vérifie en remarquant que

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, P_3 Q_3 \equiv (\lambda_3 - \lambda_2)\, P_1 Q_1 + (\lambda_1 - \lambda_3)\, P_2 Q_2.$$

Plus généralement, l'identité

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(f + \lambda f_1) \equiv (\lambda - \lambda_2)\, P_1 Q_1 + (\lambda_1 - \lambda)\, P_2 Q_2$$

fait bien voir que toutes les coniques du faisceau sont circonscrites au quadrilatère ABCD.

Remarquons enfin que les points doubles des trois couples de sécantes forment un triangle conjugué commun aux coniques du faisceau.

Deuxième cas : *Une racine double λ_1 n'annulant pas tous les mineurs du premier ordre et une racine simple λ_2.* — A la racine double λ_1 correspond un couple de droites distinctes P_1, Q_1 se coupant en un point ω commun aux coniques du faisceau; à la racine λ_2 correspondent aussi deux droites P_2, Q_2. Soit ω' le point commun à ces deux droites; je dis que l'une d'elles est précisément la droite $\omega\omega'$. En effet, le point ω est sur toutes les coniques du faisceau, et, par suite, sur l'une des droites du second couple; donc, la polaire de ω est une tangente commune en ω à toutes ces coniques. De plus, ω et ω' étant conjugués, ω' est sur la tangente commune au point ω. Ainsi, en résumé, les coniques f, f_1 sont tangentes en un point ω, la tangente étant la droite P_2 par exemple; les droites P_1, Q_1 passent par ω et la droite Q_2 coupe ces deux droites en deux autres points communs à toutes les coniques du faisceau. Il est facile de vérifier que les deux coniques n'ont pas de triangle conjugué commun.

Troisième cas : *Une racine double λ_1 annulant tous les mineurs et une racine simple λ_2.* — Le couple correspondant à la racine λ_1 se réduit à une droite double P_1. Soient P_2, Q_2 les droites qui correspondent à λ_2, ω' étant leur point de concours. Tout point de P_1 est un point double, et, par suite, est conjugué de ω'; donc P_1 est la polaire de ω' dans toutes les coniques. D'ailleurs P_1 n'est pas une tangente, sans quoi son pôle ω' appartiendrait à toutes les coniques et λ_2 serait une racine multiple. Les droites P_2, Q_2 coupent donc P_1 en deux points distincts qui appartiennent à toutes les coniques; il en résulte évidemment que les coniques sont tangentes en ces points. Et, d'ailleurs, on a

$$f + \lambda_1 f_1 \equiv P_1^2, \qquad f + \lambda_2 f_1 \equiv P_2 Q_2 :$$

donc les équations des deux coniques peuvent se mettre sous la forme

$$\lambda_1 P_2 Q_2 - \lambda_2 P_1^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad P_2 Q_2 - P_1^2 = 0.$$

Ainsi, dans le cas présent, les coniques sont tangentes en deux points distincts A, B. Ajoutons qu'il y a une infinité de triangles conjugués communs,

dont un sommet est le point ω', les deux autres sommets de l'un quelconque de ces triangles étant deux points conjugués par rapport au segment AB.

Quatrième cas : *Une racine triple λ_1 n'annulant pas tous les mineurs.* — Le couple correspondant à la racine λ_1 est formé de deux droites distinctes se coupant en un point ω; l'une d'elles est tangente commune au point ω, aux coniques du faisceau (510). Donc, dans ce cas, les deux coniques ont un contact du second ordre au point ω et se coupent en outre en un autre point.

Cinquième cas : *Une racine triple λ_1 annulant tous les mineurs.* — Le couple correspondant à λ_1 se compose de deux droites confondues en une seule P_1, de sorte que $f + \lambda_1 f_1 \equiv P_1^2$. Mais P_1 est tangente à f_1, on en conclut que f et f_1 ont un contact du troisième ordre sur la tangente P_1 (448).

On remarquera que dans ces deux derniers cas il n'y a pas de triangle conjugué commun.

Cas où l'équation en λ est indéterminée.

515. Supposons que $f + \lambda f_1$ soit un produit de deux facteurs du premier degré quel que soit λ; on voit déjà que $f = 0$ et $f_1 = 0$ représentent des couples de droites. Si $f + \lambda f_1$ est un carré pour toutes les valeurs de λ, on a $f \equiv P^2$, $f_1 \equiv P_1^2$; or $P^2 + \lambda P_1^2$ ne peut être un carré parfait pour toutes les valeurs de λ, à moins de supposer $P_1 \equiv kP$, k étant une constante. Dans ce cas f et f_1 se réduiraient à une même droite double et $F(\lambda)$ serait identiquement nul. Laissant ce premier cas de côté, soit ω un point double de la conique $f + \lambda f_1$: l'identité $F(\lambda) \equiv 0$ donne $F'(\lambda) \equiv 0$; donc on voit, comme plus haut, que le point double appartient aux coniques f et f_1. Cela étant, il faut distinguer deux cas :

1° Le point double est indépendant de λ. Dans ce cas, toute conique du faisceau se compose de deux droites issues d'un point déterminé; on a, par exemple,

$$f \equiv PQ, \qquad f_1 \equiv aP^2 + bPQ + cQ^2,$$

et par suite

$$f + \lambda f_1 \equiv aP^2 + (b + \lambda)PQ + cQ^2.$$

2° Le point double dépend de λ. Soient P, Q et P_1, Q_1 deux couples de droites du faisceau, ω étant le point de concours des deux premières et ω' celui des deux autres. Tous les points doubles sont nécessairement des points communs à toutes les coniques du faisceau, puisque $F'(\lambda) \equiv 0$. Donc ω est sur l'une des droites P_1 ou Q_1 et ω' sur P ou sur Q; $\omega\omega'$ est une droite commune aux deux couples. Supposons que P et P_1 soient confondues avec $\omega\omega'$; on a ainsi, pour des valeurs convenables de λ,

$$f + \lambda' f_1 \equiv PQ, \qquad f + \lambda'' f_1 \equiv PQ_1,$$

d'où

$$(\lambda' - \lambda'')(f + \lambda f_1) \equiv [(\lambda - \lambda'')Q + (\lambda' - \lambda)Q_1]P.$$

On voit ainsi qu'il y a une infinité de points doubles sur la droite P, et un autre point double isolé, intersection des droites Q, Q_1.

Discussion relative à la réalité.

Nous supposons les coefficients de f et de f_1 réels.

516. Dans le PREMIER CAS, les trois racines étant *distinctes*, l'équation $F(\lambda) = o$ peut avoir :

(A) *Trois racines réelles.* — Nous avons posé

$$f + \lambda_1 f_1 \equiv P_1 Q_1, \qquad f + \lambda_2 f_1 \equiv P_2 Q_2;$$

et nous savons que le couple qui correspond à une racine réelle se compose de deux droites réelles ou imaginaires conjuguées. 1° Si les quatre droites P_1, Q_1, P_2, Q_2 sont réelles, les quatre points A, B, C, D sont réels et par suite le troisième couple P_3, Q_3, formé par les droites AC, BD est réel. Les coniques se coupent donc, dans ce cas, en quatre points réels distincts; il y a trois couples de sécantes réelles, et un triangle autopolaire commun réel.

2° Supposons P_1, Q_1 réelles et P_2, Q_2 imaginaires conjuguées; les points A, B, C, D sont imaginaires. En effet, le point de concours ω_2 des droites P_2, Q_2 étant réel, il ne peut y avoir aucun autre point réel sur aucune de ces deux droites. On voit que, AB étant la droite P_1 et CD la droite P_2, A et B sont conjugués ainsi que C et D; le troisième couple AC, BD est formé de droites imaginaires conjuguées.

3° Supposons P_1, Q_1 imaginaires conjuguées ainsi que P_2 et Q_2; on voit, comme précédemment, que les quatre points A, B, C, D sont encore imaginaires; les points A, intersection de P_1 et de Q_2, et C, intersection de P_2 et de Q_1, sont imaginaires conjugués; il en est de même des points B et D et par suite les sécantes AC et BD sont réelles. Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Si les trois racines de l'équation $F(\lambda) = o$ *sont réelles et inégales, les coniques f et f_1 se coupent en quatre points distincts réels, ou en quatre points imaginaires conjugués deux à deux, et admettent un triangle conjugué commun réel.*

(B) *Une racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées.* — Soient λ_1 la racine réelle et $\lambda_2 = p + qi$, $\lambda_3 = p - qi$ les racines imaginaires. On a $f + \lambda_2 f_1 \equiv PQ$, $f + \lambda_3 f_1 \equiv P_0 Q_0$, $P = o$, $Q = o$ représentant deux droites imaginaires non conjuguées, P_0, Q_0 étant les polynomes respectivement conjugués de P et de Q. Les points (P, P_0) et (Q, Q_0) sont réels : désignons-les par A et B. Les points (P, Q_0) et (P_0, Q) sont imaginaires conjugués : désignons-les par C et D. Ces points ne peuvent être réels, car A et C sont distincts; si C était réel, la droite AC, c'est-à-dire P, serait réelle. Le troisième couple, qui correspond à la racine λ_1, est composé des droites AB, CD; il est donc réel. Ainsi, quand l'équation en λ a une seule racine réelle, les deux coniques se coupent en deux points réels et distincts et en

deux points imaginaires conjugués. Le triangle conjugué commun a un sommet réel et deux sommets imaginaires conjugués. Remarquons enfin que, dans le cas des trois racines distinctes, il y a *un* ou *trois* couples de sécantes réelles (¹).

Deuxième cas : *Une racine double* λ_1 *n'annulant pas tous les mineurs.* — La racine simple λ_2, qui est réelle ainsi que la racine λ_1, donne deux droites réelles, car l'une d'elles est la tangente commune au point ω, lequel est nécessairement réel comme étant l'intersection de deux droites réelles ou imaginaires conjuguées; mais, nous venons de le dire, les droites du couple correspondant à la racine double peuvent être réelles ou imaginaires conjuguées. Dans le premier cas, les coniques se touchent en un point réel, et se coupent en deux autres points réels; dans le second cas elles se touchent en un point réel et se coupent en deux autres points imaginaires conjugués.

Troisième cas : *La racine double annule tous les mineurs*; $f + \lambda f_1 \equiv \varepsilon P^2$; P est à coefficients réels; les deux coniques sont bitangentes, la corde des contacts étant toujours réelle, mais pouvant couper les coniques en deux points réels ou en deux points imaginaires conjugués. Dans le premier cas, le couple correspondant à la racine simple est réel et formé de deux tangentes communes; dans le second cas, de deux tangentes communes imaginaires conjuguées.

Dans le quatrième et le cinquième cas, les sécantes sont nécessairement réelles, car le point de contact, étant unique, est réel.

On voit encore aisément que si les coniques sont réduites à deux droites et ont une droite commune, elles sont composées de droites réelles; mais cela n'est plus nécessaire quand elles se réduisent à deux faisceaux de droites issues d'un même point.

Invariants relatifs à l'équation en λ.

517. Les racines de l'équation en λ restent invariables quand on soumet $f(x, y, z)$ et $f_1(x, y, z)$ à une même substitution linéaire; cela résulte de ce que $F(\lambda)$ étant le discriminant de la forme $f + \lambda f_1$ devient, après la substitution, $F(\lambda).\mu^2$, μ étant le module. Il en résulte que Θ et Θ_1 sont des invariants simultanés des formes f et f_1. Toute relation entre les racines de l'équation $F(\lambda) = 0$ exprime une propriété géométrique des coniques données.

Si, en rapportant les deux coniques à deux systèmes différents de coordonnées, on a $f(x, y, z) = h F(X, Y, Z)$, $f_1(x, y, z) = h_1 F_1(X, Y, Z)$, h et h_1 étant deux constantes, l'identité

$$f(x, y, z) + \lambda f_1(x, y, z) \equiv h \left[F(X, Y, Z) + \frac{\lambda h_1}{h} F_1(X, Y, Z) \right]$$

(¹) *Voir* une démonstration purement algébrique et directe dans le *Traité de Géométrie analytique* de M. H. Picquet, page 465.

montre que les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le discriminant de $F(X, Y, Z) + \lambda F_1(X, Y, Z)$ sont égales à celles de l'équation $F(\lambda) = 0$ multipliées par la constante $\frac{h_1}{h}$; donc toute relation *homogène* entre les racines de l'équation $F(\lambda) = 0$ subsistera, quels que soient les systèmes de coordonnées ponctuelles employées.

518. *Applications.* — 1° Pour exprimer que deux coniques sont tangentes, il suffit d'exprimer que l'équation en λ relative à ces deux coniques a une racine double. La condition cherchée est donc

$$(9\Delta\Delta_1 - \Theta\Theta_1)^2 - 4(3\Delta\Theta_1 - \Theta^2)(3\Delta_1\Theta - \Theta_1^2) = 0;$$

le premier membre de cette équation est un invariant.

2° Nous avons trouvé la formule

$$\Theta = A_1 a + A'_1 a' + A''_1 a'' + 2B_1 b + 2B'_1 b' + 2B''_1 b'';$$

donc, si l'on suppose

$$A_1 = A'_1 = A''_1 = 0, \qquad b = b' = b'' = 0,$$

on a $\Theta = 0$. Ces conditions expriment que le triangle de référence est conjugué à la première conique et inscrit à la seconde. En outre, si l'on suppose que la seconde conique passe par deux sommets d'un triangle conjugué à la première, c'est-à-dire si, par exemple, $A_1 = 0$ et $A'_1 = 0$; si, en outre, on suppose $\Theta = 0$, elle passera par le troisième sommet. En vertu des hypothèses, on a, en effet, $A''_1 a'' = 0$; or, on ne peut supposer $a'' = 0$ si la conique f est une conique proprement dite : donc $A''_1 = 0$.

Cela étant, prenons sur la conique f_1 un point quelconque A et soient B et C les points où la polaire de A par rapport à la conique f coupe la conique f_1. Je dis que ABC est autopolaire par rapport à f si l'on suppose $\Theta = 0$. En effet, s'il en était autrement, la polaire de B couperait BC en un point C′ et le triangle ABC′ serait conjugué à la conique f. Or, la conique f_1 passe par A et B, donc elle passe aussi par C′, ce qui prouve que C′ est confondu avec C. Remarquons que la condition $\Theta = 0$, qui exprime que la somme des inverses des racines de l'équation en λ est nulle, est indépendante du système de coordonnées auquel on rapporte les deux coniques; on peut donc énoncer le théorème suivant : *Étant données deux coniques f et f_1, si la conique f_1 est circonscrite à un triangle conjugué à la première conique, on a $\Theta = 0$ et, réciproquement, si cette condition est remplie, il y a une infinité de triangles conjugués par rapport à la première conique et inscrits à la seconde.*

Les côtés d'un pareil triangle coupent les deux coniques en quatre points formant une division harmonique. On dit alors que la conique f_1 est *harmoniquement circonscrite* à la conique f.

En second lieu, on a encore $\Theta = 0$ si l'on suppose

$$a = a' = a'' = 0, \qquad B_1 = B'_1 = B''_1 = 0$$

et, réciproquement, si l'on suppose $\Theta = 0$ et $a = a' = 0$; on en déduit $a'' = 0$.

Donc, on peut aussi énoncer cette proposition : *S'il y a un triangle conjugué à la conique f_1 et circonscrit à la conique f, on a $\Theta = 0$ et, réciproquement, si cette condition est remplie, on verra, en raisonnant comme dans le cas précédent, qu'il existe une infinité de triangles conjugués à f_1 et circonscrits à f.* On dit alors que f est harmoniquement inscrite à f_1.

On a donc ce théorème : *Quand une conique f_1 est harmoniquement circonscrite à une conique f, inversement la conique f est harmoniquement inscrite à f_1.*

On verra de même que la condition pour que f soit harmoniquement circonscrite à f_1 et, par suite, pour que f_1 soit harmoniquement inscrite à f est $\Theta_1 = 0$.

Recherche des ombilics de deux coniques données.

519. On nomme *ombilic* le point de concours de deux tangentes communes à deux coniques. La recherche des ombilics se ramène à celle des sécantes communes. En effet, soit ω un ombilic du système de coniques C, C_1; transformons la figure par polaires réciproques. A une tangente T commune à C et C_1 et passant par ω, correspond un point t' commun à leurs polaires réciproques C' et C'_1; à la seconde tangente T_1, issue de ω, correspond un second point t'_1 commun à C' et C'_1; au point ω correspond donc la sécante $t't'_1$, commune aux coniques C', C'_1. Réciproquement, à toute sécante commune à ces coniques correspond un ombilic de C et C_1. Les coniques C', C'_1 ont, en général, trois systèmes de sécantes communes; donc, C et C_1 ont trois couples d'ombilics; en tout six ombilics.

La recherche directe ne présente d'ailleurs aucune difficulté. Soient, en effet, $\varphi(u, v, w) = 0$, $\varphi_1(u, v, w) = 0$ les équations tangentielles des deux coniques; l'équation $\varphi(u, v, w) + \lambda\varphi_1(u, v, w) = 0$ est l'équation générale des coniques tangentes aux tangentes communes de C et C_1. Si, pour une valeur particulière de λ, le premier membre de l'équation précédente est un produit de deux facteurs linéaires, cette équation représentera, pour cette valeur de λ. un couple d'ombilics.

Supposons, en effet, que

$$(1)\quad \varphi(u, v, w) + \lambda'\varphi_1(u, v, w) \equiv (ux_1 + vy_1 + wz_1)(ux_2 + vy_2 + wz_2);$$

une tangente à la première conique passant par le point (x_1, y_1, z_1) sera aussi tangente à la seconde, car si l'on a $\varphi(u, v, w) = 0$, $ux_1 + vy_1 + wz_1 = 0$, on en déduit $\lambda'\varphi_1(u, v, w) = 0$. Or, on doit supposer $\lambda' \neq 0$, sans quoi $u, v, w) = 0$ représenterait deux points; donc, $\varphi_1(u, v, w) = 0$. On connaîtra donc tous les ombilics si l'on sait résoudre l'équation du troisième degré $\Phi(\lambda) = 0$, obtenue en égalant à zéro le discriminant de

$$\varphi(u, v, w) + \lambda\varphi_1(u, v, w).$$

Or, il y a entre les racines des équations $F(\lambda) = 0$ et $\Phi(\lambda) = 0$ une relation simple. Supposons que

$$\varphi(u, v, w) \equiv a u^2 + \ldots, \qquad \varphi_1(u, v, w) \equiv a_1 u^2 + \ldots,$$

$a, \ldots, a_1, \ldots$ étant respectivement les mineurs du premier ordre des discriminants Δ, Δ_1 des premiers membres $f(x, y, z)$ et $f_1(x, y, z)$ des équations ponctuelles de C et C_1. Pour éviter toute confusion, formons le discriminant de $\varphi(u, v, w) + \mu\varphi_1(u, v, w)$. Le discriminant de $\varphi(u, v, w)$ est le déterminant adjoint de Δ, il est donc égal à Δ^2; en second lieu, les formules de Gauss (voir *Cours d'Algèbre*, t. II, p. 196) permettent de calculer les mineurs du déterminant adjoint. Il en résulte que

$$\Phi(\mu) \equiv \Delta^2 + \Theta_1 \Delta\mu + \Theta\Delta_1 \mu^2 + \Delta_1^2 \mu^3.$$

En posant $\mu = \frac{t}{\lambda}$, l'équation $\Phi(\mu) = 0$ devient

$$\Delta^2\lambda^3 + \Theta_1 \Delta . t\lambda^2 + \Theta\Delta_1 . t^2\lambda + \Delta_1^2 t^3 = 0.$$

Cette équation sera identique à $F(\lambda) = 0$, si l'on a

$$\frac{\Delta^2}{\Delta_1} = \Delta t = \Delta_1 t^2 = \frac{\Delta_1^2}{\Delta} t^3,$$

ce qui donne $t = \frac{\Delta}{\Delta_1}$; donc la relation cherchée est $\lambda\mu = \frac{\Delta}{\Delta_1}$. La résolution de $F(\lambda) = 0$ entraîne donc celle de $\Phi(\lambda) = 0$.

Si $F(\lambda) = 0$ admet une racine double ou une racine triple, il en sera de même de l'équation $\Phi(\lambda) = 0$ et réciproquement.

520. D'après cette remarque, si deux coniques ont quatre points communs distincts, elles ont aussi quatre tangentes communes distinctes et, par suite, six ombilics.

Supposons maintenant que les deux coniques soient tangentes ou bitangentes. L'équation $F(\lambda) = 0$ aura une racine double; il en sera donc de même de l'équation $\Phi(\lambda) = 0$. Deux cas peuvent se présenter : 1° la racine double donne un couple d'ombilics distincts ω_1, ω_2. La racine simple donne nécessairement un couple d'ombilics distincts ω_3, ω_4 [on le voit en raisonnant comme pour l'équation $F(\lambda) = 0$]. Dans ce cas, il y aura trois tangentes communes. En effet, on démontre facilement, en raisonnant comme pour les sécantes communes, que l'un des ombilics, ω_3 par exemple, sera sur la ligne $\omega_1\omega_2$, de sorte que les tangentes communes sont $\omega_1\omega_4$, $\omega_2\omega_4$ et $\omega_1\omega_2$, dont le point de contact sera ω_3 et que l'on peut considérer comme la réunion de deux tangentes.

2° Si la racine double donne un couple d'ombilics confondus en un point ω_1; il n'y a plus que deux tangentes communes, qui sont $\omega_1\omega_3$ et $\omega_1\omega_4$, et les points ω_3, ω_4 sont respectivement les points de contact. Ces deux cas correspondent aux cas où les deux coniques sont tangentes ou bitangentes.

Supposons qu'il y ait une racine triple. Les coniques ont alors un contact qui est au moins du second ordre. Si le couple triple d'ombilics est formé de deux points confondus avec ω_1, ω_1 est le point de contact des deux coniques, qui ont alors quatre tangentes confondues en une seule. Ce cas correspond évidemment au contact du troisième ordre. Si les ombilics sont distincts ω_1, ω_2, la droite $\omega_1\omega_2$ sera une tangente commune, et les points ω_1, ω_2 seront conjugués par rapport à f_1, d'où il résulte que l'un des points, ω_1 par exemple, sera le point de contact de $\omega_1\omega_2$; les deux coniques auront deux tangentes communes : $\omega_1\omega_2$ et une droite issue de ω_2. Ce cas correspond à deux coniques ayant un contact du second ordre.

Cas particuliers de l'intersection de deux coniques.

521. 1° *Coniques concentriques.* — Considérons deux coniques concentriques et rapportons-les à deux axes passant par leur centre; leurs équations seront

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0, \qquad A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + F_1 = 0.$$

L'équation en λ est alors

$$(F + \lambda F_1)[(A + \lambda A_1)(C + \lambda C_1) - (B + \lambda B_1)^2] = 0.$$

A la racine $-\frac{F}{F_1}$ correspond un couple de droites passant par le centre; à chacune des racines de l'équation

$$(A + \lambda A_1)(C + \lambda C_1) - (B + \lambda B_1)^2 = 0$$

correspond un couple de droites parallèles. Les coniques données sont donc circonscrites à un parallélogramme, ce qui est d'ailleurs évident *a priori*. Il est également évident qu'elles sont inscrites à un parallélogramme.

2° *Coniques ayant un triangle autopolaire commun.* — Soient

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = 0, \qquad A'\alpha^2 + B'\beta^2 + C'\gamma^2 = 0$$

les équations de deux coniques rapportées à un triangle autopolaire. L'équation en λ est

$$(A + \lambda A')(B + \lambda B')(C + \lambda C') = 0;$$

elle a, en général, ses trois racines distinctes. Pour qu'une racine soit double, il est nécessaire que l'un des déterminants $AB' - BA'$, $AC' - CA'$ ou $BC' - CB'$ soit nul. Supposons, par exemple, $BC' - CB' = 0$; dans ce cas, les coniques sont bitangentes, la corde des contacts étant la droite $\alpha = 0$; les tangentes communes passent par le point $(1, 0, 0)$. Deux coniques ayant un triangle conjugué commun se coupent donc en quatre points distincts ou sont bitangentes.

Les équations des sécantes communes s'obtiennent aisément; en effet, les couples de sécantes communes sont donnés par les équations

$$(AB' - BA')\beta^2 - (CA' - AC')\gamma^2 = 0,$$
$$(BC' - CB')\gamma^2 - (AB' - BA')\alpha^2 = 0,$$
$$(CA' - AC')\alpha^2 - (BC' - CB')\beta^2 = 0.$$

On voit que les droites de chaque couple passent par un sommet du triangle conjugué, et sont conjuguées harmoniques par rapport aux côtés du triangle qui partent du même sommet.

Les équations tangentielles des deux coniques ont la même forme que leurs équations ponctuelles; on étudierait donc de la même façon les ombilics de ces courbes.

En particulier, si deux coniques ont un foyer commun, leurs équations peuvent se mettre sous la forme

$$x^2 + y^2 = \gamma^2, \qquad x^2 + y^2 = \delta^2$$

et, par suite,

$$\gamma - \delta = 0, \qquad \gamma + \delta = 0$$

représentent deux sécantes communes qui sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux directrices correspondant au foyer commun.

3° *Coniques homothétiques*. — Les équations des deux coniques étant

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0,$$
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2D'xz + 2E'yz + F'z^2 = 0,$$

on voit que l'équation en λ a une racine égale à -1; car, en retranchant membre à membre les équations des deux coniques, on obtient l'équation

$$z[2(D - D')x + 2(E - E')y + (F - F')z] = 0,$$

qui représente deux droites, dont l'une à l'infini. Dans le cas où les deux coniques sont des cercles, il y a un couple de sécantes composé de la droite de l'infini et de l'axe radical; les autres couples sont formés de droites isotropes.

Si les coniques sont concentriques et homothétiques, leurs équations peuvent se mettre sous la forme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0, \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F_1 = 0;$$

l'équation en λ est alors

$$(F + \lambda F_1)(1 + \lambda)^2 = 0.$$

A la racine double -1 correspond un couple double $z^2 = 0$, formé par la droite de l'infini, et à la racine simple $-\frac{F}{F_1}$ correspondent les asymptotes; les deux coniques sont bitangentes, la corde des contacts étant la droite de l'infini.

4° *Coniques ayant un diamètre commun conjugué à une même direction.* — Si l'on prend le diamètre donné pour axe des x, l'axe des y étant parallèle aux cordes que ce diamètre divise en deux parties égales, les équations des deux coniques sont

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + F = 0, \qquad A'x^2 + C'y^2 + 2D'x + F' = 0.$$

L'équation en λ aura une racine égale à $-\frac{C}{C'}$, à laquelle correspondent deux sécantes parallèles à l'axe des y.

5° *Coniques bitangentes à une même conique.* — Soit $f = 0$ l'équation d'une conique et considérons deux coniques qui lui sont bitangentes et dont les équations sont $f + \alpha^2 = 0$, $f + \beta^2 = 0$. En retranchant membre à membre, on obtient immédiatement un système de sécantes communes ayant pour équation $\alpha^2 - \beta^2 = 0$. Donc, quand deux coniques sont bitangentes à une troisième, deux de leurs sécantes communes forment un faisceau harmonique avec les cordes de contact.

Considérons une troisième conique représentée par l'équation $f + \gamma^2 = 0$. En combinant ces coniques deux à deux, nous obtenons les cordes communes définies par les équations

$$\alpha - \beta = 0, \qquad \beta - \gamma = 0, \qquad \gamma - \alpha = 0,$$
$$\alpha + \beta = 0, \qquad \beta + \gamma = 0, \qquad \gamma + \alpha = 0,$$

ce qui donne quatre systèmes formés de trois droites concourantes :

1°	$\alpha - \beta = 0,$	$\beta - \gamma = 0,$	$\gamma - \alpha = 0,$
2°	$\alpha + \beta = 0,$	$\beta + \gamma = 0,$	$\gamma - \alpha = 0,$
3°	$\alpha + \beta = 0,$	$\beta - \gamma = 0,$	$\gamma + \alpha = 0,$
4°	$\alpha - \beta = 0,$	$\beta + \gamma = 0,$	$\gamma + \alpha = 0.$

Systèmes de coniques bitangentes à deux coniques données.

522. Soient $f = 0$, $f_1 = 0$ les équations des deux coniques données. Les équations

$$f - \alpha^2 = 0, \qquad f_1 - \beta^2 = 0$$

sont celles de deux coniques respectivement bitangentes aux deux premières; ces deux coniques coïncident, si l'on peut déterminer une constante k telle que

$$f - \alpha^2 \equiv k(f_1 - \beta^2)$$

ou

$$f - kf_1 \equiv \alpha^2 - k\beta^2.$$

Or $\alpha^2 - k\beta^2$ étant un produit de facteurs du premier degré, la constante $-k$ est une racine de l'équation en λ relative aux deux coniques.

D'après cela, soit λ_1 une racine de l'équation en λ; de sorte que, en posant $k = -\lambda_1$,

$$f + \lambda_1 f_1 \equiv P.Q;$$

on a

$$(\alpha + \beta\sqrt{-\lambda_1})(\alpha - \beta\sqrt{-\lambda_1}) \equiv PQ.$$

Si l'on pose

$$\alpha + \beta\sqrt{-\lambda_1} \equiv P\sqrt{\mu},$$

on devra poser aussi

$$\alpha - \beta\sqrt{-\lambda_1} \equiv \frac{Q}{\sqrt{\mu}},$$

ce qui donne

$$\alpha \equiv \frac{1}{2}\left(P\sqrt{\mu} + \frac{Q}{\sqrt{\mu}}\right), \qquad \beta \equiv \frac{1}{2\sqrt{-\lambda_1}}\left(P\sqrt{\mu} - \frac{Q}{\sqrt{\mu}}\right).$$

L'équation

$$f - \frac{1}{4}\left(P\sqrt{\mu} + \frac{Q}{\sqrt{\mu}}\right)^2 = 0,$$

qui est identique, comme on s'en assure aisément, à celle-ci :

$$f_1 + \frac{1}{4\lambda_1}\left(P\sqrt{\mu} - \frac{Q}{\sqrt{\mu}}\right)^2 = 0$$

représente une famille de coniques bitangentes aux deux coniques données.

Cette équation peut s'écrire ainsi :

$$4\mu f - (P\mu + Q)^2 = 0$$

ou

$$\mu^2 P^2 + 2\mu(PQ - 2f) + Q^2 = 0.$$

On vérifie que l'enveloppe de cette famille de coniques a pour équation

$$(PQ - 2f)^2 - P^2 Q^2 = 0$$

ou

$$f(PQ - f) = 0,$$

c'est-à-dire

$$ff_1 = 0.$$

On obtient ainsi trois familles de coniques bitangentes aux deux coniques données. Par chaque point du plan, il passe deux coniques de la même famille. Ces coniques se confondent si le point donné est sur l'une des deux coniques f ou f_1.

323. *Application.* — Si l'on rapporte un quadrilatère au triangle formé par ses diagonales, les équations des quatre côtés étant

$$X \pm Y \pm Z = 0,$$

on peut poser

$$f \equiv (X+Y)^2 - Z^2, \qquad f_1 \equiv (X-Y)^2 - Z^2;$$

on en conclut

$$f - f_1 \equiv 4XY;$$

de sorte que, en posant

$$\alpha + \beta \equiv 2X\sqrt{\mu}, \qquad \alpha - \beta \equiv \frac{2Y}{\sqrt{\mu}},$$

on obtient une équation de la forme

$$(X+Y)^2 - Z^2 - \left(X\sqrt{\mu} + \frac{Y}{\sqrt{\mu}}\right)^2 = 0$$

ou

$$X^2(1-\mu) + Y^2\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = X^2,$$

et, en posant $1 - \mu = \frac{1}{A}$,

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{1-A} = Z^2;$$

c'est la forme trouvée déjà par d'autres méthodes.

EXERCICES.

1. Démontrer que les directrices d'une conique sont les sécantes communes à cette conique et aux polaires des points cycliques. En déduire l'équation du faisceau des directrices d'une conique.

2. Trouver une conique D telle que la conique C soit à elle-même sa polaire réciproque par rapport à D.

3. Montrer que, si deux coniques C, C′ sont polaires réciproques par rapport à la conique D, il y a un triangle conjugué commun à ces trois coniques. Les coniques C et C′ étant données, trouver la conique directrice D.

4. On donne une conique et un cercle de centre fixe et de rayon variable; trouver le lieu des points d'intersection des sécantes communes.

5. Former les équations de deux coniques de manière que l'équation en λ ait des racines données.

6. Déterminer les points d'intersection des coniques

$$x^2 = y + 1, \qquad xy + 4x - 6y + 4 = 0.$$

7. Lieu des points de concours des tangentes communes à une conique donnée et à tous les cercles qui rencontrent la conique en deux points donnés.

8. Lieu des points de concours des tangentes communes à une conique fixe et à toutes les coniques qui passent par quatre points fixes.

9. Deux coniques ont un foyer commun; par ce foyer, on mène une sécante et, par les points où cette sécante coupe les deux coniques, des tangentes à ces coniques; trouver le lieu du point de concours de ces tangentes.

10. Deux ellipses ont un foyer commun; l'une est fixe et l'autre tourne autour de ce foyer. 1° Enveloppe de l'ellipse mobile. 2° Enveloppe d'une sécante commune. 3° Lieu du point de concours des tangentes communes.

11. Trouver la relation qui doit exister entre deux racines de l'équation en λ relative à deux coniques pour qu'il y ait un triangle inscrit à l'une et circonscrit à l'autre.

12. Même question, en remplaçant le triangle par un quadrilatère.

13. Dans un faisceau ponctuel de coniques, il en existe, en général, une seule qui soit harmoniquement circonscrite à une conique donnée; s'il y en a deux, toutes le sont. Théorème corrélatif.

14. Les cercles circonscrits aux triangles conjugués à une conique coupent orthogonalement le cercle orthoptique de cette conique. (Faure.)

15. Le lieu des centres des coniques inscrites à un triangle pour lesquelles la somme des carrés des axes est constante est un cercle ayant pour centre l'orthocentre de ce triangle. (Steiner.)

16. Parmi les coniques d'un *réseau tangentiel* défini par l'équation

$$\lambda_1 f_1(u, v, w) + \lambda_2 f_2(u, v, w) + \lambda_3 f_3(u, v, w) = 0,$$

il y en a une infinité qui sont réduites à deux points; les droites joignant ces deux points enveloppent une courbe de troisième classe appelée *Cayleyenne* du réseau. Cette courbe est l'enveloppe des droites dont les pôles par rapport aux coniques du réseau sont en ligne droite.

17. Propriétés corrélatives pour un *réseau* ponctuel.

(*Voir*, par exemple, pour les propriétés des réseaux, les *Leçons sur les coordonnées tangentielles* de M. G. Papelier.)

FIN DU TOME I.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME I.

CHAPITRE I.

PRÉLIMINAIRES.

	Pages.
Remarques sur l'homogénéité des formules de la Géométrie	1
Constructions géométriques	5
Segments	16
Angles	19
Théorie des projections sur un axe	22
Systèmes de coordonnées	28
Coordonnées rectilignes	28
Coordonnées polaires	29
Autres systèmes de coordonnées	30
Relations entre la longueur d'un segment issu de l'origine, les angles qu'il fait avec deux axes de coordonnées rectilignes, les coordonnées de son extrémité, etc.	31
Équation d'une courbe plane. Exemples	39
Transformation des coordonnées rectilignes	46
Classification des courbes planes	51

CHAPITRE II.

LIGNE DROITE.

Équation de la ligne droite	55
Problèmes relatifs à la ligne droite	64
Problèmes relatifs aux angles	78
Problèmes relatifs aux distances	85
Aire d'un triangle en fonction des coordonnées de ses sommets	89
Centre de gravité, centre des moyennes distances	91
Transversales	93
Division harmonique	96
Rapport anharmonique	98
Polaire d'un point par rapport à un angle	102
Quadrilatère complet	106

Pages.
Triangles homologiques 107
Points et droites imaginaires 112

CHAPITRE III.

COORDONNÉES HOMOGÈNES. COORDONNÉES TRILINÉAIRES.

Coordonnées homogènes 119
Coordonnées trilinéaires 125

CHAPITRE IV.

INVARIANTS.

Invariants 139

CHAPITRE V.

FAISCEAUX DE DROITES.

Faisceaux du second degré 144
Conditions pour que l'équation du second degré $f(x, y) = 0$ représente deux droites 151

CHAPITRE VI.

CERCLE.

Conditions pour que l'équation du second degré $f(x, y) = 0$ représente un cercle 157
Équation du cercle passant par trois points 161
Intersection d'une droite et d'un cercle 164
Polaire d'un point par rapport à un cercle 167
Mener une tangente commune à deux cercles 171
Centre de similitude de deux cercles 173
Puissance d'un point par rapport à un cercle 176
Intersection de deux cercles. Axes radicaux. Points cycliques 178
Cercles orthogonaux 182
Cercle orthogonal à trois cercles donnés 185
Angle de deux cercles 189
Inversion 190
Équation du cercle en coordonnées trilinéaires 192

CHAPITRE VII.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

Lieux géométriques 196

CHAPITRE VIII.

COURBES DU SECOND DEGRÉ.

Classification des courbes du second degré 215

Pages.

Application de la théorie des formes quadratiques à la classification des coniques et à la réduction de l'équation du second degré........ 229
Directions asymptotiques d'une courbe algébrique........ 234

CHAPITRE IX.

THÉORIE DU CENTRE.

Conditions pour que l'origine soit centre........ 241
Courbes ayant une infinité de centres........ 242
Recherche du centre dans les courbes du second degré........ 244
Rapporter une courbe du second degré à deux axes passant par son centre.... 247

CHAPITRE X.

THÉORIE DES DIAMÈTRES.

Diamètres des courbes du second degré........ 252
Diamètres conjugués........ 257
Réduction de l'équation d'une conique (axes obliques)........ 259
Axes dans les courbes du second degré........ 261
Équation en S........ 263
Involution........ 268

CHAPITRE XI.

RÉDUCTION DE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ, AVEC DES AXES RECTANGULAIRES.

Première méthode : par l'équation en S........ 274
Deuxième méthode : par la transformation des coordonnées........ 278
Troisième méthode : usage des invariants........ 281

CHAPITRE XII.

LONGUEUR DES AXES D'UNE CONIQUE. THÉORÈMES D'APOLLONIUS.

Équation aux carrés des longueurs des demi-axes d'une conique à centre...... 286
Théorèmes d'Apollonius........ 290

CHAPITRE XIII.

FIGURES HOMOTHÉTIQUES. FIGURES SEMBLABLES.

Coniques homothétiques........ 299
Coniques semblables........ 305

CHAPITRE XIV.

THÉORIE DES TANGENTES ET DES NORMALES.

Définition des points multiples dans les courbes algébriques........ 307
Application aux courbes du second degré........ 308

Pages
Théorie générale des tangentes 310
Trouver l'équation tangentielle d'une conique 317
Remarques sur l'inégalité $f(x, y) > 0$ 328
Normales 335
Détermination de la tangente et de la normale à une courbe dont les coordonnées sont des fonctions d'un paramètre 338
Longueur d'un arc de courbe 340
Tangente, normale, sous-tangente, sous-normale 342
Détermination géométrique des tangentes à quelques courbes. Déplacement d'une figure plane de forme invariable 345
Usage des infiniment petits dans la construction des tangentes 355
Méthode des transversales réciproques 357

CHAPITRE XV.

THÉORIE DES ENVELOPPES.

Cas d'un paramètre 358
Cas où l'équation est algébrique par rapport au paramètre 361
Cas de plusieurs paramètres 364
Équations homogènes par rapport aux paramètres 370
Développées 374

CHAPITRE XVI.

PÔLES ET POLAIRES.

Pôles et polaires dans les coniques 370
Propriétés des pôles et polaires 383
Construction de la polaire 385
Pôles et polaires dans les courbes algébriques d'ordre quelconque 389
Théorème de Frégier 392

CHAPITRE XVII.

COURBES POLAIRES RÉCIPROQUES.

Définition des courbes polaires réciproques 394
Polaire réciproque d'une conique par rapport à une conique 395
Cas où la conique directrice est un cercle 396
Équations tangentielles relatives aux coniques 399

CHAPITRE XVIII.

CONIQUES PASSANT PAR DES POINTS DONNÉS OU TANGENTES A DES DROITES DONNÉES.

Équation générale des coniques circonscrites à un triangle 404
Équation générale des coniques inscrites à un triangle 406
Théorème fondamental 409
Théorème corrélatif 413

Pages.
Faisceau ponctuel de coniques 414
Équation générale des coniques circonscrites à un quadrilatère 417
Cercle du faisceau 421
Hyperbole équilatère du faisceau 423
Lieu des centres des coniques du faisceau 425
Faisceau tangentiel de coniques 428
Coniques rapportées à un triangle autopolaire 432
Théorèmes de Chasles 433

CHAPITRE XIX.

THÉORIE DES FOYERS.

Définitions 438
Recherche des foyers d'une conique 441
Cercles focaux 447
Nouvelle définition des foyers (Plücker) 448
Foyers des coniques rapportées à des coordonnées tangentielles 450
Équation générale des coniques homofocales à une conique donnée 452
Équation focale, l'origine des coordonnées étant un foyer 455

CHAPITRE XX.

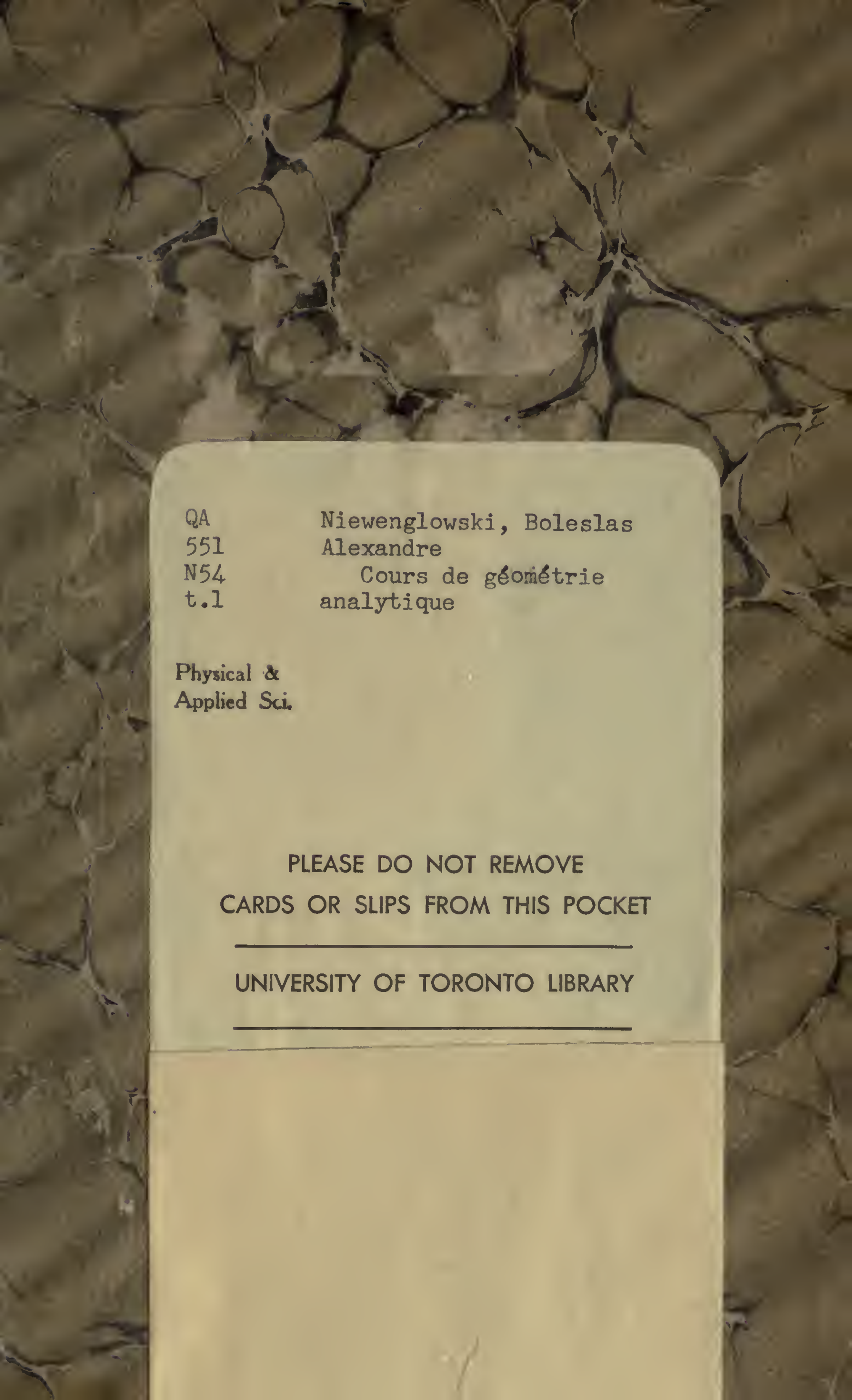
SÉCANTES COMMUNES A DEUX CONIQUES.

Équation en λ 459
Discussion de l'intersection de deux coniques 464
Cas où l'équation en λ est indéterminée 466
Discussion relative à la réalité 467
Invariants relatifs à l'équation en λ 468
Recherche des ombilics de deux coniques données 470
Cas particuliers de l'intersection de deux coniques 472
Système de coniques bitangentes à deux coniques données 474

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME I.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
20337 Quai des Grands-Augustins, 55.




QA
551
N54
t.1
Niewenglowski, Boleslas
Alexandre
Cours de géométrie
analytique
Physical &
Applied Sci.
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

